Aoi

Vai al contenuto multimediale

Carmen Carano

Logaritmi e potenze nell'insieme dei numeri complessi

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVIII
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1991-4

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento anche parziale, con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.

Non sono assolutamente consentite le fotocopie senza il permesso scritto dell'Editore.

I edizione: novembre 2018

Indice

7 Capitolo I

Dalla formula di Eulero al logaritmo in C

1.1. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero reale negativo, 10 – 1.2. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero immaginario, 10 – 1.3. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero complesso (diverso da 0), 11 – 1.4. Calcolo in C del logaritmo con base complessa *w* (diversa da 0 e da 1) di un numero complesso *u* (diverso da 0), 12

13 Capitolo II

Calcolo delle potenze in C

2.1. Calcolo di $u=e^z$ con $z=f+ig$, 13 – 2.2 Calcolo di $(c+id)^{f+ig}$, 14 – 2.3 Formula di De Moivre come caso particolare della formula (2), 17 – 2.4. Calcolo della radice *n-esima* di un numero complesso, 17 – 2.5 La radice *n-esima* in R come caso particolare della radice *n-esima* in C, 18 – 2.5.1. Radici quadrate in R, 18 – 2.5.2. Radici cubiche in R, 20

Logaritmi e Potenze nell'insieme dei Numeri Complessi

Sulla questione della polidromia

Carmen Carano[1]

Sunto

In questo articolo, partendo dalla formula di Eulero, si arriva alla formula per il calcolo del logaritmo e da questa a quella per il calcolo della potenza in C, affrontando contestualmente la questione della polidromia e verificando come tali operazioni, con opportune restrizioni, siano del tutto coerenti con la formula di De Moivre e con le operazioni di logaritmo e di potenza (e quindi anche di radice n–esima) in R, risultando pertanto una naturale estensione delle stesse da R a C.

1. Dalla formula di Eulero al logaritmo in C

Come è noto, a partire dalla formula di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + isenx,$$

[1] ITST "G. Marconi" – Campobasso. e–mail: c.carano@tiscali.it.

si ottiene la definizione di logaritmo (e da questa, come vedremo nel paragrafo **2.**, quella di potenza) nell'insieme dei numeri complessi.

Per arrivare alla definizione di logaritmo in C, dovremo passare dalla formula di Eulero $e^{ix} = \cos x + isenx$, alla $ix = \ln(\cos x + isenx)$.

Di fatto ciò significa passare dalla funzione $u(x) = e^{ix}$ (complessa di variabile reale), alla sua inversa $x(u) = (1/i) \cdot \ln u$ (reale di variabile complessa: $\forall x \in R$, quindi, $(\ln(\cos x + isenx))/i \in R$).

Affinché una funzione sia invertibile, deve essere biunivoca, ma $u(x)$ ha come dominio tutto R (il suo codominio è invece l'insieme dei numeri complessi rappresentati, nel piano di Gauss, dagli infiniti punti della circonferenza di centro O e raggio unitario) ed è periodica[2] (di periodo 2π), pertanto sicuramente non biunivoca. Per renderla invertibile bisognerà restringere il suo dominio a un insieme all'interno del quale abbia ancora lo stesso codominio e risulti biunivoca. Si vede facilmente che basterà considerare come dominio della $u(x)$ un qualunque intervallo di ampiezza pari al suo periodo[3].

[2] Due funzioni, una l'inversa dell'altra, hanno dominio e codominio che si invertono, pertanto se una delle due è periodica e quindi assume lo stesso valore in corrispondenza di infiniti valori della variabile indipendente, l'inversa (se non operiamo un opportuno restringimento del dominio) assume per ogni valore assegnato dell'argomento, infiniti valori.

[3] La $u(x)$, definita da *D* al suo codominio, è ovviamente suriettiva. Affinché sia anche iniettiva dobbiamo restringere *D* in modo che a valori diversi della variabile indipendente x corrispondano valori diversi della $u(x)$ e quindi in modo che $u(x_1) = u(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\cos x_1 + isenx_1 = \cos x_2 + isenx_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x_1 = \cos x_2 \\ senx_1 = senx_2 \end{cases}$$ cioè:

$$((x_1 = x_2 + 2k\pi) \vee (x_1 = -x_2 + 2k\pi)) \wedge (x_1 = x_2 + 2h\pi) \vee (x_1 = \pi - x_2 + 2h\pi)) \; \forall k, h \in Z$$

$\forall k, h \in Z$ e si vede facilmente che ciò si verifica $\Leftrightarrow x_1 = x_2 + 2m\pi \;\; \forall m \in Z$.

Consideriamo d'ora in poi la restrizione del dominio della $u(x)$ all'intervallo $D_R = [0;2\pi[$[4]; i punti del piano di Gauss che rappresentano il codominio della funzione, descriveranno una sola volta la circonferenza di centro O e raggio unitario e si potrà quindi considerare la funzione inversa della $u(x)$, cioè la funzione $x(u) = (1/i) \cdot \ln u$.

In quanto segue, applicheremo il principio di permanenza delle proprietà formali di Hankel e quindi, per arrivare alle definizioni di logaritmo e di potenza in C, supporremo che permangano le proprietà di tali operazioni, valide in R, anche nel campo complesso (le proprietà delle potenze e, da queste, le proprietà e la formula del cambiamento di base dei logaritmi).

Dalla formula di Eulero con dominio D_R, si ottiene:

$$ix = \ln(\cos x + isenx)$$

[4] Scegliendo $D_R = [0;2\pi[$, il codominio della $u(x)$, e quindi il dominio della funzione inversa $x(u)$, sarà costituito dai numeri complessi di modulo 1 e argomento anch'esso variabile in $[0;2\pi[$, mentre il codominio della funzione inversa sarà ovviamente $C_I = D_R = [0;2\pi[$.

Scegliendo $D_R = [p;q[$, sempre di ampiezza 2π, il codominio della $u(x)$, e quindi il dominio della $x(u)$, sarà costituito dai numeri complessi di modulo 1 e argomento variabile in $[p;q[$(rappresentati nel piano di Gauss dagli infiniti punti della circonferenza goniometrica, presi una sola volta) mentre il codominio della funzione inversa sarà ovviamente $C_I = D_R = [p;q[$; al variare del restringimento del dominio, operato affinché la funzione risulti invertibile, quindi, varierà anche il codominio della funzione inversa.

Questo è equivalente a ciò che succederebbe se, per esempio, per invertire la funzione seno, si restringesse il suo dominio non come convenzionalmente si fa all'intervallo $[-\pi/2;\pi/2]$, ma ad un altro intervallo in cui tale funzione sia biunivoca, per esempio all'intervallo $[\pi/2;(3/2)\pi]$; ovviamente in tal caso il codominio dell'arcoseno sarebbe $[\pi/2;(3/2)\pi]$.

Ritornando al nostro caso, scegliendo di restringere il dominio in modi diversi, il codominio della funzione u(x), pur rimanendo, per la periodicità della funzione, sempre lo stesso insieme di numeri complessi, sarà costituito da numeri complessi con lo stesso modulo ma con argomenti diversi: tali argomenti saranno variabili proprio nell'intervallo $D_R = [p;q[$ di ampiezza 2π in cui abbiamo ristretto il dominio.

da cui, per $x = \pi$, si ha:

$$\ln(-1) = i\pi \qquad (1)$$

L'uguaglianza (1) permette, come è noto, di estendere l'operatore logaritmo definito in R (con argomento positivo e base positiva e diversa da 1), al logaritmo definito in C (con argomento diverso da 0 e base diversa da 0 e da 1).

1.1. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero reale negativo

Calcoliamo, per esempio, ln(–3):

$$\ln(-3) = \ln(3) + \ln(-1) = \ln(3) + i\pi$$

In generale, per un generico $a < 0$, risulterà:

$$\ln(a) = \ln|a| + \ln(-1) = \ln|a| + i\pi$$

e, per una base c (con $c \in R^+, c \neq 1$):

$$\log_c a = \frac{1}{\ln c}(\ln|a| + \ln(-1)) = \frac{1}{\ln c}(\ln|a| + i\pi)$$

1.2. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero immaginario

Calcoliamo, per esempio, $\ln(3i)$ e $\ln(-3i)$:

$$\ln(3i) = \ln 3 + \ln i = \ln 3 + \ln(\sqrt{-1}) = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}$$

e:

$$\ln(-3i) = \ln(-1) + \ln 3 + \ln i = i\pi + \ln 3 + i\frac{\pi}{2} = \ln 3 + i\frac{3}{2}\pi$$

In generale:

- se $b > 0$

$$\ln(bi) = \ln b + i\frac{\pi}{2}$$

- se $b < 0$

$$\ln(bi) = \ln|b| + i\frac{3}{2}\pi$$

e per una base c (con $c \in R^+, c \neq 1$):

- se $b > 0$

$$\log_c(bi) = \frac{1}{\ln c}\left(\ln b + i\frac{\pi}{2}\right)$$

- se $b < 0$

$$\log_c(bi) = \frac{1}{\ln c}\left(\ln|b| + i\frac{3}{2}\pi\right)$$

1.3. Calcolo in C del logaritmo con base reale (positiva e diversa da 1) di un numero complesso (diverso da 0)

Consideriamo il generico numero complesso non nullo $u = a + ib$ $(a, b \in R)$, di modulo ρ e argomento α e quindi avente forma trigonometrica $u = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$[5].

Per la formula di Eulero è:

$$u = \rho(\cos\alpha + isen\alpha) = \rho e^{i\alpha}$$

pertanto sarà:

$$\ln u = \ln(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)) = \ln\rho + \ln e^{i\alpha}$$

e, per quanto detto in precedenza, per poter calcolare $\ln e^{i\alpha}$, dovremo far variare

[5] Con $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = arctg(b/a)$ se $a > 0$, $\alpha = arctg(b/a) + \pi$ se $a < 0$.

α in un intervallo di ampiezza 2π, per esempio in $[0;2\pi[$[6].

Avremo quindi:

$$\ln u = \ln(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)) = \ln\rho + i\alpha$$

in cui $\alpha \in [0;2\pi[$[7].

Per una generica base c *(con* $c \in R^+, c \neq 1$):

$$\log_c(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)) = \frac{1}{\ln c}(\ln\rho + \ln(\cos\alpha + isen\alpha)) = \frac{1}{\ln c}(\ln\rho + i\alpha)$$

sempre con $\alpha \in [0;2\pi[$.

1.4. Calcolo del logaritmo con base complessa w (diversa da 0 e da 1) di un numero complesso u (diverso da 0)

Considerati $w = c + id \in C - \{0,1\}$ e $u = a + ib \in C - \{0\}$, di coordinate polari rispettivamente (ρ_1, α_1) e (ρ_2, α_2), sarà:

$$\log_{c+di}(a+ib) = \frac{\ln(a+ib)}{\ln(c+id)} = \frac{\ln(\rho_1(\cos\alpha_1 + isen\alpha_1))}{\ln(\rho_2(\cos\alpha_2 + isen\alpha_2))} = \frac{\ln\rho_1 + \ln e^{i\alpha_1}}{\ln\rho_2 + \ln e^{i\alpha_2}}$$

Come nel sottoparagrafo **1.3.**, per poter calcolare $\ln e^{i\alpha_1}$ e $\ln e^{i\alpha_2}$, bisogna far variare α_1 e α_2 in intervalli di ampiezza 2π (non necessariamente uguali), per esempio in $[0;2\pi[$.

[6] Se non operassimo tale restrizione sull'intervallo in cui far variare α, sarebbe ovviamente come se calcolassimo, per esempio, $\arcsin(sen\alpha)$ senza aver ristretto opportunamente il dominio della funzione seno, e quindi il codominio della funzione arcoseno, a un intervallo in cui tale funzione è invertibile, ottenendo pertanto $\arcsin(sen\alpha) = \alpha + 2k\pi \ \ \forall k \in Z$, cioè si avrebbero infiniti valori, come per l'inversa di una qualunque funzione periodica.

[7] Quindi, come è noto, il logaritmo naturale di un numero complesso di modulo ρ e argomento α è un numero complesso avente parte reale $\ln\rho$ e coefficiente dell'unità immaginaria α.

Avremo quindi la seguente formula generale per il calcolo del logaritmo in C:

$$\log_{c+id}(a+ib) = \frac{\ln \rho_1 + i\alpha_1}{\ln \rho_2 + i\alpha_2} \tag{1}$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2 \in [0;2\pi[$.

In generale, per ogni scelta degli intervalli $[p;q[$, con $q - p = 2\pi$, in cui faremo variare α_1 e α_2, il logaritmo è un unico numero complesso; in corrispondenza degli infiniti intervalli $[p;q[$ che si possono scegliere, si avranno infiniti valori del logaritmo diversi tra loro (per due qualunque di essi, le differenze tra i due argomenti di $a+ib$ e tra i due argomenti di $c+id$ saranno ovviamente multipli interi di 2π).

Per ognuna delle determinazioni del logaritmo (in corrispondenza della scelta degli intervalli in cui imporremo che varino α_1 e α_2) sarà ovviamente:

$$\mathrm{mod}(\log_w u) = \mathrm{mod}(\ln u) / \mathrm{mod}(\ln w) \quad \text{e} \quad \arg(\log_w u) = \arg(\ln u) - \arg(\ln w).$$

Affinché però la formula (1) sia coerente con la definizione di logaritmo in R, e pertanto il logaritmo in C sia una generalizzazione del logaritmo in R, sarà necessario che $\alpha_1, \alpha_2 \in [0;2\pi[$ (o che comunque appartengano a un intervallo di ampiezza 2π che contenga lo 0)[8].

2. Calcolo delle potenze in C

2.1. Calcolo di $u = e^z$ con $z = f + ig$

Per la formula di Eulero, sarà:

$$u = e^z = e^{f+ig} = e^f \cdot e^{ig} = e^f(\cos g + i\,\mathrm{seng}).$$

In forma trigonometrica, se ρ_3 e α_3 sono rispettivamente il modulo e l'argomento di z e se indichiamo con ρ_1 e α_1 rispettivamente il modulo e l'argomento del numero u cercato, sarà:

[8] In tal caso infatti, se $a + ib \in R^+$ e $c + id \in R^+ - \{1\}$, sarà ovviamente $\rho_1 = a,\ \rho_2 = c \neq 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

$$u = e^{z} = e^{\rho_3(\cos\alpha_3 + isen\alpha_3)} = e^{\rho_3\cos\alpha_3}(\cos(\rho_3 sen\alpha_3) + isen(\rho_3 sen\alpha_3))$$

e quindi:

$$\rho_1 = e^{\rho_3\cos\alpha_3} \qquad \text{e} \qquad \alpha_1 = \rho_3 sen\alpha_3.$$

2.2. Calcolo di $(c+id)^{f+ig}$

Nel sottoparagrafo **1.4.** abbiamo visto che, $\forall u \in C - \{0\}$ e $\forall w \in C - \{0,1\}$, restringendo gli insiemi in cui far variare gli argomenti di *u* e *w* a intervalli di ampiezza 2π, si ottiene:

$$\log_w u = \frac{\ln\rho_1 + i\alpha_1}{\ln\rho_2 + i\alpha_2}$$

(con ρ_1 e ρ_2 e con α_1 e α_2 rispettivamente moduli e argomenti di *u* e di *w*); per rendere la definizione di logaritmo in C coerente con quella di logaritmo in R, abbiamo scelto $\alpha_1, \alpha_2 \in [0;2\pi[$.

Tale numero complesso può essere riscritto nella forma:

$$\log_w u = \frac{(\ln\rho_1 \ln\rho_2 + \alpha_1\alpha_2)}{(\ln\rho_2)^2 + (\alpha_2)^2} + i\frac{(\alpha_1 \ln\rho_2 - \alpha_2 \ln\rho_1)}{(\ln\rho_2)^2 + (\alpha_2)^2}$$

e quindi è, al variare di ρ_1 e ρ_2 in R^+, un qualunque numero appartenente all'insieme C (la parte reale e il coefficiente dell'unità immaginaria variano in tutto R).

Pertanto, consideriamo un qualunque numero complesso *z=f+ig* e una generica base complessa non nulla $w = c + id$ e diversa da 1.

Cerchiamo un numero complesso non nullo $u = a + ib$ tale che:

$$f + ig = \log_{c+id}(a + ib)$$

In forma trigonometrica, siano $a + ib = \rho_1(\cos\alpha_1 + isen\alpha_1)$,

$c + id = \rho_2(\cos\alpha_2 + isen\alpha_2)$, $f + ig = \rho_3(\cos\alpha_3 + isen\alpha_3)$.

Dovrà essere:

$$\rho_3(\cos\alpha_3 + isen\alpha_3) = \frac{\ln\rho_1 + i\alpha_1}{\ln\rho_2 + i\alpha_2}$$

da cui:

$$\ln\rho_1 + i\alpha_1 = (\rho_3(\cos\alpha_3 + isen\alpha_3)) \cdot (\ln\rho_2 + i\alpha_2)$$

cioè:

$$\ln\rho_1 + i\alpha_1 = \rho_3\cos\alpha_3 \ln\rho_2 + i\rho_3\alpha_2\cos\alpha_3 + i\rho_3 sen\alpha_3 \ln\rho_2 - \rho_3\alpha_2 sen\alpha_3$$

Dovrà quindi essere

$$\ln\rho_1 = \rho_3(\ln\rho_2\cos\alpha_3 - \alpha_2 sen\alpha_3)$$

da cui (se facciamo variare α_3 in un intervallo di ampiezza 2π in modo da rendere invertibile la funzione $\ln\rho_1$):

$$\rho_1 = e^{\rho_3(\ln\rho_2\cos\alpha_3 - \alpha_2 sen\alpha_3)} = \frac{(e^{\ln\rho_2})^{\rho_3\cos\alpha_3}}{e^{\rho_3\alpha_2 sen\alpha_3}} = \frac{\rho_2^{\rho_3\cos\alpha_3}}{e^{\alpha_2\rho_3 sen\alpha_3}}$$

e:

$$\alpha_1 = \rho_3(\alpha_2\cos\alpha_3 + sen\alpha_3\ln\rho_2).$$

Avremo quindi la formula generale per il calcolo della potenza in C:

$$(c+id)^{f+ig} = (\rho_2(\cos\alpha_2 + isen\alpha_2)^{\rho_3(\cos\alpha_3 + isen\alpha_3)} =$$

$$\frac{\rho_2^{\rho_3\cos\alpha_3}}{e^{\rho_3\alpha_2 sen\alpha_3}}(\cos(\rho_3(\alpha_2\cos\alpha_3 + sen\alpha_3\ln\rho_2)) + isen(\rho_3(\alpha_2\cos\alpha_3 + sen\alpha_3\ln\rho_2))$$

che, equivalentemente, se ρ_2 e α_2 sono rispettivamente il modulo e l'argomento di $c+id$, può essere riscritta nella forma più sintetica:

$$(c+id)^{f+ig} = \frac{\rho_2^{\,f}}{e^{g\cdot\alpha_2}}(\cos(f\alpha_2 + g\ln\rho_2) + isen(f\alpha_2 + g\ln\rho_2)) \qquad (2)$$

in cui $f = \rho_3\cos\alpha_3$ e $g = \rho_3 sen\alpha_3$.

Se f è un numero intero, il valore della potenza è unico per $\alpha_2 \in [2k\pi; 2(k+1)\pi[$, $\forall k \in Z$.

Se f è un numero irrazionale, per ogni scelta degli intervalli di ampiezza

2π in cui possiamo far variare α_2, si ottiene un unico numero complesso che rappresenta la potenza w^z e al variare degli infiniti intervalli che si possono scegliere, come per il logaritmo, si avranno infiniti valori diversi di tale potenza.

Se $f = m/n \in Q$, al variare di α_2 negli intervalli $[2k\pi;2(k+1)\pi[$ con k che assume n valori interi consecutivi, si ottengono n valori diversi della potenza; per tutti gli altri valori interi di k, precedenti e successivi, i valori corrispondenti della potenza si ripetono ciclicamente di n in n[9].

La formula (2), nel caso in cui w e z siano numeri reali, risulta coerente con la definizione di potenza in R[10].

[9] Quindi, $\forall(f+ig) \in C$ e $\forall(c+id) \in C - \{0;1\}$,

- se f è un numero intero esisterà un unico $a+ib \in C-\{0\}$ tale che
$$f+ig = \log_{c+id}(a+ib)\ ;$$
- se $f = m/n \in Q$ esisteranno n numeri diversi $a+ib \in C-\{0\}$ tali che
$$f+ig = \log_{c+id}(a+ib)\,;$$
- se $f \notin Q$ esisteranno infiniti numeri diversi $a+ib \in C-\{0\}$ tali che
$$f+ig = \log_{c+id}(a+ib).$$

[10] In tal caso infatti, se $w = c+id \in R-\{0,1\}$ e $z = f+ig \in R$, sarà ovviamente (se facciamo variare α_2 in $[0;2\pi[$):
$\rho_2 = c$ e $\alpha_2 = 0$ se $c>0$, $\rho_2 = -c$ e $\alpha_2 = \pi$ se $c<0$. Applicando la (2):

- se $c>0$, $\forall f \in R$, sarà:
$$w^z = c^f(\cos 0 + i sen 0) = c^f(\cos 0) = c^f \in R.$$
- se $c<0$
  se f è un numero intero (sia per f pari, che per f dispari), sarà:
  $$w^z = (-c)^f(\cos(f\pi) + i sen(f\pi)) = (-c)^f(\cos(f\pi)) = c^f \in R;$$
  se $f = m/n \in Q$, sarà (sia per m pari che per m dispari):
  $$w^z = \left((-c)^m(\cos(m\pi) + i sen(m\pi)\right)^{1/n} = \left((-c)^m(\cos(m\pi)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(c^m\right)^{\frac{1}{n}} = c^f$$
che se n è dispari è un numero reale per ogni m, se n è pari è un numero reale solo se m è pari (quindi se m/n è una frazione ridotta ai minimi termini $\notin R$);
  se $f \notin Q$, sarà:
  $$w^z = (-c)^f(\cos(f\pi) + i sen(f\pi)) \notin R.$$
(In R infatti, se $f \notin Q$, non si definisce c^f nel caso in cui $c<0$).

La potenza w^z assume, se $z \in Z$, lo stesso valore con $\alpha_2 \in [2k\pi;2(k+1)\pi[$, $\forall k \in Z$.
Ovviamente dalla (2) si ha anche $1^z = 1\ \ \forall z \in R$ e $0^z = 0\ \ \forall z \in R^+$.

2.3. Formula di De Moivre come caso particolare della formula (2)

La formula (2)**,** se $z \in R$ (e quindi $g = 0$), sarà:

$$u = (c + id)^f = \rho_2{}^f (\cos(f\alpha_2) + isen(f\alpha_2))$$

che, per $f \in N$ (o se, più in generale, f è un qualunque numero intero), è la formula di De Moivre.

È evidente che, per valori assegnati di *f* e di ρ_2, *u* assume lo stesso valore tutte le volte che si attribuiscono a α_2 valori che differiscono per multipli intero di $(2\pi)/f$, quindi si può pensare come una funzione della variabile α_2, periodica di periodo $(2\pi)/f$.

2.4. Calcolo della radice n–esima di un numero complesso

Come abbiamo visto nel sottoparagrafo **2.2.**, se $f = m/n \in Q$, i valori delle potenze che si ottengono per $\alpha_2 \in [2k\pi;2(k+1)\pi[$ al variare di k in *Z*, assumono *n* valori diversi tra loro che si ripetono ciclicamente di *n* in *n.*

Calcoliamo quindi gli *n* valori diversi della potenza per $f = 1/n$.

Se $y = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$, come è noto, le radici *n–esime* di *y* saranno i numeri complessi:

$$\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + isen\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \text{ con } k = 0,1,2,...(n-1).$$

Ricalcoliamo tali radici partendo dalla (2). Si ha:

$$y^{\frac{1}{n}} = \left(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)\right)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n}\right) \qquad (3)$$

che assume un unico valore per ognuno degli infiniti intervalli $[2k\pi;2(k+1)\pi[$, con $k \in Z$, in cui può variare l'argomento della base.

Come visto nel sottoparagrafo precedente, gli *n* valori della radice *n–esima* di *y* che si ottengono per *k=0,1,2,…(n–1)*, con argomenti appartenenti rispettivamente agli intervalli: $[0;(2\pi)/n[$, $[(2\pi)/n;(4\pi)/n[$, … $[(2(n-1)\pi)/n;2\pi[$, sono diversi tra loro.

Al variare di *k* comunque in *Z*, i valori delle radici trovati per *k=0,1,2,...(n–1)*, come detto precedentemente, si ripetono ciclicamente di *n* in *n*.

Se $\alpha \in [0;2\pi[$, sarà:

$$(\alpha+2\pi) \in [2\pi;4\pi[,\ (\alpha+4\pi) \in [4\pi;6\pi[,\ \ldots\ (\alpha+2(n-1)\pi) \in [2(n-1)\pi;2n\pi[$$

e le radici corrispondenti a tali *n* valori degli argomenti di *y* saranno quindi, le seguenti:

$$y^{\frac{1}{n}}{}_1 = (\rho(\cos\alpha + isen\alpha))^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n}\right)$$

cioè la radice *n–esima* di *y* con argomento appartenente all'intervallo $[0;(2\pi)/n[$;

$$y^{\frac{1}{n}}{}_2 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi}{n} + isen\frac{\alpha+2\pi}{n}\right)$$

cioè la radice *n–esima* di *y* con argomento appartenente all'intervallo $[(2\pi)/n;(4\pi)/n[$;

$$y^{\frac{1}{n}}{}_3 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+4\pi}{n} + isen\frac{\alpha+4\pi}{n}\right)$$

cioè la radice *n–esima* di *y* con argomento appartenente all'intervallo $[(4\pi)/n;(6\pi)/n[$ e così via…;

$$y^{\frac{1}{n}}{}_n = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} + isen\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

cioè la radice *n–esima* di *y* con argomento appartenente all'intervallo $[(2(n-1)\pi)/n;2\pi[$.

2.5. La radice n–esima in R come caso particolare della radice n–esima in C

2.5.1. Radici quadrate

I valori della radice quadrata di un generico numero complesso $y = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$ si otterranno dalla formula:

$$y^{\frac{1}{2}} = \left(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)\right)^{\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + isen\frac{\alpha}{2}\right)$$

che assume un unico valore per ognuno degli infiniti intervalli $[2k\pi;2(k+1)\pi[$, con $k \in Z$, in cui può variare l'argomento della base.

Come visto nel sottoparagrafo precedente, i 2 valori della radice quadrata di *y* che si ottengono per *k=0,1*, con argomenti appartenenti rispettivamente agli intervalli $[0;(2\pi)/2[= [0;\pi[$ e $[(2\pi)/2;(4\pi)/2[= [\pi;2\pi[$, sono diversi tra loro.

Al variare di *k* comunque in *Z*, i valori delle radici trovati per *k=0,1,* come detto precedentemente, si ripetono ciclicamente di *2* in *2*.

1. Sia $a \in R^+$

Se supponiamo $\alpha \in [0;2\pi[$, sarà $\alpha = 0$:

$$a^{\frac{1}{2}}_{1} = a^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{0}{2} + isen\frac{0}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}$$

cioè la radice quadrata di *a* con argomento nell'intervallo $[0;\pi[$;

$$a^{\frac{1}{2}}_{2} = a^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{0+2\pi}{2} + isen\frac{0+2\pi}{2}\right) = -a^{\frac{1}{2}}$$

cioè la radice quadrata di *a* con argomento nell'intervallo $[\pi;2\pi[$.

In tal caso le due radici quadrate, come è noto, sono entrambe reali[11].

[11] Nell'insieme R, le radici *n–esime* con *n* pari di numeri positivi si ottengono invertendo le funzioni $y = x^n$ che non sono invertibili nell'intero loro dominio $D =]-\infty;+\infty[$. Affinché possano essere invertibili sarà necessario restringere il loro dominio all'insieme $D_R =]-\infty;0[$, ottenendo in tal modo la radice negativa, o all'insieme $D_R = [0;+\infty[$, ottenendo in tal modo la radice positiva.

2. Sia $a \in R^-$

Se supponiamo $\alpha \in [0;2\pi[$, sarà $\alpha = \pi$:

$$a^{\frac{1}{2}}{}_1 = |a|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = |a|^{\frac{1}{2}} \cdot i$$

cioè la radice quadrata di *a* con argomento nell'intervallo $[0;\pi[$;

$$a^{\frac{1}{2}}{}_2 = |a|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + isen\frac{\pi+2\pi}{2}\right) = -|a|^{\frac{1}{2}} \cdot i$$

cioè la radice quadrata di *a* con argomento nell'intervallo $[\pi;2\pi[$.

In tal caso le due radici quadrate, come è noto, non sono reali ma entrambe immaginarie.

2.5.2. Radici cubiche

I valori della radice cubica di un generico numero complesso $y = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$ si otterranno data dalla formula:

$$y^{\frac{1}{3}} = \left(\rho(\cos\alpha + isen\alpha)\right)^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + isen\frac{\alpha}{3}\right)$$

che assume un unico valore per ognuno degli infiniti intervalli $[2k\pi;2(k+1)\pi[$, con $k \in Z$, in cui può variare l'argomento della base.

Come visto nel sottoparagrafo precedente, i tre valori della radice cubica di *y* che si ottengono per *k=0,1*,2, con argomenti appartenenti rispettivamente agli intervalli $[0;(2\pi)/3[$, $[(2\pi)/3;(4\pi)/3[$ e $[(4\pi)/3;2\pi[$, sono diversi tra loro.

Al variare di *k* comunque in *Z*, i valori delle radici trovati per *k=0,1,2,* come detto precedentemente, si ripetono ciclicamente di *3* in *3*.

1. Sia $a \in R^+$

Se supponiamo $\alpha \in [0;2\pi[$, sarà $\alpha = 0$:

$$a^{\frac{1}{3}}{}_1 = a^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0}{3} + isen\frac{0}{3}\right) = a^{\frac{1}{3}}$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[0;(2\pi)/3[$;

$$a^{\frac{1}{3}}{}_2 = a^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3}+isen\frac{0+2\pi}{3}\right)=a^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[(2\pi)/3;(4\pi)/3[$;

$$a^{\frac{1}{3}}{}_3 = a^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{2\pi+2\pi}{3}+isen\frac{2\pi+2\pi}{3}\right)=a^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[(4\pi)/3;2\pi[$.

In tal caso solo la radice $a^{1/3}{}_1$ è reale.

2. Sia $a \in R^-$

Se supponiamo $\alpha \in [0;2\pi[$, sarà $\alpha = \pi$:

$$a^{\frac{1}{3}}{}_1 = |a|^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+isen\frac{\pi}{3}\right)=|a|^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[0;(2\pi)/3[$;

$$a^{\frac{1}{3}}{}_2 = |a|^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+isen\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=-|a|^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[(2\pi)/3;(4\pi)/3[$;

$$a^{\frac{1}{3}}{}_3 = |a|^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{3\pi+2\pi}{3}+isen\frac{3\pi+2\pi}{3}\right)=|a|^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

cioè la radice cubica di *a* con argomento nell'intervallo $[(4\pi)/3;2\pi[$.

In tal caso solo la radice $a^{1/3}{}_2$ è reale.

Analogamente si ottengono, sempre partendo dalla (2), le radici *n–esime* di numeri reali (positivi o negativi), qualunque sia l'indice *n* della radice (ovviamente, se *a=0*, $\sqrt[n]{a}=0$).

AREE SCIENTIFICO–DISCIPLINARI

AREA 01 – **Scienze matematiche e informatiche**

AREA 02 – Scienze fisiche

AREA 03 – Scienze chimiche

AREA 04 – Scienze della terra

AREA 05 – Scienze biologiche

AREA 06 – Scienze mediche

AREA 07 – Scienze agrarie e veterinarie

AREA 08 – Ingegneria civile e architettura

AREA 09 – Ingegneria industriale e dell'informazione

AREA 10 – Scienze dell'antichità, filologico–letterarie e storico–artistiche

AREA 11 – Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche

AREA 12 – Scienze giuridiche

AREA 13 – Scienze economiche e statistiche

AREA 14 – Scienze politiche e sociali

AREA 15 – Scienze teologico–religiose

Il catalogo delle pubblicazioni di Aracne editrice è su

www.aracneeditrice.it

Finito di stampare nel mese di novembre del 2018
dalla tipografia «The Factory S.r.l.»
00156 Roma – via Tiburtina, 912
per conto della «Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale» di Canterano (RM)