

Aoi



Vai al contenuto multimediale

Carmen Carano

Sulle funzioni iperboliche





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it

info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXIX

Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it

info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20

00020 Canterano (RM)

(06) 45551463

ISBN 978-88-255-2932-6

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 2019

Indice

- 7 Capitolo I
 Dalle funzioni goniometriche circolari in C alle funzioni iperboliche
- 14 Capitolo II
 Analogie tra le relazioni che legano le funzioni circolari e quelle corrispondenti che legano le funzioni iperboliche
- 16 Capitolo III
 Le funzioni iperboliche goniometriche

Sulle Funzioni Iperboliche

Carmen Carano

Sunto

In questo lavoro si definiscono le funzioni iperboliche partendo dall'estensione delle funzioni circolari dall'insieme R all'insieme C . Da tali definizioni si arriva alla dimostrazione che la variabile t di queste funzioni rappresenta il doppio dell'area di un settore iperbolico individuato dall'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ e che coseno iperbolico e seno iperbolico sono le coordinate di un punto P appartenente a un ramo di tale iperbole (come è noto). Si verifica poi che dalle definizioni date delle funzioni iperboliche dipendono le analogie tra le relazioni che legano tali funzioni e quelle corrispondenti che legano le funzioni circolari, così come tra le corrispondenti formule di derivazione e d'integrazione. Si introducono quindi nuove funzioni, periodiche, che vengono chiamate funzioni iperboliche goniometriche, la cui variabile non è più t ma, come per le funzioni circolari, un angolo orientato α , avente come vertice l'origine del riferimento cartesiano e come primo lato il semiasse positivo delle ascisse: coseno iperbolico goniometrico e seno iperbolico goniometrico rappresentano ancora le coordinate del punto P , ma non sono più funzioni del doppio t dell'area di un settore iperbolico, ma dell'ampiezza di un angolo α a cui corrisponde un opportuno settore iperbolico. Si determinano infine le relazioni che sussistono tra le funzioni iperboliche e le funzioni iperboliche goniometriche e quindi tra valori corrispondenti delle variabili t e α ; si ottengono infine alcune relazioni che sussistono tra le funzioni iperboliche goniometriche.

1. Dalle funzioni goniometriche circolari in C alle funzioni iperboliche

Le funzioni goniometriche circolari seno e coseno sono funzioni reali definite nell'insieme $D =]-\infty; +\infty[$.

Estendiamo il dominio D di tali funzioni dall'insieme R dei numeri reali all'insieme C dei numeri complessi; nell'operare tale estensione applichiamo il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel, supponendo quindi che le proprietà di tali funzioni, valide in R , permangano anche nel campo complesso.

In quanto segue, imporreemo pertanto che continuino a essere verificate in C le formule goniometriche, la relazione fondamentale tra seno e coseno di uno stesso angolo, le relazioni tra le funzioni goniometriche di angoli associati e la formula di Eulero, valide per le funzioni circolari definite in R (ovviamente per le funzioni circolari definite in C , non potremo più parlare di funzioni goniometriche, dato che l'argomento complesso di tali funzioni non è l'ampiezza di un angolo).

La relazione fondamentale tra le funzioni seno e coseno definite in C sarà:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \quad \forall z = a + ib \in C$$

cioè :

$$\begin{aligned} \cos^2(a + ib) + \operatorname{sen}^2(a + ib) &= (\cos a \cos(ib) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(ib))^2 + (\operatorname{sen} a \cos(ib) + \operatorname{sen}(ib) \cos a)^2 = \\ &= \cos^2 ib \cdot (\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a) + \operatorname{sen}^2 ib \cdot (\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a) = \cos^2 ib + \operatorname{sen}^2 ib = 1 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\cos^2 ib + \operatorname{sen}^2 ib = 1 \quad (1).$$

La formula di Eulero¹, per le funzioni seno e coseno definite in C sarà:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad \forall z = a + ib \in C$$

cioè:

$$\begin{aligned} e^{i(a+ib)} &= \cos(a + ib) + i \operatorname{sen}(a + ib) = \cos a \cos(ib) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(ib) + i \operatorname{sen} a \cos(ib) + i \operatorname{sen}(ib) \cos a = \\ &= \cos(ib)(\cos a + i \operatorname{sen} a) + i \operatorname{sen} ib(\cos a + i \operatorname{sen} a) = (\cos(ib) + i \operatorname{sen}(ib)) \cdot e^{ia} \end{aligned}$$

e quindi:

$$e^{-b} = \cos(ib) + i \operatorname{sen}(ib) \quad (2).$$

¹ Dalla formula di Eulero per le funzioni seno e coseno definite in R :

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \forall x \in R$$

si ottiene:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Imponendo che in C , come in R , sia

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{e} \quad \text{sen}(-z) = -\text{senz}$$

e cioè:

$$\begin{aligned} \cos(a+ib) &= \cos(-a-ib) = \cos(-a)\cos(-ib) - \text{sen}(-a)\text{sen}(-ib) = \cos a \cos(-ib) + \text{sen} a \text{sen}(-ib), \\ \text{si ha:} \quad \cos(-ib) &= \cos ib \quad \text{e} \quad \text{sen}(-ib) = -\text{sen}(ib) \end{aligned} \quad (3)$$

a cui si sarebbe arrivati anche partendo dalla relazione $\text{sen}(a+ib) = -\text{sen}(-a-ib)$.

Dalla (2), utilizzando le (3), si ottengono le due uguaglianze:

$$\cos ib = \frac{e^b + e^{-b}}{2} \quad \text{sen} ib = i \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \quad (4).$$

Il coseno di un numero immaginario è quindi una funzione reale di variabile immaginaria, il seno invece è una funzione immaginaria di variabile immaginaria.

Da quanto visto, si deduce che imporre che siano verificate in C le stesse relazioni che sussistono per le funzioni seno e coseno in R (avendo supposto che in C siano valide le formule di addizione di seno e coseno valide in R), equivale a imporre che esse siano verificate nell'insieme I dei numeri immaginari.

Dalle (4), definiamo coseno iperbolico e seno iperbolico di t (con $t \in R$) le funzioni:

$$\text{Cosht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{Senht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (5)$$

(come per le funzioni circolari, Cosht è una funzione pari, Senht è una funzione dispari).

Analogamente alle funzioni circolari, si definiscono le altre funzioni iperboliche:

$$\text{Tght} = \text{Senht} / \text{Cosht} \quad \text{Ctght} = \text{Cosht} / \text{Senht} \quad \text{Cosecht} = 1 / \text{Senht} \quad \text{Secht} = 1 / \text{Cosht}.$$

Per il generico numero complesso $z = a + ib$, sarà quindi:

$$\begin{aligned} \cos(a+ib) &= \cos a \cdot \cos ib - \text{sen} a \cdot \text{sen} ib = \cos a \text{Cosh} b - i \cdot \text{sen} a \text{Senh} b \\ \text{sen}(a+ib) &= \text{sen} a \cdot \cos ib + \cos a \cdot \text{sen} ib = \text{sen} a \text{Cosh} b + i \cdot \cos a \text{Senh} b \\ \text{tg}(a+ib) &= \frac{\text{sen} a \cdot \text{Cosh} b + i \cdot \cos a \cdot \text{Senh} b}{\cos a \text{Cosh} b - i \cdot \text{sen} a \cdot \text{Senh} b} = \frac{\text{tga} + i \cdot \text{Tgh} b}{1 - i \cdot \text{tga} \cdot \text{Tgh} b} \end{aligned}$$

(seno, coseno e tangente di numeri complessi sono quindi numeri complessi).

Le funzioni iperboliche sono funzioni reali di variabile reale legate alle funzioni circolari di variabile immaginaria dalle seguenti relazioni, che si deducono dalle (4) e dalle (5):

$$\cos it = \operatorname{Cosh} t \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} it = i \cdot \operatorname{Senh} t \quad (\text{da cui } \operatorname{Senh} t = -i \cdot \operatorname{sen} it) \quad (6).$$

Dalle definizioni di coseno iperbolico e di seno iperbolico (5) e dalle relazioni tra tali funzioni e le funzioni circolari coseno e seno di variabile immaginaria (6) scaturiscono le analogie tra le relazioni che intercorrono tra le funzioni circolari goniometriche di variabile reale e le corrispondenti relazioni tra le funzioni iperboliche, relazioni su cui ci soffermeremo nel par. 2..

Dalla relazione fondamentale tra le funzioni seno e coseno di variabile immaginaria it :

$$\cos^2 it + \operatorname{sen}^2 it = 1$$

e dalle (6), si ottiene la relazione fondamentale tra coseno iperbolico e seno iperbolico dello stesso argomento t :

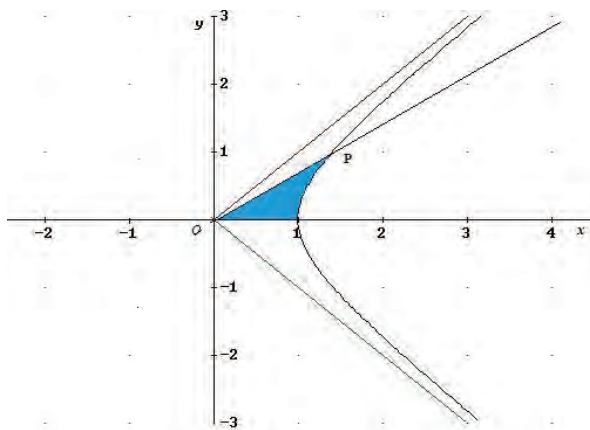
$$\operatorname{Cosh}^2 t - \operatorname{Senh}^2 t = 1$$

da cui segue che $\operatorname{Cosh} t$ e $\operatorname{Senh} t$ sono le coordinate di un punto dell'iperbole equilatera di equazione:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

motivo per il quale tali funzioni prendono il nome di funzioni iperboliche.

Se si considera il ramo dell'iperbole situato nel semipiano delle ascisse positive e si traccia la semiretta di origine O passante per il punto $P(\operatorname{Cosh} t, \operatorname{Senh} t)$, si dimostra che la variabile t rappresenta il doppio dell'area A_{Sl_P} , considerata positiva nel primo quadrante e negativa nel quarto quadrante, del settore iperbolico evidenziato in figura delimitato dall'asse delle x , dalla semiretta OP e dal ramo dell'iperbole.



Infatti, indicando con X_p e Y_p le coordinate del punto P , sarà:

$$A_{SI_p} = \frac{1}{2} X_p \sqrt{X_p^2 - 1} - \int_1^{X_p} \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln(X_p + \sqrt{X_p^2 - 1}) \quad \text{nel I quadrante}$$

$$A_{SI_p} = -\frac{1}{2} X_p \sqrt{X_p^2 - 1} + \int_1^{X_p} \sqrt{x^2 - 1} dx = -\frac{1}{2} \ln(X_p + \sqrt{X_p^2 - 1}) \quad \text{nel IV quadrante}$$

da cui, posto $t = 2A_{SI_p}$, si avrà:

$$t = \ln(X_p + \sqrt{X_p^2 - 1}) \quad \text{nel I quadrante e } t = -\ln(X_p + \sqrt{X_p^2 - 1}) \quad \text{nel IV quadrante}$$

e quindi:

$$e^t = X_p + \sqrt{X_p^2 - 1} \quad \text{nel I quadrante e } e^{-t} = X_p + \sqrt{X_p^2 - 1} \quad \text{nel IV quadrante.}$$

In entrambi i casi, si ha: $X_p = \frac{e^{2t} + 1}{2e^t} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

e

$$Y_p = \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = \left|\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{nel I quadrante}$$

$$Y_p = -\sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - 1} = -\sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = -\left|\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right| = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{nel IV quadrante.}$$

In definitiva, $\forall t \in R$, risulta

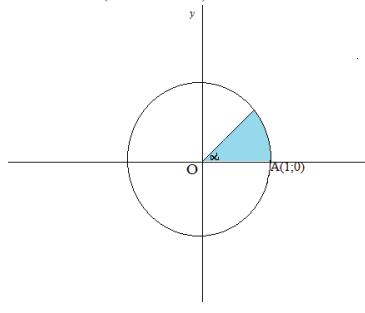
$$\text{Cosht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Senht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{con} \quad t = 2A_{Sl_p} \quad \text{c. v. d.}$$

da cui:

$$\text{Cosht} + \text{Senht} = e^t.$$

Il fatto che la variabile delle funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico (e di tutte le altre funzioni iperboliche) rappresenti il doppio dell'area di un settore iperbolico, ci fa pensare a funzioni molto diverse da quelle circolari che sono funzioni dell'angolo orientato α (o, più propriamente, della misura dell'angolo α , che indichiamo ancora con α) avente come primo lato il semiasse non negativo dell'asse delle ascisse (com'è noto, $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ sono rispettivamente ascissa e ordinata del punto d'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica).

In realtà la misura, espressa in radianti, dell'angolo α è uguale al doppio dell'area del settore circolare, evidenziato in figura, individuato dall'angolo α nel cerchio goniometrico $\left(A_{Sc(\alpha)} = \frac{1}{2} \alpha^{rad} \cdot 1\right)$.



$$\alpha^{rad} = t = 2A_{Sc(\alpha)}$$

Possiamo pertanto considerare seno e coseno (e quindi tutte le altre funzioni circolari) indifferentemente come funzioni goniometriche dell'angolo α o come funzioni della variabile t .

Affinchè le due interpretazioni della variabile delle funzioni circolari siano equivalenti, sarà necessario considerare negativa l'area dei settori circolari individuati dagli angoli orientati in verso orario, inoltre, perchè le funzioni seno e coseno continuino a essere definite su tutto $\mathbb{R}$, bisognerà considerare l'area di un settore circolare individuato da un angolo α maggiore di 2π o minore di -2π ($\alpha = \beta + 2k\pi$, con $-2\pi < \beta < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$) uguale alla somma di k volte l'area del cerchio goniometrico (positiva o negativa) più l'area del settore circolare individuato dall'angolo β .

Quindi, per le funzioni iperboliche Cosht e Senht , $t = 2A_{Sl_P}$ e analogamente, per le funzioni circolari cost e sent , (dove P , in questo caso, è il punto d'intersezione del secondo lato dell'angolo α con la circonferenza goniometrica).

Si dimostra inoltre che, al variare di P sul ramo dell'iperbole, t assume tutti i valori reali. Infatti, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx$ diverge a $+\infty$,

pertanto l'area della regione piana illimitata che si trova nel primo quadrante tra la retta di equazione $y = x$ e il ramo dell'iperbole (nell'intervallo $[1; +\infty[$) è

infinita e quindi $t = 2 \left(\frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx \right) = +\infty$; da ciò possiamo dedurre che t varia

(nella parte di piano delimitata dagli asintoti dell'iperbole nel semipiano delle ascisse non negative) nell'intervallo $]-\infty; +\infty[$ e cioè che il dominio delle funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico è $D =]-\infty; +\infty[$.

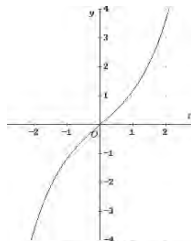


Grafico della funzione $y = \text{Senht}$

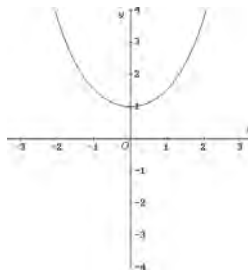


Grafico della funzione $y = \text{Cosht}$

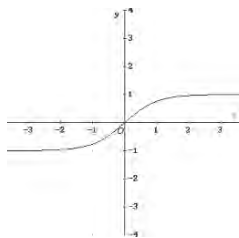


Grafico della funzione $y = \text{Tght}$

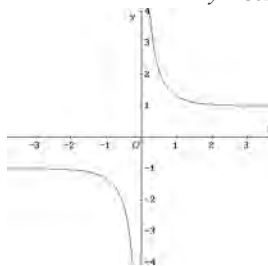


Grafico della funzione $y = \text{Ctghht}$

2. Analogie tra le relazioni che legano le funzioni circolari e quelle corrispondenti che legano le funzioni iperboliche

Nella tabella che segue, partendo da alcune delle relazioni che intercorrono tra le funzioni circolari di variabile reale t , consideriamo le stesse relazioni che devono intercorrere tra le funzioni circolari di variabile immaginaria it e, tenendo presente le (6), le corrispondenti tra le funzioni iperboliche; ovviamente, le analogie tra le relazioni che legano le funzioni circolari in R e quelle tra le corrispondenti funzioni iperboliche sono evidenti, come si vede dalla prima e dalla terza colonna della tabella che segue, in cui, come esempio, ne sono riportate alcune:

TABELLA 1

Funzioni circolari di variabile reale	Funzioni circolari di variabile immaginaria	Funzioni iperboliche
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$	$\cos^2 it + \sin^2 it = 1$	$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$
$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$	$\cos 2it = \cos^2 it - \sin^2 it$	$\cosh^2 t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$
$\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$	$\sin 2it = 2 \sin it \cdot \cos it$	$\sinh^2 t = \frac{\sin^2 it}{i} = \frac{1}{i} 2 \sin it \cdot \cos it = 2 \sinh t \cdot \cosh t$
$\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$	$\operatorname{tg} 2it = \frac{2 \operatorname{tg} it}{1 - \operatorname{tg}^2 it}$	$\operatorname{Tgh} 2t = \frac{\sinh 2t}{\cosh 2t} = \frac{2 \sinh t \cdot \cosh t}{\cosh^2 t + \sinh^2 t} = \frac{2 \operatorname{Tgh} t}{1 + \operatorname{Tgh}^2 t}$
$\cos(s \pm t) = \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t$	$\cos(is \pm it) = \cos is \cdot \cos it \mp \sin is \cdot \sin it$	$\cosh(s \pm t) = \cosh s \cosh t \pm \sinh s \sinh t$
$\sin(s \pm t) = \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t$	$\sin(is \pm it) = \sin is \cdot \cos it \pm \cos is \cdot \sin it$	$\sinh(s \pm t) = \frac{1}{i} \sin(is \pm it) = \sinh s \cdot \cosh t \pm \cosh s \cdot \sinh t$
$\sin \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$	$\sin \frac{it}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos it}{2}}$	$\sinh \frac{t}{2} = \frac{1}{i} \sin \frac{it}{2} = \pm \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1 - \cos it}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}}$
$\cos \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}$	$\cos \frac{it}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos it}{2}}$	$\cosh \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t + 1}{2}}^{(*)}$

(*) Il coseno iperbolico è sempre ≥ 1 .

Ugualmente sono evidenti le analogie tra le corrispondenti regole di derivazione e d'integrazione, come si vede dalla prima e dalla terza colonna della tabella che segue, in cui, come esempio, ne sono riportate alcune:

TABELLA 2

Funzioni circolari di variabile reale	Funzioni circolari di variabile immaginaria	Funzioni iperboliche
$D[\text{sent}] = \cos t$	$D_t[\text{senit}] = i \cos it$	$D[\text{Senht}] = D_t\left[\frac{\text{senit}}{i}\right] = \frac{1}{i} i \cos it = \text{Cosht}$
$D[\cos t] = -\text{sent}$	$D_t[\cos it] = -i \text{senit}$	$D[\text{Cosht}] = -i \cdot i \text{Senht} = \text{Senht}$
$D[\text{tgt}] = \frac{1}{\cos^2 t}$	$D_t[\text{tgit}] = \frac{i}{\cos^2 it}$	$D[\text{Tght}] = D_t\left[\frac{1}{i} \text{tgit}\right] = \frac{1}{i} \frac{i}{\cos^2 it} = \frac{1}{\text{Cosh}^2 t}$
$D[\text{ctgt}] = -\frac{1}{\text{sen}^2 t}$	$D_t[\text{ctgit}] = -\frac{i}{\text{sen}^2 it}$	$D[\text{Ctght}] = D_t[i \cdot \text{ctgit}] = i \cdot \left(-\frac{i}{\text{sen}^2 it}\right) = \frac{1}{i^2 \text{Senh}^2 t} = -\frac{1}{\text{Senh}^2 t}$
$\int \text{sents} dt = -\cos t + c$	$\int \text{senit} dt = -\frac{\cos it}{i} + c$	$\int \text{Senht} dt = -\frac{\text{Cosht}}{i^2} + c = \text{Cosht} + c$
$\int \cos t dt = \text{sent} + c$	$\int \cos it dt = \frac{\text{senit}}{i} + c$	$\int \text{Cosht} dt = \frac{i \text{Senht}}{i} + c = \text{Senht} + c$
$\int \text{tgt} dt = -\ln \cos t + c$	$\int \text{tgit} dt = -\frac{\ln \cos it }{i} + c$	$\int \text{Tght} dt = \int \frac{1}{i} \text{tgit} dt = \ln \text{Cosht} + c = \ln \text{Cosht} + c$
$\int \text{ctgt} dt = \ln \text{sent} + c$	$\int \text{ctgit} dt = \frac{\ln \text{senit} }{i} + c$	$\int \text{Ctght} dt = \int i \cdot \text{ctgit} dt = \ln i \cdot \text{Senht} + c = \ln \text{Senht} + c$

(nella seconda colonna, le derivate e gli integrali delle funzioni goniometriche di variabile immaginaria it sono calcolati rispetto alla variabile reale t , pertanto l'unità immaginaria i viene trattata come una costante; si suppone che siano ancora valide le regole di derivazione e di integrazione e le proprietà delle derivate e degli integrali valide in $\mathbb{R}$).

3. Le funzioni iperboliche goniometriche

Le funzioni iperboliche, diversamente da quelle circolari, non sono periodiche e presentano una strana asimmetria: mentre la funzione Senht ha come codominio $C =]-\infty; +\infty[$, la funzione Cosht ha come codominio $C = [1; +\infty[$.

Abbiamo visto che le funzioni circolari possono essere considerate indifferentemente come funzioni della misura (in radianti) dell'angolo α o della variabile t (doppio dell'area del settore circolare individuato dall'angolo α nel cerchio goniometrico). Ovviamente, se indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dai lati dall'angolo α (con $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$) e dal ramo dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$, ciò non si verifica per le funzioni iperboliche.

In quanto segue, definiremo nuovamente le funzioni iperboliche non più come funzioni di t , ma come funzioni di un angolo α ; per distinguerle dalle funzioni iperboliche di variabile t , le chiameremo funzioni iperboliche goniometriche. Esse risulteranno, come le funzioni circolari, periodiche; inoltre le funzioni seno iperbolico goniometrico e coseno iperbolico goniometrico (che indicheremo con $\operatorname{Senhg}\alpha$ e $\operatorname{Coshg}\alpha$) avranno entrambe codominio $C =]-\infty; +\infty[$.

Come per le funzioni circolari goniometriche, le funzioni iperboliche goniometriche saranno funzioni dell'angolo orientato α avente come primo lato il semiasse non negativo dell'asse delle ascisse.

Consideriamo le due iperboli equilatera di equazioni $|x^2 - y^2| = 1$ e pensiamo il piano cartesiano formato dagli ottanti delimitati dagli assi cartesiani e dagli asintoti $y = \pm x$ di tali iperboli.

Dato l'angolo orientato $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, sia $P(X_p; Y_p)$ il punto d'intersezione del secondo lato con uno dei due rami dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ (se $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o se $\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$) o dell'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ (se $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ o se $\frac{5}{4}\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$).

Analogamente alle funzioni goniometriche circolari $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, definiremo le funzioni iperboliche goniometriche $\operatorname{Coshg}\alpha$ e $\operatorname{Senhg}\alpha$ rispettivamente come

l'ascissa e l'ordinata del punto P :

$$\text{Cosh}\alpha = X_p \quad \text{Senh}\alpha = Y_p$$

(quindi, se $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\text{Cosh}\alpha = \text{Cos}t$ e $\text{Senh}\alpha = \text{Sen}t$ e quindi $\text{Tgh}\alpha = \text{Tgt}$ con $t = 2A_{sl(\alpha)}$).

Ovviamente, nel dominio di $\text{tg}\alpha$, per ogni $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, è $\text{tg}\alpha = \text{Tgh}\alpha$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $\text{Cosh}\alpha$ e $\text{Senh}\alpha$ non esistono ma, essendo:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \text{Tgh}\alpha = 1 \quad \text{per ogni } k \text{ intero pari}$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \text{Tgh}\alpha = -1 \quad \text{per ogni } k \text{ intero dispari},$$

possiamo porre $\text{Tgh}\alpha = 1 \quad \forall \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con k intero pari e $\text{Tgh}\alpha = -1$

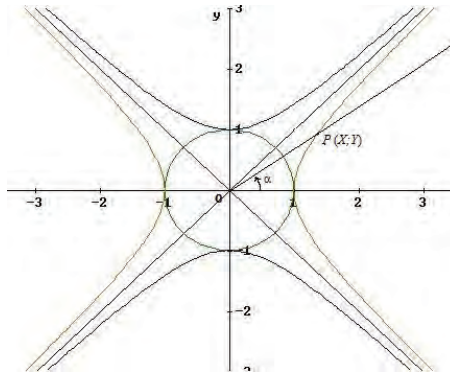
$\forall \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con k intero dispari.

Risulterà pertanto $\text{Tgh}\alpha = \text{tg}\alpha \quad \forall \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Di seguito ci proponiamo di trovare le relazioni che intercorrono tra le funzioni iperboliche e le funzioni iperboliche goniometriche e tra valori corrispondenti delle variabili t e α .

Sia α un angolo orientato del primo o dell'ottavo ottante ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ oppure

$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < 0$ con $k \in \mathbb{Z}$); indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dai lati dell'angolo α e dal ramo dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$ ($t > 0$ se $\alpha > 0$, $t < 0$ se $\alpha < 0$).



$$t = 2A_{SI(\alpha)}$$

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ Y_P = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$:

$$\operatorname{Cosh} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \operatorname{Senh} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

In base alle definizioni di $\operatorname{Cosh} t$ e di $\operatorname{Senh} t$ viste nel paragrafo 2., risulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Tgh} \alpha = \operatorname{Tgh} t = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad (\text{con } t = 2A_{SI(\alpha)} > 0 \text{ nel primo ottante e } t = 2A_{SI(\alpha)} < 0 \text{ nell'ottavo ottante}) \text{ da cui:}$$

$$t = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}} \quad \text{e} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Negli altri ottanti, indicheremo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dal semiasse cartesiano che delimita l'ottante, dal secondo lato dell'angolo α e dal ramo d'iperbole che attraversa l'ottante considerato; per ognuno di tali settori iperbolici, l'angolo che lo individua avrà come primo lato il

semiasse cartesiano che delimita l'ottante e tale angolo sarà considerato, come di consueto, positivo se è orientato in senso antiorario (in tal caso la sua area sarà positiva), negativo se è orientato in senso orario (in tal caso la sua area sarà negativa); determiniamo il settore iperbolico del primo o dell'ottavo ottante equivalente al settore iperbolico considerato, avente quindi anch'esso area $\frac{t}{2}$, individuato da un opportuno angolo avente come primo lato il semiasse non negativo delle ascisse ($\forall t \in]-\infty; +\infty[$, esiste un angolo compreso nell'intervallo $\left] -\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4} \right[$ a cui corrisponde un settore iperbolico avente come area $\frac{t}{2}$; ovviamente, a partire da tale angolo, ne esistono infiniti altri a cui corrispondono settori iperboliche tutti di area $\frac{t}{2}$ che si ottengono aggiungendo a questo un multiplo intero di $\frac{\pi}{2}$).

Sia α un angolo orientato del secondo ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dal secondo lato dell'angolo α , dall'asse y e dal ramo dell'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ con $y \geq 1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso orario sarà pertanto $t < 0$).

Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (situato nell'ottavo ottante) e dal ramo d'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$ ($t = 2A_{st\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} < 0$).

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = tg \alpha \cdot x \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = \frac{1}{\sqrt{tg^2 \alpha - 1}} \\ Y_P = \frac{tg \alpha}{\sqrt{tg^2 \alpha - 1}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$Cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2 \alpha - 1}} \quad Senh \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{tg^2 \alpha - 1}}.$$

Ovviamente è:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{Ctghg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{Ctght} = -\frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}} = -\ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}} \quad \text{e}$$

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arccctg} \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Sia α un angolo orientato del terzo ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dall'asse y , dal secondo lato dell'angolo α e dal ramo dell'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ con $y \geq 1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso antiorario sarà pertanto $t > 0$).

Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (situato nel primo ottante) e dal ramo d'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{con } x \geq 1 \quad \left(t = 2A_{sl\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} > 0 \right).$$

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}} \\ Y_P = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi \right]$:

$$\operatorname{Coshg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}} \quad \operatorname{Senhg} \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}}.$$

Ovviamente è:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{Ctghg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{Ctght} = -\frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}} = -\ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}} \quad \text{e}$$

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcctg} \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Sia α un angolo orientato del quarto ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dal secondo lato dell'angolo α , dall'asse x e dal ramo dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ con $x \leq -1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso orario sarà pertanto $t < 0$).

Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \pi$ (situato nell'ottavo ottante) e dal ramo d'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$ ($t = 2A_{SI(\alpha - \pi)} < 0$).

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = -\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ Y_P = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] \frac{3}{4}\pi; \pi \right]$:

$$\operatorname{Coshg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \operatorname{Senhg} \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Ovviamente è:

$$tg\alpha = tg(\alpha - \pi) = Tghg(\alpha - \pi) = Tght = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}} \quad e$$

$$\alpha - \pi = arctg \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \pi + arctg \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Sia α un angolo orientato del quinto ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dall'asse x , dal secondo lato dell'angolo α e dal ramo dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ con $x \leq -1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso antiorario sarà pertanto $t > 0$).

Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \pi$ (situato nel primo ottante) e dal ramo d'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$ ($t = 2A_{SI(\alpha - \pi)} > 0$).

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = tg\alpha \cdot x \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = -\frac{1}{\sqrt{1 - tg^2\alpha}} \\ Y_P = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{1 - tg^2\alpha}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] \pi; \frac{5}{4}\pi \right[$:

$$Coshg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 - tg^2\alpha}} \quad Senhg\alpha = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{1 - tg^2\alpha}}.$$

Ovviamente è:

$$tg\alpha = tg(\alpha - \pi) = Tghg(\alpha - \pi) = Tght = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}} \quad e$$

$$\alpha - \pi = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \pi + \operatorname{arctg} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Sia α un angolo orientato del sesto ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dal secondo lato dell'angolo α , dall'asse y e dal ramo dell'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ con $y \leq -1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso orario sarà pertanto $t < 0$).

Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \frac{3}{2}\pi$ (situato nell'ottavo ottante) e dal ramo d'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq -1$ $\left(t = 2A_{Sl\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)} < 0 \right)$.

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo le coordinate del punto P :

$$\begin{cases} y = tg\alpha \cdot x \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = -\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \\ Y_P = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] \frac{5}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi \right[$:

$$\operatorname{Coshg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \quad \operatorname{Senhg}\alpha = -\frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}}.$$

Ovviamente è:

$$tg\alpha = -ctg\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -Ctghg\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -Ctght = -\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{tg\alpha - 1}{tg\alpha + 1}} = -\ln \sqrt{\frac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}} \quad e$$

$$\alpha - \frac{3}{2}\pi = \operatorname{arccctg} \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctg} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Sia α un angolo orientato del settimo ottante; indichiamo con t il doppio dell'area del settore iperbolico delimitato dall'asse y , dal secondo lato dell'angolo α e dal ramo dell'iperbole $y^2 - x^2 = 1$ con $y \leq -1$ (in tal caso, l'angolo che individua il settore iperbolico è orientato in senso antiorario sarà pertanto $t > 0$). Ovviamente il settore iperbolico considerato è uguale a quello individuato dall'angolo $\alpha - \frac{3}{2}\pi$ (situato nel primo ottante) e dal ramo d'iperbole di

$$\text{equazione } x^2 - y^2 = 1 \text{ con } x \geq -1 \left(t = 2A_{St\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)} > 0 \right).$$

Intersecando il secondo lato dell'angolo con il ramo considerato dell'iperbole, otteniamo:

$$\begin{cases} y = tg\alpha \cdot x \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_P = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \\ Y_P = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \end{cases}$$

Definiamo pertanto, in $\left] \frac{3}{2}\pi; \frac{7}{4}\pi \right[$:

$$Coshg\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}} \quad Senhg\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha - 1}}.$$

Ovviamente è:

$$tg\alpha = -ctg\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -Ctghg\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -Ctght = -\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$$

da cui:

$$t = \ln \sqrt{\frac{tg\alpha - 1}{tg\alpha + 1}} = -\ln \sqrt{\frac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}} \quad e$$

$$\alpha - \frac{3}{2}\pi = \operatorname{arccctg} \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} = \operatorname{arctg} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctg} \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Riepilogando, sarà quindi:

- se il secondo lato di α è nel I o nel IV quadrante

$$Coshg\alpha = + \frac{1}{\sqrt{|1-tg^2\alpha|}} \quad e \quad Senhg\alpha = + \frac{tg\alpha}{\sqrt{|1-tg^2\alpha|}}$$

- se il secondo lato di α è nel II o nel III quadrante

$$Coshg\alpha = - \frac{1}{\sqrt{|1-tg^2\alpha|}} \quad e \quad Senhg\alpha = - \frac{tg\alpha}{\sqrt{|1-tg^2\alpha|}}.$$

Per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in Z$, $tg\alpha$ non esiste, ma $Coshg\alpha$ e $Senhg\alpha$ esistono e risulta:

$$Coshg\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad Senhg\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1 \quad (+1 \text{ per } k \text{ pari e } -1 \text{ per } k \text{ dispari}).$$

Avendo posto $Tghg\alpha = \pm 1$ per $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in Z$, sarà, come abbiamo già

visto, $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in Z$, $Tghg\alpha = tg\alpha$.

Per qualunque angolo α risulta:

- nel primo e nell'ottavo ottante (con $t = 2A_{SI(\alpha)}$)

$$\text{Cosh}\alpha = \text{Cosht} = \cos\alpha \quad \text{Senh}\alpha = \text{Senht} = \sin\alpha \quad \text{Tgh}\alpha = \text{Tght} = \tan\alpha;$$

- nel secondo e nel terzo ottante (con $t = 2A_{SI\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$)

$$\text{Cosh}\alpha = -\text{Senht} = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Senh}\alpha = \text{Cosht} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Tgh}\alpha = -\text{Cght} = -\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\alpha;$$

- nel quarto e nel quinto ottante (con $t = 2A_{SI(\alpha - \pi)}$)

$$\text{Cosh}\alpha = -\text{Cosht} = -\cos(\alpha - \pi) \quad \text{Senh}\alpha = -\text{Senht} = -\sin(\alpha - \pi) \quad \text{Tgh}\alpha = \text{Tght} = \tan(\alpha - \pi) = \tan\alpha;$$

- nel sesto e nel settimo ottante (con $t = 2A_{SI\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}$)

$$\text{Cosh}\alpha = \text{Senht} = \sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \quad \text{Senh}\alpha = -\text{Cosht} = -\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \quad \text{Tgh}\alpha = -\text{Cght} = -\cot\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = \tan\alpha.$$

Inoltre, per qualunque angolo α , risulta:

$$t = \ln \sqrt{\frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1}} \quad \text{se il secondo lato di } \alpha \text{ è nel I o VIII o nel IV o V ottante } (|\tan\alpha| < 1); \quad (7)$$

$$t = -\ln \sqrt{\frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1}} \quad \text{se il secondo lato di } \alpha \text{ è nel II o III o nel VI o VII ottante } (|\tan\alpha| > 1).$$

Viceversa, per ogni $t \in]-\infty; +\infty[$, sarà:

$$\alpha = \arctg \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \arctg \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[.$$

Ad ogni α corrisponde un solo valore di t , invece, ad ogni t , corrispondono infiniti valori di α (in ogni angolo giro, ci sono 4 angoli corrispondenti a ogni valore di t).

Quando $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, riportandoci per $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ da sinistra a un angolo del primo ottante e per $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ da destra a un angolo dell'ottavo ottante, si vede che $t \rightarrow +\infty$ se $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ da sinistra e $t \rightarrow -\infty$ se $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ da destra (coerentemente con le (7)).

Ovviamente, le funzioni $\text{Senh}gx$ e $\text{Cosh}gx$ sono, come le corrispondenti funzioni circolari, periodiche di periodo 2π e hanno entrambe dominio $D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ e codominio $C =]-\infty; +\infty[$.

Inoltre $\text{Senh}gx$, come $\text{sen}x$, è una funzione dispari, $\text{Cosh}gx$, come $\cos x$, è una funzione pari, $\text{Tgh}gx$, come $\text{tg}x$, è una funzione dispari; inoltre, come per le corrispondenti funzioni circolari $\text{sen}x$ e $\cos x$, il grafico della funzione $\text{Senh}gx$ si ottiene traslando di vettore $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ il grafico della funzione $\text{Cosh}gx$.

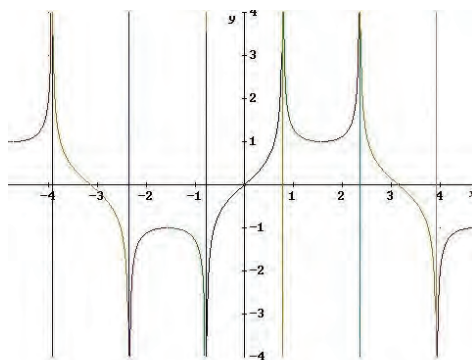
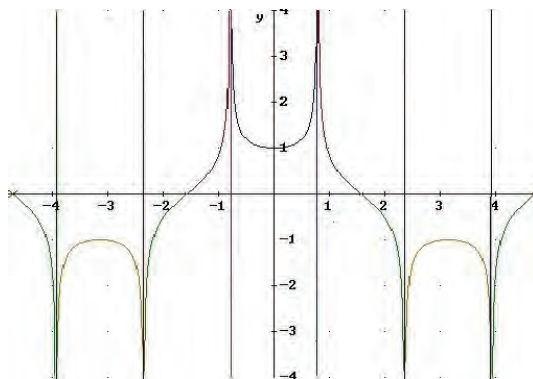


Grafico della funzione $y = \text{Senh}gx$

Grafico della funzione $y = \text{Cosh}gx$

Mentre le funzioni Senht e Cosht sono definite e continue in tutto R , le funzioni $\text{Senh}gx$ e $\text{Cosh}gx$ sono quindi, come già osservato, definite in $D = \left\{ x \in R / x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$ e presentano infiniti punti di discontinuità di seconda specie.

Evidentemente, i valori che assume la funzione $\text{Cosh}gx$ quando x varia in $\left] -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[$ sono gli stessi che assume la funzione Cosht quando t varia in $] -\infty; +\infty[$ cioè variano in $[1; +\infty[$ con $\text{Cosh}gx$ uguale a 1 per $x=0$ e che tende a $+\infty$ quando x a tende a $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ da destra o a $+\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ da sinistra.

Uguualmente, i valori che assume la funzione $\text{Senh}gx$ quando x varia in $\left] -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[$ sono gli stessi che assume la funzione Senht quando t varia in $] -\infty; +\infty[$ cioè variano in $] -\infty; +\infty[$ con $\text{Senh}gx$ uguale a 0 per $x=0$ e che tende a $-\infty$ quando x a tende a $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ da destra e a $+\infty$ quando x a tende a $+\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ da sinistra.

La funzione iperbolica goniometrica $y = Tghgx$, come abbiamo già visto, coincide con la funzione circolare goniometrica $y = tgx$ (abbiamo posto

$$Tghg\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = +1 \quad \text{per ogni } k \text{ pari} \quad \text{e} \quad Tghg\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{per ogni } k$$

dispari).

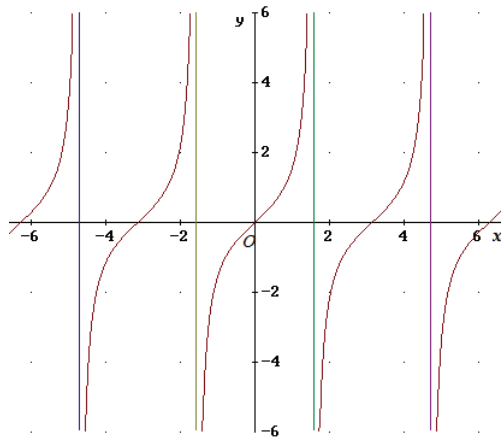


Grafico della funzione $y = Tghgx$

Ovviamente (essendo P un punto di una delle due iperboli di equazioni $|x^2 - y^2| = 1$), $\forall \alpha \in D$, risulta:

$$|Coshg^2 \alpha - Senhg^2 \alpha| = 1 \quad (8).$$

Nel primo e nell'ottavo ottante, $tg\alpha = Tghg\alpha = Tght$ con $t = 2A_{SI(\alpha)}$, quindi:

$$Coshg\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - Tgh^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}}} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\text{Senhg}\alpha = \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1-\text{tg}^2\alpha}} = \frac{\text{Tght}}{\sqrt{1-\text{Tgh}^2t}} = \frac{\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)^2}} = \frac{\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}}{\sqrt{\frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Negli altri ottanti, ci riportiamo sempre a un angolo del primo o dell'ottavo ottante.

Nel secondo ottante:

$$\begin{aligned} \text{Coshg}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ctgh}^2t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\right)^2 - 1}} = \frac{e^{-t} - e^t}{2} = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \text{Senhg}\alpha &= \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha - 1}} = \frac{-\text{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\text{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 1}} = \frac{-\text{Ctght}}{\sqrt{\text{Ctgh}^2t - 1}} = \frac{-\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}}{\sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\right)^2 - 1}} = -\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \cdot \frac{-(e^t - e^{-t})}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

($\alpha - \frac{\pi}{2}$ è un angolo dell'ottavo ottante; essendo $t < 0$, sarà $e^t - e^{-t} < 0$).

Procedendo allo stesso modo in tutti gli ottanti, $\forall \alpha \in D$, sarà:

$$|\text{Coshg}\alpha| = \frac{e^t \pm e^{-t}}{2} \quad |\text{Senhg}\alpha| = \frac{e^t \mp e^{-t}}{2} \quad (9)$$

da cui

$$|\text{Coshg}\alpha| + |\text{Senhg}\alpha| = e^t \quad (10).$$

Per le funzioni circolari, $\alpha^{rad} = t$, con $t = 2A_{SC(\alpha)}$, quindi le relazioni:

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{sen} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

e la formula di Eulero:

$$\cos \alpha + i \text{sen} \alpha = e^{i\alpha},$$

se α è espresso in radianti, possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\cos \alpha = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{sen} \alpha = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

e:

$$\cos \alpha + i \text{sen} \alpha = e^{it}$$

che presentano qualche analogia con le relazioni (9) e (10), così come la relazione fondamentale tra seno e coseno di uno stesso angolo presenta qualche analogia con la relazione (8).

AREE SCIENTIFICO-DISCIPLINARI

AREA 01 – Scienze matematiche e informatiche

AREA 02 – Scienze fisiche

AREA 03 – Scienze chimiche

AREA 04 – Scienze della terra

AREA 05 – Scienze biologiche

AREA 06 – Scienze mediche

AREA 07 – Scienze agrarie e veterinarie

AREA 08 – Ingegneria civile e architettura

AREA 09 – Ingegneria industriale e dell'informazione

AREA 10 – Scienze dell'antichità, filologico-letterarie e storico-artistiche

AREA 11 – Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche

AREA 12 – Scienze giuridiche

AREA 13 – Scienze economiche e statistiche

AREA 14 – Scienze politiche e sociali

AREA 15 – Scienze teologico-religiose

Il catalogo delle pubblicazioni di Aracne editrice è su

www.aracneeditrice.it

Finito di stampare nel mese di dicembre del 2019
dalla tipografia «The Factory S.r.l.»
00134 Roma – via Tiburtina, 912
per conto della «Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale» di Canterano (RM)