A01

172

Luca Goldoni

Esercizi e complementi di analisi complessa

presentazione di

Edoardo Ballico

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–4241–0

I edizione: settembre 2011

Indice

Elenco delle figure

Prefazione

Questo libro nasce in parte dalle esercitazioni di un corso di Analisi Complessa per la Laurea triennale. Affiancato ad un libro elementare sull'argomento esso svolge moto bene il suo compito: aiutare e stimolare gli studenti. Per il docente: per come vengono esposti gli esercizi e l'introduzione ad essi, puo' servire molto bene come Eserciziario anche di un corso in cui l'esposizione non segue l'ordine dei capitoli di questo libro; capitoli piu'avanzati possono essere usati sia come ultima parte o parte facoltativa di un primo corso elementare di Analisi Complessa, sia come Eserciziario per un corso avanzato. Per gli studenti: si presta molto bene per uno studio personale, anche se naturalmente richiede l'uso contemporaneo di un testo o di dispense di Analisi Complessa. Il capitolo Analisi Complessa Visiva puo'essere dilatato a piacere fino a diventare un corso completo annuale seguendo T. Needham, Visual Complex Analysis, Oxford University Press (che pero'secondo me non si presta come **primo corso** di Analisi Complessa, piuttosto come self-study accanto ad un primo corso o come approccio guidato da un esperto per studenti non di matematica, ma con interessi molto avanzati); l'argomento sembra molto importante per applicazioni all'ingegneria della visione.

Edoardo Ballico [1]

[1]Professore Ordinario di Geometria presso l'Università di Trento

Capitolo 1

Numeri complessi

1.1 Forma algebrica

Esercizio 1.1.1. *Dimostrare che* $\forall z \in \mathbb{C}$ *si ha:*

1. $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$.
2. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

Soluzione 1.1.1. *Sia* $z = a + ib$*; ne segue che* $\overline{z} = a - ib$ *e quindi:*

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a \in \mathbb{R}.$$

Inoltre:

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Questo prova quanto richiesto.

Esercizio 1.1.2. *Sia:*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Dimostrare che:

$$z \in \mathbb{H} \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{H}.$$

Soluzione 1.1.2. *Sia $z \in \mathbb{H}$. Se scriviamo $z = a + ib$ avremo che $a > 0$ per definizione di $\mathbb{H}$. Si ha allora:*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

e quindi:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0.$$

Si procede in modo analogo per l'implicazione inversa.

Nota 1.1.1. *L'insieme $\mathbb{H}$ si chiama* ***semipiano superiore*** *(Fig 1.1).*

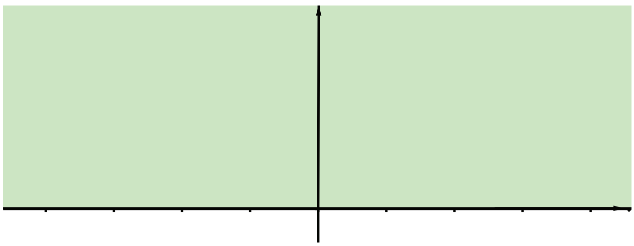

Figura 1.1: Il semipiano superiore

Esercizio 1.1.3. *Siano z,$a \in \mathbb{C}$. Dimostrare che:*

$$|1 - z\overline{a}|^2 - |z - a|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |a|^2\right).$$

Soluzione 1.1.3. *Ricordiamo* ***preliminarmente*** *che per ogni $w, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si hanno le seguenti identità:*

1. $|w|^2 = w\overline{w}$
2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
4. $\overline{\overline{w}} = w$

Avremo allora:

$$|1 - z\overline{a}|^2 = (1 - z\overline{a})\,\overline{(1 - z\overline{a})}.$$

da cui:

$$|1 - z\overline{a}|^2 = (1 - z\overline{a})\left(\overline{1} - \overline{z\overline{a}}\right) = (1 - z\overline{a})\,(1 - \overline{z}a.)$$

e quindi:

$$|1 - z\overline{a}|^2 = 1 - \overline{z}a - z\overline{a} + z\overline{a}\overline{z}a.$$

e in definitiva:

$$|1 - z\overline{a}|^2 = 1 - \overline{z}a - z\overline{a} + |z|^2\,|a|^2\,.$$

D'altra parte:

$$|z - a|^2 = (z - a)\,\overline{(z - a)} = (z - a)\,(\bar{z} - \bar{a}) = z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a}$$

da cui segue:

$$|z - a|^2 == |z|^2 + |a|^2 - z\bar{a} - a\bar{z}.$$

e quindi:

$$|1 - z\overline{a}|^2 - |z - a|^2 = 1 - \overline{z}a - z\overline{a} + |z|^2\,|a|^2 - |z|^2 - |a|^2 + z\overline{a} + a\overline{z} =$$

$$\begin{aligned} &= 1 + |z|^2\,|a|^2 - |z|^2 - |a|^2 = \\ &= \left(1 - |z|^2\right) - |a|^2\left(1 - |z|^2\right) = \\ &= \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |a|^2\right). \end{aligned}$$

che è la tesi.

Esercizio 1.1.4. *Sia $a \in \mathbb{C}$ tale che $|a| < 1$. Dimostrare che:*

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z - a}{1 - z\overline{a}}\right| < 1.$$

Soluzione 1.1.4. *Iniziamo col provare che:*

$$|z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right| < 1.$$

Osserviamo, preliminarmente che, nelle ipotesi fatte si ha:

$$|1 - z\overline{a}| \neq 0.$$

Infatti se fosse:

$$|1 - z\overline{a}| = 0$$

avremmo che $z\overline{a} = 1$ *e dunque:* $|z\overline{a}| = 1$. *Ciò è impossibile perchè* $|z| < 1$ *e* $|a| < 1$. *Premesso ciò possiamo considerare l'identità dimostrata nell'esercizio 1.1.1 e dividerne entrambi i membri per* $|1 - z\overline{a}|^2$, *ottenendo:*

$$1 - \frac{|z-a|^2}{|1-z\overline{a}|^2} = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-z\overline{a}|^2}.$$

che potremo riscrivere come:

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right|^2 = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-z\overline{a}|^2}.$$

Allora, dalle ipotesi fatte vediamo subito che il secondo membro è positivo e quindi dovrà essere:

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right|^2 > 0$$

da cui:

$$\left|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right| < 1$$

Supponiamo ***viceversa*** *di sapere che:*

$$\left|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\right| < 1.$$

Allora sicuramente avremo:

$$\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-z\overline{a}|^2}>0$$

e poichè per ipotesi $|a|<1$ *dovrà essere* $1-|z|^2>0$ *e quindi* $|z|<1$.

Esercizio 1.1.5. *Sia* $a\in\mathbb{C}$ *tale che* $|a|<1$. *Dimostrare che:*

$$|z|=1\Leftrightarrow\frac{|z-a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}=1.$$

Soluzione 1.1.5. *Sia* $|z|=1$. *Ragionando come nell'esercizio precedente si ha che:* $1-z\overline{a}\neq 0$. *Inoltre, poichè:*

$$|1-z\overline{a}|^2-|z-a|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right).$$

avremo che:

$$|1-z\overline{a}|^2=|z-a|^2.$$

e quindi:

$$\frac{|z-a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}=1.$$

Viceversa*, supponiamo di sapere che:*

$$\frac{|z-a|^2}{|1-z\overline{a}|^2}=1.$$

Allora:

$$|1-z\overline{a}|^2-|z-a|^2=0$$

e quindi:

$$\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)=0$$

ed essendo,per ipotesi, $|a|<1$ *dovrà essere* $|z|=1$.

Esercizio 1.1.6. *Sia* $z=x+iy\in\mathbb{C}$. *Dimostrare che:*

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

Soluzione 1.1.6. *Per quanto riguarda la prima disuguaglianza si ha che:*

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \Leftrightarrow \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2\,|x|\,|y|}{2} \leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2\,|x|\,|y|}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geqslant 0.$$

e dunque essa è vera. Per la ***seconda*** *tesi si ha*

$$|z| \leqslant |x|+|y| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x|+|y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leqslant x^2+y^2+2\,|x|\,|y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,|x|\,|y| \geqslant 0.$$

e dunque anche questa tesi è dimostrata.

Esercizio 1.1.7. *Sia:*

$$W(n) = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}.$$

Dimostrare che esso è un ***sottogruppo moltiplicativo****di*

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

.

Soluzione 1.1.7. *Basta dimostrare che se z_1 e $z_2 \in W(n)$ allora anche $z_1 z_2^{-1} \in W(n)$, oppure in modo equivalente, che*

1. $z_1, z_2 \in W(n) \Rightarrow z_1 z_2 \in W(n)$.

2. $z_2 \in W(n) \Rightarrow z_2^{-1} \in W(n)$.

Per quanto riguarda il primo punto si ha che se $z_1, z_2 \in W(n)$, allora:

$$z_1^n = 1$$
$$z_2^n = 1$$

Ne segue che:

$$z_1^n z_2^n = 1 \Rightarrow (z_1 z_2)^n = 1 \Rightarrow z_1 z_2 \in W(n).$$

Per quanto riguarda il secondo punto si ha:

$$(z_2^n)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

e dunque:

$$\left(z_2^{-n}\right) = 1 \Rightarrow \left(z_2^{-1}\right)^n = 1 \Rightarrow z_2^{-1} \in W(n).$$

da cui la tesi.

Esercizio 1.1.8. *Calcolare* $(1+i)^{100}$

Soluzione 1.1.8. *Osserviamo che:*

$$(1+i)^{100} = \left[(1+i)^2\right]^{50}.$$

e che:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Perciò si ha:

$$(1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50} i^{50} = 2^{50} i^2 = -2^{50}.$$

Esercizio 1.1.9. *Dimostrare che:*

$$(1+i)^{20} - (1-i)^{20} = 0.$$

Soluzione 1.1.9. *Si ha:*

$$(1+i)^{20} - (1-i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} - \left[(1-i)^2\right]^{10} =$$
$$= (2i)^{10} - (-2i)^{10} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0.$$

1.2 Forma trigonometrica

Esercizio 1.2.1. *Sia $z \in \mathbb{C}^*$ e sia $n \geq 1$ un numero naturale. Dimostrare che esistono* ***esattamente*** *n numeri complessi w, distinti, tali che $w^n = z$.*

Soluzione 1.2.1. *Scriviamo z in forma trigonometrica:*

$$z = \rho \left(\cos\theta + i \sin\theta\right).$$

e poniamo:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1 \cdots n-1.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} w_k^n = & \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\}^n = \\ & = \rho\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} n + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} n\right) = \\ & = \rho\left(\cos\left(\theta + 2k\pi\right) + i \sin\left(\theta + 2k\pi\right)\right) = \\ & = \rho\left(\cos\theta + i \sin\theta\right) = z. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che ***se*** *$0 \leq k < h \leq n-1$* ***allora*** *$w_k \neq w_h$. Si ha:*

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\ w_h &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2h\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2h\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Pertanto se $w_k = w_h$ allora:

$$\sqrt[n]{\rho}\left\{\left(\cos\Theta_k + i \sin\Theta_k\right) - \left(\cos\Theta_h + i \sin\Theta_h\right)\right\} = 0.$$

avendo posto:

$$\begin{cases} \Theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \\ \\ \Theta_h = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Da ciò segue che:

$$\begin{cases} \cos\Theta_k - \cos\Theta_h = 0 \\ \\ \sin\Theta_k - \sin\Theta_h = 0 \end{cases}$$

Ma è ben noto che:

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = \pi - \beta.$$

ed inoltre:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = 2\pi - \beta.$$

Non può essere $\alpha = \beta$ *perchè altrimenti avremmo:*

$$\frac{\theta + 2h\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

e quindi $h = k$ *contro l'ipotesi. D'altra parte, non può essere* $\alpha = \pi - \beta$ *e* $\alpha = 2\pi - \beta$ *perchè altrimenti avremmo* $\pi = 0$. *Quindi gli* n *numeri:* w_k *con* $k = 0, 1..n - 1$, *sono tutti* ***distinti***.

1.3 Forma esponenziale

Esercizio 1.3.1. *Ricavare le formule per* $\cos 3\theta$ *e* $\sin 3\theta$ *sfruttando la* ***forma esponenziale*** *dei numeri complessi.*

Soluzione 1.3.1. *Sappiamo che:*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

e quindi:

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

D'altra parte:

$$e^{i3\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3.$$

e quindi, sviluppando il cubo del binomio, si ha:

$$e^{i3\theta} = \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

da cui, uguagliando fra loro le parti reali ed immaginarie, otteniamo:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

e quindi:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

In modo analogo si prova che:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

Nota 1.3.1. *Le precedenti formule ci forniscono le seguenti identità:*

$$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta$$

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

Esse possono essere viste come gli sviluppi in ***serie di Fourier*** *delle funzioni:*

$$f(\theta) = \cos^3\theta$$

$$g(\theta) = \sin^3\theta$$

Poichè l'esercizio può essere facilmente generalizzato al caso $\cos n\theta$ *e* $\sin n\theta$ *possiamo affermare che:*

- *Gli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni* $f(\theta) = \cos^n\theta$ *e* $g(\theta) = \sin^n\theta$ *sono ottenibili per* ***via algebrica****.*

- *Essi consistono di un* ***numero finito*** *di termini.*

Da ciò segue che ogni funzione del tipo:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\theta) + \sum_{j=1}^{n} b_j \cos(j\theta).$$

ammette uno sviluppo finito di Fourier, determinabile per via algebrica.

1.4 Applicazioni alla geometria analitica

Esercizio 1.4.1. *Dimostrare che se $z = x+iy$ e se è data una retta di equazione $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ tale retta può essere descritta anche mediante la seguente equazione*

$$\alpha z + \overline{\alpha}\ \overline{z} + \beta = 0.$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluzione 1.4.1. *Avremo:*

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \overline{z} &= x - iy \\ z_0 &= x_0 + iy_0 \\ \overline{z_0} &= x_0 - iy_0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z + \overline{z}}{2} \\ y &= \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

e dunque:

$$a\frac{z + \overline{z}}{2} + b\frac{z - \overline{z}}{2i} + c = 0.$$

e quindi:

$$a\,(z + \overline{z}) - bi\,(z - \overline{z}) + 2c = 0.$$

Ne segue che:

$$(a - ib)z + (a + ib)\overline{z} + 2c = 0.$$

e dunque:

$$\alpha z + \overline{\alpha}\ \overline{z} + \beta = 0.$$

dove:

$$\begin{aligned} \alpha &= a - ib \\ \beta &= 2c \in R \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.2. *Dimostrare che se $z = x + iy$ e se è data una circonferenza di equazione:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

allora tale circonferenza può essere espressa anche mediante la seguente equazione:

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} + \beta = 0$$

essendo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluzione 1.4.2. *Avremo:*

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \overline{z} &= x - iy \\ z_0 &= x_0 + iy_0 \\ \overline{z_0} &= x_0 - iy_0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z + \overline{z}}{2} \\ y &= \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &= \left(\frac{z + \overline{z}}{2} - \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2}\right)^2 \\ (y - y_0)^2 &= \left(\frac{z - \overline{z}}{2i} - \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i}\right)^2 \end{aligned}$$

e dunque:

$$\left(\frac{z + \overline{z}}{2} - \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \overline{z}}{2i} - \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i}\right)^2 = r^2$$

Da ciò si ottiene:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2}{4} + \frac{z_0^2 + 2z_0\overline{z_0} + \overline{z_0}^2}{4} - 2\frac{z + \overline{z}}{2}\frac{z_0 + \overline{z_0}}{2}\right) + \\ &+ \left(-\frac{z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2}{4} - \frac{z_0^2 - 2z_0\overline{z_0} + \overline{z_0}^2}{4} + 2\frac{z - \overline{z}}{2}\frac{z_0 - \overline{z_0}}{2}\right) = r^2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$z\overline{z} + z_0\overline{z_0} - \frac{(z+\overline{z})(z_0+\overline{z_0})}{2} + \frac{(z-\overline{z})(z_0-\overline{z_0})}{2} = r^2$$

da cui segue:

$$z\overline{z} + z_0\overline{z_0} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 = r^2$$

ovvero:

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} + \beta = 0$$

dove:

$$\begin{aligned}
&\alpha = -\overline{z_0} \\
&\beta = r^2 - z_0\overline{z_0} = r^2 - |z_0|^2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4.3. *Siano α, β, γ numeri complessi per i quali $|\alpha| \neq |\beta|$ e sia $z = x + iy$. Dimostrare che l'equazione:*

$$\alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0.$$

rappresenta esattamente un punto del piano complesso.

Soluzione 1.4.3. *Siano:*

$$\begin{aligned}
\alpha &= a + ib \\
\beta &= c + id \\
\gamma &= e + if
\end{aligned}$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Possiamo riscrivere l'equazione data come:

$$(a+ib)(x+iy) + (c+id)(x-iy) + (e+if) = 0.$$

Da questa si ottiene, uguagliando le parti reali e le parti immaginarie:

$$\begin{cases} (a+c)\,x - (b+d)\,y = e \\ (b+d)\,x + (a-c)\,y = f \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ d-b & a-c \end{pmatrix}$$

$$\det A = a^2 - c^2 + b^2 - d^2.$$

Tale determinante è sicuramente diverso da zero perchè in caso contrario avremmo:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

e dunque

$$|\alpha| = |\beta|\,.$$

contro l'ipotesi. Il sistema è pertanto determinato e ammette esattamente una soluzione (x_0, y_0) *alla quale corrisponderà un unico punto* $z_0 = x_0 + iy_0$.

1.5 Vari

Esercizio 1.5.1. *Dimostrare che per ogni* $a, b \in \mathbb{C}$ *se* $b \neq 0$ *e se* $|a + b| = |a - b|$ *allora:*

$$w = \frac{ia}{b} \in \mathbb{R}$$

Soluzione 1.5.1. *Poichè:*

$$|a + b| = |a - b|\,.$$

ne segue che:

$$(a + b)\left(\overline{a + b}\right) = (a - b)\left(\overline{a - b}\right).$$

e dunque:

$$(a + b)\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = (a - b)\left(\overline{a} - \overline{b}\right):$$

da cui:

$$a\overline{b} + \overline{a}b = 0. \tag{1.1}$$

Poniamo allora:

$$a = \alpha + i\beta$$
$$b = \gamma + i\delta$$

Si ha allora dalla (1.1)

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0. \tag{1.2}$$

Se consideriamo allora:

$$w = \frac{ia}{b} = \frac{i(\alpha + i\beta)}{\gamma + i\delta}$$

otteniamo:

$$w = \frac{i(\alpha\gamma + \beta\delta - i\alpha\delta + i\beta\gamma)}{\gamma^2 + \delta^2}$$

e quindi , tenuto conto della (1.2),

$$w = \frac{i^2(-\alpha\delta + \beta\gamma)}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma^2 + \delta^2} \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.5.2. *Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$, posto:*

$$w = \frac{1 + ki}{1 - ki}.$$

si ha |w=1. Si dimostri poi che se $u \in \mathbb{C} - \{-1\}$ e $|u| = 1$ allora esiste $k = k_u \in \mathbb{R}$ tale che:

$$u = \frac{1 + ki}{1 - ki}.$$

Soluzione 1.5.2. *Per quanto riguarda la **prima parte** dell'esercizio si ha:*

$$w = \frac{1 + ki}{1 - ki} \qquad \overline{w} = \frac{1 - ki}{1 + ki}$$

e quindi:

$$|w|^2 = w\overline{w} = \frac{1 + ki}{1 - ki}\frac{1 - ki}{1 + ki} = 1$$

*da cui $|w| = 1$. Per quanto riguarda la **seconda parte**, si osservi che:*

$$\frac{1 + ki}{1 - ki} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} + \frac{2ki}{1 + k^2}.$$

e quindi si dovrà risolvere:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} = \alpha \\ \dfrac{2k}{1 + k^2} = \beta \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha \neq -1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$*, si può scegliere* $k = \pm 1$*. Per ogni altro valore di* α *avremo che* $1 - k^2 \neq 0$*. Poniamo allora:*

$$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$$

Osserviamo inoltre che $\beta = 0$ ***se e solo se*** $\alpha = 0$*, cioè per* $k = \pm 1$*, di cui si è già parlato. Quindi si può supporre* $\beta \neq 0$*. Allora si ha:*

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2k}{1 - k^2}$$

che ha come soluzioni:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma^2}}{\gamma}$$

ovvero:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1 - \alpha}{\beta} \\ k_2 = -\dfrac{1 + \alpha}{\beta} \end{cases}$$

Esercizio 1.5.3. *Sia:*

$$A = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1,\ u \neq -1\}.$$

Dimostrare che A *è in corrispondenza biunivoca con* $\mathbb{R}$*.*

Soluzione 1.5.3. *Sia* $u = \alpha + i\beta \in A$*. Consideriamo l'applicazione*

$$f : A \to R$$
$$f(u) = \frac{\beta}{\alpha + 1}$$

Dimostriamo che essa è biunivoca. ***Iniettività****: dobbiamo provare che*

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_1}{\alpha_1 + 1} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2 + 1} \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \\ \alpha_1 \neq -1 \\ \alpha_2 \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Osserviamo che deve essere:

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1+1}\right)^2 = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2+1}\right)^2.$$

da cui:

$$\frac{1-\alpha_1^2}{(\alpha_1+1)^2} = \frac{1-\alpha_2^2}{(\alpha_2+1)^2}.$$

e quindi:

$$\frac{(1-\alpha_1)(1+\alpha_1)}{(\alpha_1+1)^2} = \frac{(1-\alpha_2)(1+\alpha_2)}{(\alpha_2+1)^2}.$$

e pertanto:

$$\frac{(1-\alpha_1)}{(\alpha_1+1)} = \frac{(1-\alpha_2)}{(\alpha_2+1)}.$$

Allora

$$(1-\alpha_1)(\alpha_2+1) = (1-\alpha_2)(\alpha_1+1).$$

e cioè

$$\alpha_2 + 1 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_1 + 1 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2.$$

da cui

$$2\alpha_2 = 2\alpha_1.$$

e quindi:

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Siccome per ipotesi:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1+1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2+1}.$$

avremo allora che:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1+1} = \frac{\beta_2}{\alpha_1+1}.$$

da cui segue $\beta_1 = \beta_2$. ***Suriettività****: Si deve provare che per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $u \in A$ tale che $f(u) = k$. Si consideri a tale proposito il numero complesso*

$$u = \frac{1+ki}{1-ki}$$

Abbiamo già visto nell'esercizio precedente che $|u| = 1$. *Basterà dunque provare che per ogni* $k \in \mathbb{R}$ *si ha* $u \neq -1$. *Ciò è immediato perchè se esistesse* k *tale che:*

$$-1 = \frac{1+ki}{1-ki}.$$

implicherebbe $-1 = 1$.

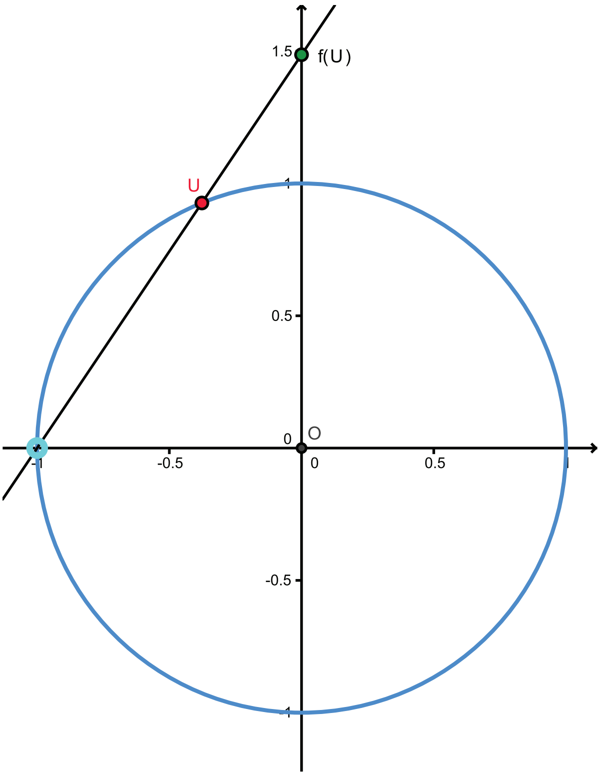

Figura 1.2: Dimostrazione grafica della corrispondenza biunivoca fra A ed $\mathbb{R}$

Esercizio 1.5.4. *Si consideri il numero complesso:*

$$w = \frac{1-z}{1+z}$$

dove $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$. Si determini il sottoinsieme A degli z per i quali w è ***immaginario puro****.*

Soluzione 1.5.4. *Possiamo riscrivere w come:*

$$w = \frac{1-(x+iy)}{1+(x+iy)}.$$

da cui:

$$w = \frac{[(1-x)-iy]\,[(1+x)-iy]}{(1+x)^2+y^2}.$$

ovvero:

$$w = \frac{[(1-x^2)-2iy-y^2]}{(1+x)^2+y^2}.$$

Quindi si avrà che w è immaginario puro se e solo se:

$$\left(1-x^2\right)-y^2=0.$$

e dunque

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : z = x+iy,\ x^2+y^2=1,\, x \neq -1, y \neq 0\right\}.$$

Esercizio 1.5.5. *Dimostrare che se z ed a sono numeri complessi per i quali $|z| = 1$ e $|a| \neq 1$ allora il numero complesso è* ***ben definito*** *ed è* ***reale e positivo****.*

Soluzione 1.5.5. *Il numero w è ben definito se e solo se:*

$$\begin{cases} z-a \neq 0 \\ 1-\overline{a}z \neq 0 \end{cases}$$

La ***prima*** *di tali condizioni è certamente verificata perchè altrimenti si avrebbe:*

$$z-a=0 \Rightarrow 1=|z|=|a|$$

contro l'ipotesi. La ***seconda*** *di tali condizioni è verifica perchè altrimenti si avrebbe:*

$$1-\overline{a}z=0 \Rightarrow \overline{a}z=1 \Rightarrow |\overline{a}z|=1 \Rightarrow |\overline{a}|\,|z|=1 \Rightarrow |\overline{a}|=1$$

contro l'ipotesi. Per provare che w è reale e positivo si deve dimostrare che:

$$\begin{cases} |w| > 0 \\ \arg w = 0 \end{cases}$$

Poniamo:

$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

$$a = re^{i\phi} \; 0 \leqslant \phi < 2\pi \qquad r \geqslant 0 \;\; r \neq 1$$

Si ha:

$$w = \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - re^{i\phi})\,(1 - re^{-i\phi}e^{i\theta})}.$$

Allora:

$$w = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}\,(1 - re^{i(\phi-\theta)})\,(1 - re^{-i(\phi-\theta)})}.$$

e quindi:

$$w = \frac{1}{(1 - re^{i\beta})\,(1 - re^{-i\beta})}.$$

dove si è posto $\beta = \theta - \phi$. *Da ciò segue che:*

$$w = \frac{1}{[1 - r\,(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + r^2]}.$$

e quindi:

$$w = \frac{1}{\left[1 - 2r\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right) + r^2\right]}.$$

ovvero:

$$w = \frac{1}{1 - 2r\cos\beta + r^2}.$$

Osserviamo che per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ *si ha:*

$$1 - 2r + r^2 \leqslant 1 - 2r\cos\beta + r^2 \leqslant 1 + 2r + r^2.$$

e quindi:

$$(1-r)^2 \leqslant 1 - 2r\cos\beta + r^2 \leqslant (1+r)^2$$

Poichè per ipotesi $r \neq 1$, *avremo in particolare:*

$$0 < (1-r)^2 \leqslant 1 - 2r\cos\beta + r^2.$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 1.5.6. *Dimostrare che se z e w sono numeri complessi qualsiasi allora:*

1. $\overline{z}w + z\overline{w} \in \mathbb{R}$
2. $(1 + z\overline{w})(1 + \overline{z}w) \leqslant \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right)$

Soluzione 1.5.6. *Per quanto riguarda la **prima** tesi si ha che:*

$$\begin{cases} (z + \overline{z}) \in R \\ (w + \overline{w}) \in R \end{cases} \Rightarrow (z + \overline{z})(w + \overline{w}) \in \mathbb{R}$$

Ma:

$$t = \overline{z}(z + \overline{z})(w + \overline{w}) = z\overline{w}+zw+\overline{z}w+\overline{zw} = (z\overline{w} + \overline{z}w)+(zw + \overline{zw}).$$

e siccome:

$$u = (zw + \overline{zw}) \in \mathbb{R}.$$

si avrà che:

$$t - u = z\overline{w} + \overline{z}w.$$

*Per quanto riguarda la **seconda tesi** osserviamo che*

$$(1 + z\overline{w})(1 + \overline{z}w) = 1+\overline{z}w+z\overline{w}+z\overline{z}w\overline{w} = 1+\overline{z}w+z\overline{w}+|z|^2|w|^2.$$

e che

$$\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right) = 1 + |z|^2 + |w|^2 + |z|^2|w|^2.$$

Se dimostriamo quindi che:

$$\overline{z}w + z\overline{w} \leqslant |z|^2 + |w|^2.$$

abbiamo finito. Poniamo:

$$z_1 = w - z.$$

da cui:

$$\overline{z_1} = \overline{w - z} = \overline{w} - \overline{z}.$$

ne segue che:

$$z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 \geqslant 0.$$

e dunque:

$$(w - z)(\overline{w} - \overline{z}) \geqslant 0.$$

Allora:

$$w\overline{w} - w\overline{z} - z\overline{w} + z\overline{z} \geqslant 0.$$

e quindi:

$$|z|^2 + |w|^2 - w\overline{z} - z\overline{w} \geqslant 0.$$

da cui:

$$w\overline{z} + z\overline{w} \leqslant |z|^2 + |w|^2 .$$

che è quanto volevamo provare.

Esercizio 1.5.7. *Dimostrare che $a, b \in \mathbb{C}$ e se $Rea > 0$ $Reb > 0$ allora:*

$$|a - b| < |\overline{a} + b| .$$

Soluzione 1.5.7. *La disuguaglianza vale se e solo se:*

$$|a - b|^2 < |\overline{a} + b|^2 .$$

e quindi se e solo se:

$$(a - b)\left(\overline{a} - \overline{b}\right) < (\overline{a} + b)\left(a + \overline{b}\right) .$$

e quindi se e solo se:

$$a\overline{a} - a\overline{b} - b\overline{a} + b\overline{b} < a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}.$$

e dunque se e solo se:

$$0 < a\overline{b} + b\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a}.$$

ovvero se e solo se:

$$0 < a\left(b + \overline{b}\right) + \overline{a}\left(b + \overline{b}\right) .$$

e quindi:

$$0 < (a + \overline{a}) \left(b + \overline{b}\right).$$

Ma:

$$a + \overline{a} = 2 \operatorname{Re} a > 0$$
$$b + \overline{b} = 2 \operatorname{Re} b > 0$$

per le ipotesi su $\operatorname{Re} a$. *Inoltre* $\operatorname{Re} b$ *e quindi la disuguaglianza è provata.*

Esercizio 1.5.8. *Siano* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *tali per cui* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. *Dimostrare che:*

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 3 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right).$$

Soluzione 1.5.8. *Si ha:*

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right).$$
$$|z_2 - z_3|^2 = (z_2 - z_3)\left(\overline{z_2} - \overline{z_3}\right) = |z_2|^2 + |z_3|^2 - \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right).$$
$$|z_3 - z_1|^2 = (z_3 - z_1)\left(\overline{z_3} - \overline{z_1}\right) = |z_3|^2 + |z_1|^2 - \left(z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3}\right).$$

e quindi:

$$\begin{aligned} &|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right) - \\ &- \left[\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right) + \left(z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ma:

$$\begin{aligned} &\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right) + \left(z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3}\right) = \\ &= z_1\left(\overline{z_2} + \overline{z_3}\right) + z_2\left(\overline{z_1} + \overline{z_3}\right) + z_3\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right). \end{aligned}$$

e poichè dall'ipotesi segue che:

$$\overline{z_1} = -\left(\overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$$
$$\overline{z_2} = -\left(\overline{z_1} + \overline{z_3}\right)$$
$$\overline{z_3} = -\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$$

si ha:

$$\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right) + \left(z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3}\right) = -\left[|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right].$$

Allora, riprendendo la (1.3), *si ha la tesi.*

1.6 Sfera di Riemann

Consideriamo il piano di Argand-Gauss e immaginiamo di prendere una sfera Σ di raggio unitario tangente ad esso in O. Si può realizzare una corrispondenza biunivoca tra $\Sigma - \{N\}$ e il piano di Argand-Gauss, nel seguente modo: dato un punto $z \in \mathbb{C}$ si congiunge tale punto con N e si considera il punto P. Viceversa, dato $P \in \Sigma - \{N\}$ si traccia la retta NP che incontrerà il piano $\mathbb{C}$ in un punto z. Si può allora affermare che

$$\Sigma - \{N\}$$

è un altro modo di rappresentare l'insieme dei numeri complessi. Se poi si considera Σ essa rappresenta un'estensione di $\mathbb{C}$ in quanto c'è in più il punto N. Tale estensione è una "**compattificazione ad un punto**" di $\mathbb{C}$. Si dice anche che N rappresenta il punto all'infinito di $\mathbb{C}$.

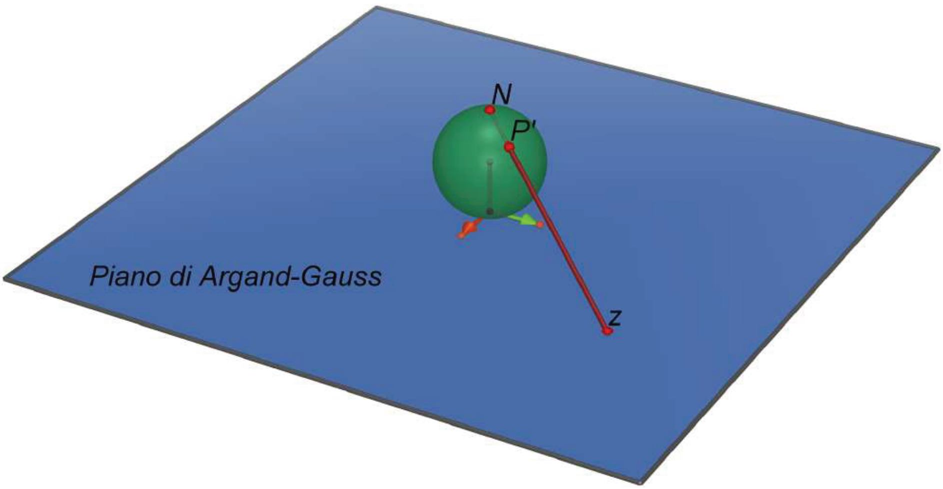

Figura 1.3: La corrispondenza fra il piano di Argand-Gauss e la sfera di Riemann

Capitolo 2

Funzioni, Successioni,Limiti, Continuità.

2.1 Funzioni

Esercizio 2.1.1. *Data la funzione:*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

tale che:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{C}$ nel quale essa risulta definita.

Soluzione 2.1.1. *La funzione è definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale per cui $z^2 + 1 \neq 0$. Poichè $z^2 + 1 = 0$ ha come soluzioni $z_1 = i$ e $z_2 = -i$ avremo che l'insieme cercato è:*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \pm i\}$$

Esercizio 2.1.2. *Sia:*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

tale che:

$$f(z) = 1 - z + |z|^2$$

Posto $z = x+iy$ si avrà $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Determinare $u(x,y)$ e $v(x,y)$.

Soluzione 2.1.2. *Si avrà:*

$$f(x+iy) = 1 - (x+iy) + \left(x^2+y^2\right).$$

da cui

$$f(x+iy) = \left(1 - x - x^2 - y^2\right) + i\,(y).$$

e quindi:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 1 - x - x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= y \end{aligned}$$

Esercizio 2.1.3. *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

descrivere come opera f sui punti interni ed esterni al ***cerchio unitario*** *di centro l'origine. Spiegare anche cosa succede ai punti della circonferenza unitaria di centro l'origine.*

Soluzione 2.1.3. *La funzione è definita per $z \neq 0$. Per tali valori di z scriviamo:*

$$z = re^{i\theta}.$$

Si ha quindi:

$$f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Se

$$B(0,1) = \{z \in C : |z| < 1\}.$$

e se:

$$V = C - \overline{B}(0,1).$$

,dalla formula precedente vediamo che ogni punto di $B(0,1)$ viene mandato in V e viceversa. I punti della circonferenza unitaria rimangono sulla circonferenza unitaria, ma ***non sono*** *,generalmente parlando,* ***punti fissi***. *Questi ultimi sono solo quelli per i quali si ha che:*

$$e^{i\theta} = e^{-i\theta}$$

e quindi solo il punto $(1,0)$ è ***fisso***.

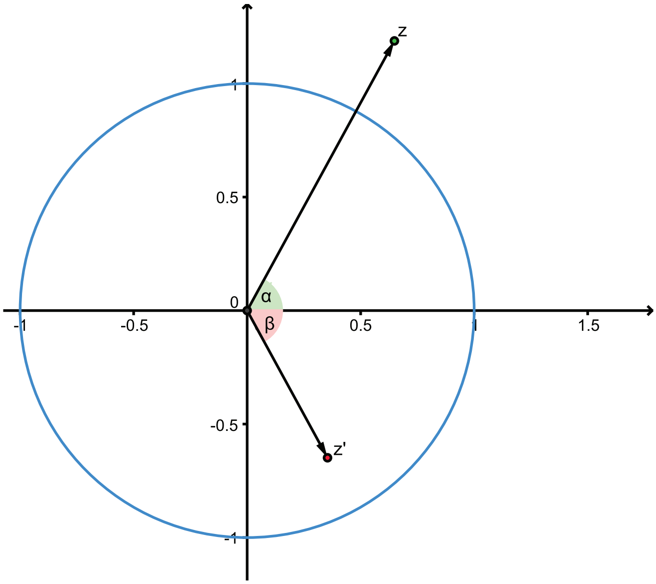

Figura 2.1: La funzione f manda i punti esterni alla circonferenza nel suo interno e viceversa. La circonferenza è un insieme fisso per la funzione ma i suoi punti,in generale, non sono punti fissi

2.2 Successioni

Esercizio 2.2.1. *Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è tale per cui $|z| < 1$ allora:*

$$\exists \lim_{n \to +\infty} z_n = 0.$$

Soluzione 2.2.1. *E' sufficiente provare che:*

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n - 0| = 0.$$

A tale scopo osserviamo che:

$$|z_n - 0| = |z^n| = |z|^n .$$

Ma

$$|z| < 1 \Rightarrow |z| = h.$$

dove $0 \leq h < 1$ *e quindi:*

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = \lim_{n\to+\infty} h^n = 0.$$

Da ciò si ha la tesi.

Esercizio 2.2.2. *Determinare per quali valori di* $z \in \mathbb{C}$ *esiste il*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l \in \mathbb{C}.$$

Soluzione 2.2.2. *Osserviamo che se il limite suddetto esiste, allora si ha che:*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |l| \in \mathbb{R}_0^+.$$

Ma:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |nz^n| = \lim_{n\to\infty} n\,|z|^n.$$

Se $|z| \geq 1$*, certamente il limite suddetto* ***non esiste*** *e quindi* ***non esiste*** *nemmeno il limite proposto. D'altra parte se* $0 \leq |z| < 1$ *si ha che:*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |nz^n| = \lim_{n\to\infty} n\,|z|^n = 0.$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0.$$

In tal caso si può affermare che:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Esercizio 2.2.3. *Dimostrare che non esiste il*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$$

Soluzione 2.2.3. *Poichè:*

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left[\frac{(1+i)\,(1+i)}{2}\right]^n = (i)^n = \begin{cases} 1 & se\ n \equiv 0 \mod 4 \\ i & se\ n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & se\ n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & se\ n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

il limite globale ***non esiste****.*

Esercizio 2.2.4. *Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è tale per cui $|z| < 1$ allora, posto:*

$$z_n = 1 + z + \cdots z^n.$$

si ha che:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{1}{1-z}.$$

Soluzione 2.2.4. *Osserviamo che:*

$$zz_n = z + z^2 + \cdots z^{n+1}.$$

e dunque:

$$z_n - zz_n = (1 + z + \cdots z^n) - \left(z + z^2 + \cdots z^{n+1}\right) = 1 - z^{n+1}.$$

da cui:

$$z_n (1 - z) = 1 - z^{n+1}.$$

Certamente, nell'ipotesi $|z| < 1$, si ha che $1 - z \neq 0$ e dunque:

$$z_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Poichè, in base all'esercizio 2.2.1 si ha che:

$$\lim_{n \to +\infty} z^{n+1} = 0.$$

e quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

che è la tesi.

Esercizio 2.2.5. *Sia $(z_n)_n$ una successione di numeri complessi tale che:*

$$z_n = \frac{(1+i)^n}{n}.$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \infty.$$

Soluzione 2.2.5. *In base alla definizione dovremmo provare che:*

$$\forall M > 0 \; \exists \, n(M) : \forall n > n(M) \Rightarrow |z_n| > M.$$

Poichè:

$$|z_n| = \frac{1}{n} \left| (1+i)^n \right|.$$

si ha:

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = \sqrt{2^n} = 2^{\frac{n}{\cdot}2}$$

e quindi:

$$|z_n| = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n}.$$

Poichè, dai corsi di ***Analisi Reale****, è noto che:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$$

si ha che:

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty.$$

da cui la tesi.

2.3 Limiti

Esercizio 2.3.1. *Dimostrare che:*

$$\nexists \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}.$$

Soluzione 2.3.1. *Sia $z = x + iy$. Ne segue che:*

$$\frac{\overline{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy}.$$

Supponiamo che sia $y = 0$. Allora $z = x$ e quindi si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

D'altra parte, se $x = 0$ abbiamo $z = iy$ e quindi:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Poichè i due limiti sono diversi, ***non esiste*** *il limite globale.*

Esercizio 2.3.2. *Sia:*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 z}.$$

Dimostrare che f è la funzione caratteristica dell'insieme:

$$A = \{0\}$$

Soluzione 2.3.2. *Chiaramente se $z = 0$ si ha $f(0) = 1$. Supponiamo ora che sia $z \neq 0$; per n sufficientemente grande si ha:*

$$\left|1+n^2 z\right| \geq \left|n^2 z\right| - 1 = n^2 |z| - 1 \geq \frac{1}{2} n^2 |z|.$$

e quindi:

$$\frac{1}{|1+n^2 z|} \leq \frac{2}{n^2 |z|}.$$

e dunque:

$$|f(z)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1+n^2 z|} = 0.$$

da cui la tesi.

Esercizio 2.3.3. *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione di variabile complessa. Supponiamo che:*

$$\exists \lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$$

Dimostrare che:

$$\exists \lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = l \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 2.3.3. *In base alla definizione di limite si ha che:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - A| \leq \varepsilon$$

Ma:

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow ||w_1| - |w_2|| \leq |w_1 - w_2| \, .$$

e quindi:

$$||f(z)| - |A|| \leq |f(z) - A| \leq \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |A| = l \in \mathbb{R}.$$

Nota 2.3.1. ***Attenzione***: *in generale* ***non vale*** *il viceversa. In altre parole se:*

$$\exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = l \in \mathbb{R}.$$

non è affatto detto che:

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}.$$

Contresempio:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Si osservi però che se:

$$\exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| = 0$$

allora:

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = 0$$

Infatti, l'ipotesi significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||f(z)| - 0| \leq \varepsilon$$

ma:

$$||f(z)| - 0| = ||f(z)|| = |f(z)|$$

e quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - 0| \leq \varepsilon$$

e dunque la tesi.

Esercizio 2.3.4. *Stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè*
$$\lim_{r\to+\infty} e^{re^{i\theta}} = l \in \mathbb{C}.$$

Soluzione 2.3.4. *Stabiliamo dapprima una condizione* ***necessaria****: se il limite suddetto esiste allora deve esistera anche:*
$$\lim_{r\to+\infty} \left| e^{re^{i\theta}} \right|.$$

e si deve avere
$$\lim_{r\to+\infty} \left| e^{re^{i\theta}} \right| = |l|.$$

Poichè:
$$\left| e^{r\cos\theta} e^{ri\sin\theta} \right| = \left| e^{r\cos\theta} \right| \left| e^{ri\sin\theta} \right| = \left| e^{r\cos\theta} \right|.$$

si dovrà avere:
$$\lim_{r\to+\infty} \left| e^{r\cos\theta} \right| = |l|.$$

e quindi:
$$\cos\theta \leqslant 0.$$

da cui:
$$\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

Stabiliamo ora una condizione ***sufficiente****: supponiamo che sia:*
$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi.$$

Allora, siccome:
$$\lim_{r\to+\infty} \left| e^{r\cos\theta} \right| = 0.$$

si avrà che:
$$\lim_{r\to+\infty} e^{re^{i\theta}} = 0.$$

Nei casi in cui $\cos\theta = 0$, *si ha:*
$$e^{re^{i\theta}} = e^{\pm ri}.$$

Se scegliamo allora:

$$r = r_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha:

$$e^{re^{i\theta}} = e^{\pm ri} = e^{\pm n\pi i} = \cos(\pm n\pi) + i\sin(\pm n\pi) = (-1)^n.$$

e quindi:

$$\lim_{r\to+\infty} \sup e^{re^{i\theta}} = \lim_{n\to+\infty} \sup(-1)^n = 1$$
$$\lim_{r\to+\infty} \inf e^{re^{i\theta}} = \lim_{n\to+\infty} \inf(-1)^n = -1$$

e dunque ***non esiste****, in tali casi,*

$$\lim_{r\to+\infty} e^{re^{i\theta}}$$

Pertanto ***condizione necessaria e sufficiente*** *affinchè* ***esista finito*** *il limite proposto è:*

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

2.4 Continuità

Esercizio 2.4.1. *Si dimostri che la funzione:*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z^2}-z^2}{z} & se\ z \neq 0 \\ 0 & se\ z = 0 \end{cases}$$

è ***continua*** *in $z = 0$.*

Soluzione 2.4.1. *Posto:*

$$z = (x + iy)$$
$$\overline{z} = (x - iy)$$

si ha:

$$f(z) = \frac{\overline{z^2} - z^2}{z} = \frac{(\overline{z} + z)(\overline{z} - z)}{z} = \frac{(2x)(-2iy)}{x + iy} = -4i\frac{xy(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

Passando in coordinate polari si ha:

$$\frac{xy\,(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{(r^3\cos\theta\sin\theta)\,(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$$

da cui:

$$|f(z)| = |(r\cos\theta\sin\theta)\,(\cos\theta - i\sin\theta)| \leq r\,|\sin\theta\cos\theta|\,\{|\cos\theta| + |\sin\theta|\} \leq 2r$$

e quindi:

$$\lim_{z\to 0}|f(z)| \leq \lim_{r\to 0} 2r = 0.$$

Allora:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0).$$

e quindi f è continua in $z = 0$.

Esercizio 2.4.2. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\overline{z}}{1-z} & se\ z \neq 1 \\ l & se\, z = 1 \end{cases}$$

***non può** essere resa **continua** in $z = 1$ per nessun valore di l.*

Soluzione 2.4.2. *Sia $z = 1 + x \neq 1$. Allora:*

$$f(z) = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

e quindi:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z=1+x\in R}} f(z) = 1.$$

D'altra parte se, $z = 1 + iy$ si ha:

$$f(z) = \frac{1-1-iy}{1-1-iy} = -1.$$

e quindi:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z=1+iy}} f(z) = -1$$

*Pertanto **non esiste** il*

$$\lim_{z\to 1} f(z)$$

*e quindi la funzione **non può essere resa continua** per alcuna scelta di l.*

2.5 Funzioni elementari

2.5.1 Funzione esponenziale

Ricordiamo preliminarmente la definizione di esponenziale complesso:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Esercizio 2.5.1. *Calcolare:*

$$e^{\frac{1+\pi i}{4}}.$$

Soluzione 2.5.1. *Si ha:*

$$e^{\frac{1+\pi i}{4}} = e^{\frac{1}{4}+\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{1}{4}} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Esercizio 2.5.2. *Sia:*

$$f(z) = e^{2\pi i z}.$$

e sia:

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y \geq b > 0\right\}.$$

Trovare l'immagine di A mediante f.

Soluzione 2.5.2. *Scriviamo:*

$$f(z) = e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y} e^{2\pi x i}.$$

Le condizioni su x e y ci dicono che:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\pi \leq 2\pi x \leq \pi \\ y \geq b \Rightarrow -2\pi y \leq -2\pi b \end{cases}$$

Siccome:

$$|f(z)| = \left|e^{-2\pi y} e^{2\pi x i}\right| = e^{-2\pi y} \left|e^{2\pi x i}\right| = e^{-2\pi y}.$$

avremo che tutti i valori di $f(z)$ sono contenuti nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = e^{-2\pi b}$ e tra questi valori non vi è lo 0 perchè $e^{-2\pi y} > 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Osserviamo poi che:

$$\arg f(z) = 2\pi x.$$

e che esso assume tutti i valori fra $-\pi$ e π. Quindi l'insieme A è trasformato nell'insieme

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq e^{-2\pi b} \right\}$$

Esercizio 2.5.3. *Dimostrare che:*

$$\overline{e^{iz}} = e^{-i\overline{z}}.$$

Soluzione 2.5.3. *Si ha:*

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

da cui:

$$\overline{e^{iz}} = e^{-y}(\cos x - i \sin x).$$

D'altra parte:

$$e^{-i\overline{z}} = e^{-i(x-iy)} = e^{-ix-y} = e^{-y}(\cos x - i \sin x).$$

da cui la tesi.

Esercizio 2.5.4. *Dimostrare che in $\mathbb{C}$ si ha:*

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Soluzione 2.5.4. *Consideriamo:*

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} - 1.$$

e dimostriamo che:

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = 0.$$

da ciò seguirà subito la tesi. Se $z = re^{i\theta}$ si ha:

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = \frac{e^{re^{i\theta}} - 1}{re^{i\theta}} - 1 = \frac{e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - 1 - re^{i\theta}}{re^{i\theta}}.$$

e quindi:

$$\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| = \frac{\left|e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - 1 - re^{i\theta}\right|}{r}.$$

*Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin dell'**esponenziale reale** si ha:*

$$e^{r\cos\theta} = 1 + r\cos\theta + O\left(r^2\right).$$

Da ciò segue che:

$$e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} = \left[1 + r\cos\theta + O\left(r^2\right)\right]e^{ir\sin\theta} = e^{ir\sin\theta} + r\cos\theta + O\left(r^2\right).$$

da cui:

$$\left|e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - 1 - re^{i\theta}\right| =$$

$$= \left|\left\{r\cos\theta\left(e^{ir\sin\theta} - 1\right)\right\} + \left\{e^{ir\sin\theta} - ri\sin\theta - 1\right\} + O\left(r^2\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|r\cos\theta\left(e^{ir\sin\theta} - 1\right)\right| + \left|e^{ir\sin\theta} - ri\sin\theta - 1\right| + O\left(r^2\right) \leq$$

$$\leq \left|r\cos\theta\right|\left|\left(e^{ir\sin\theta} - 1\right)\right| + \left|e^{ir\sin\theta} - ri\sin\theta - 1\right| + O\left(r^2\right) \leq$$

$$\leq r\left|\left(e^{ir\sin\theta} - 1\right)\right| + \left|e^{ir\sin\theta} - ri\sin\theta - 1\right| + O\left(r^2\right).$$

Ma:

$$e^{ir\sin\theta} = \cos\left(r\sin\theta\right) + i\sin\left(r\sin\theta\right).$$

*e quindi, sfruttando gli sviluppi del **seno e del coseno reali**, si ha:*

$$\cos\left(r\sin\theta\right) = 1 - \frac{r^2\sin^2\theta}{2} + O\left(r^4\right).$$

$$\sin\left(r\sin\theta\right) = r\sin\theta + O\left(r^3\right).$$

Ne segue che:

$$\left|e^{ir\sin\theta} - 1\right| \leq \frac{r^2\sin^2\theta}{2} + r\left|\sin\theta\right| + O\left(r^3\right) \leq r^2 + r + O\left(r^3\right).$$

e che:

$$\left|e^{ir\sin\theta} - ri\sin\theta - 1\right| \leq \frac{r^2\sin^2\theta}{2} + O\left(r^3\right) \leq \frac{r^2}{2} + O\left(r^3\right).$$

da cui

$$\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \leq r\left(r^2 + r + O\left(r^3\right)\right) + \frac{r^2}{2} + O\left(r^3\right) = \frac{3r^2}{2} + O\left(r^3\right)$$

Poichè:

$$\lim_{r\to 0}\frac{3r^2}{2} + O\left(r^3\right) = 0.$$

uniformemente *in θ, si ha che:*

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| = 0.$$

da cui la tesi.

Esercizio 2.5.5. *Dimostrare che in $\mathbb{C}$ si ha:*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$$

Soluzione 2.5.5. *Poichè:*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

si ha:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} = \frac{e^{iz} - 1 + 1 - e^{-iz}}{2iz} = \frac{1}{2}\frac{e^{iz} - 1}{iz} + \frac{1}{2}\frac{e^{-iz} - 1}{-iz}.$$

e siccome, dall'esercizio precedente:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz} - 1}{2iz} = \frac{1}{2}.$$

ed inoltre:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{-iz} - 1}{-iz} = \frac{1}{2}.$$

si ottiene subito la tesi.

Esercizio 2.5.6. *Dimostrare che in $\mathbb{C}$ si ha:*

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z} = 0.$$

Soluzione 2.5.6. *Poichè:*

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

avremo:

$$\frac{1-\cos z}{z} = \frac{1-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{z} = \frac{2-e^{iz}-e^{-iz}}{2z} = \frac{1-e^{iz}+1-e^{-iz}}{2z} =$$

$$= \frac{1-e^{iz}}{2z} + \frac{1-e^{-iz}}{2z}$$

$$= i\frac{1-e^{iz}}{2zi} - \frac{e^{-iz}-1}{2zi}i =$$

$$= i\left[\frac{1-e^{iz}}{2zi} - \frac{e^{-iz}-1}{2zi}\right] = i\left[\frac{1}{2}\frac{1-e^{iz}}{zi} + \frac{1}{2}\frac{e^{-iz}-1}{-zi}\right].$$

e siccome:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-e^{iz}}{zi} = -1.$$

e

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{-iz}-1}{-zi} = 1.$$

si ha subito la tesi.

2.5.2 Funzioni goniometriche

Ricordiamo che le **funzioni goniometriche** in $\mathbb{C}$ sono definite da:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

$$\cot z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Esercizio 2.5.7. *Dimostrare che la funzione*

$$f(z) = \sin z$$

ammette soltanto zeri reali che sono dati da $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Soluzione 2.5.7. *Sia $z = x + iy$ tale che $\sin z = 0$. In questo caso abbiamo:*

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0.$$

e dunque:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0.$$

Ma:

$$e^{iz} - e^{-iz} = e^{ix-y} - e^{-ix-y} = e^{-y}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) =$$

$$= e^{-y}\left[\cos x + i\sin x - \cos(-x) - i\sin(-x)\right] =$$

$$= e^{-y}\left[\cos x + i\sin x - \cos(x) + i\sin(x)\right] = 2ie^{-y}\sin x.$$

e quindi avremo:

$$2ie^{-y}\sin x = 0.$$

Poichè per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $e^{-y} \neq 0$ ne segue che dovrà essere $\sin x = 0$ con $x \in \mathbb{R}$ e questo prova la tesi.

Nota 2.5.1. *Con lo stesso procedimento si dimostra che anche la funzione $f(z) = \cos z$ ammette solo zeri reali che sono dati da $\pi/2 + n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$.*

Esercizio 2.5.8. *Dimostrare vale la relazione:*

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione 2.5.8. *Si ha*

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \left(-\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4}\right)$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}\right)$$

da cui

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(-\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

Esercizio 2.5.9. *Dimostrare che* $f(z) = \sin z$ *non è una funzione limitata in* $\mathbb{C}$.

Soluzione 2.5.9. *Scegliamo* $z = iy$ *con* $y \in \mathbb{R}$. *Allora:*

$$\sin z = \sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}.$$

e quindi:

$$|\sin iy| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right|.$$

Pertanto:

$$\lim_{y \to +\infty} |\sin iy| = \lim_{y \to +\infty} \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right| = +\infty.$$

e dunque $\sin z$ *non è una funzione limitata in* $\mathbb{C}$.

Esercizio 2.5.10. *Sia:*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ |y| \le h\,,\ h \ge 0\}\,.$$

Dimostrare che:

$$|\sin z| \le 1\ \ \forall z \in A \Rightarrow h = 0.$$

Soluzione 2.5.10. *Si ha:*

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right|.$$

e dunque

$$|\sin z| \le 1 \Leftrightarrow \left| e^{iz} - e^{-iz} \right| \le 2.$$

Ma:

$$\left| e^{iz} - e^{-iz} \right| \le 2 \Leftrightarrow \left(e^{iz} - e^{-iz} \right) \overline{\left(e^{iz} - e^{-iz} \right)} \le 4.$$

Siccome:

$$\begin{aligned}
\left(e^{iz} - e^{-iz} \right) \overline{\left(e^{iz} - e^{-iz} \right)} &= \left(e^{iz} - e^{-iz} \right) \left(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}} \right) = \\
&= e^{iz} e^{-i\overline{z}} - e^{iz} e^{i\overline{z}} - e^{-iz} e^{-i\overline{z}} + e^{-iz} e^{i\overline{z}} = \\
&= e^{i(z-\overline{z})} - e^{i(z+\overline{z})} - e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}. \\
&= \left(e^{2y} + e^{-2y} \right) - \left(e^{i2x} + e^{-i2x} \right).
\end{aligned}$$

si dovrà avere che:

$$\left(e^{2y} + e^{-2y} \right) - \left(e^{i2x} + e^{-i2x} \right) \le 4.$$

per ogni $z = x + iy \in A$. In modo equivalente possiamo scrivere:

$$\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} \right) - \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right) \le 2.$$

per ogni $z = x + iy \in A$. Allora:

$$\cosh 2y - \cos 2x \le 2 \tag{2.1}$$

per ogni $z = x + iy \in A$. Se $h > 0$ allora possiamo scegliere $y = h/2 > 0$. In questo caso si ha $k = \cosh 2y > 1$. Scelto allora $x = \frac{3}{4}\pi$ si avrebbe:

$$\cosh 2y - (-1) = k + 1 > 2.$$

contro la (2.1) e questo è assurdo. Dunque deve essere $h = 0$.

Nota 2.5.2. *Il precedente esercizio mostra che in* ***nessuna*** *striscia A simmetrica rispetto all'origine, di ampiezza positiva h si può avere $|\sin z| \le 1$ per ogni $z \in A$.*

2.5.3 Funzioni iperboliche

Ricordiamo che le **funzioni iperboliche** sono definite da:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad .$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

$$\sec hz = \frac{2}{e^z + e^{-z}}.$$

$$\mathrm{csch} z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}.$$

$$\coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Esercizio 2.5.11. *Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Soluzione 2.5.11. *Si ha:*

$$\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Esercizio 2.5.12. *Dimostrare che:*

$$\sin iz = i \sinh z.$$

Soluzione 2.5.12. *Si ha:*

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{i(-iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i\frac{e^{-z} - e^z}{-2} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z.$$

Nota 2.5.3. *In modo del tutto analogo si provano le seguenti identità:*

$$\sinh iz = i \sin z$$

$$\cos iz = \cosh z$$

$$\cosh iz = i \cos z$$

$$\tan iz = i \tanh z$$

$$\tanh iz = i \tan z$$

2.5.4 Esercizi vari

Esercizio 2.5.13. *Dimostrare che se $0 < \theta < 2\pi$ allora si ha:*

$$1 + \cos\theta + \cdots \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Soluzione 2.5.13. *Ricordiamo che se $z \neq 1$ allora si ha:*

$$1 + z + \cdots z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

e poniamo $z = e^{i\theta}$, osservando che date le ipotesi su θ risulta certamente vero che $z \neq 1$. Siccome, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta.$$

avremo che:

$$1 + \cos\theta + \cdots \cos n\theta = \mathrm{Re}\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Ma:

$$1 + e^{i\theta} + \cdots e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

e siccome:

$$\frac{e^{i\theta(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}i(n+1)\theta}\left(e^{\frac{1}{2}i(n+1)\theta}-e^{-\frac{1}{2}i(n+1)\theta}\right)}{e^{\frac{1}{2}i\theta}\left(e^{\frac{1}{2}i\theta}-e^{-\frac{1}{2}i\theta}\right)}.$$

dividendo numeratore e denominatore per $2i$ *si ha:*

$$\frac{e^{i\theta(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{\frac{1}{2}in\theta}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Ma:

$$e^{\frac{1}{2}in\theta} = \cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}.$$

e quindi:

$$\frac{e^{i\theta(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1} = \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

da cui:

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}.$$

Ricordando allora che, per ogni $\alpha\ \beta \in \mathbb{R}$ *si ha:*

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

e posto:

$$\alpha = \tfrac{(n+1)\theta}{2}$$

$$\beta = \tfrac{n\theta}{2}$$

si ottiene:

$$\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

da cui:

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta(n+1)}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

e quindi la tesi.

2.6 Funzioni a più valori

2.6.1 Il logaritmo

Ricordiamo che se $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, la funzione a **più valori**:

$$Log z = \log r + i\left(\theta + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

dove:

$$\begin{array}{l} r = |z| \\ \theta \in (-\pi, \pi] \end{array}$$

Ricordiamo inoltre che:

$$\log z = \log r + i\theta$$

si chiama **ramo principale** del **logaritmo complesso**.

Esercizio 2.6.1. *Data la funzione a più valori:*

$$w = Log\,(z)$$

determinare:

$$Log\,(1+i)$$

Soluzione 2.6.1. *Siccome:*

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

avremo:

$$Log\,(1+i) = \log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi i\right)\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.6.2. *Sia:*

$$f(z) = \log z.$$

*il ramo principale del logaritmo complesso. Dimostrare che **non sempre** vale le proprietà:*

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2.$$

Soluzione 2.6.2. *Si considerino* $z_1 = i$ $z_2 = -1$. *In questo caso si ha:*

$$\log z_1 z_2 = \log(-i) = \log 1 - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}.$$

mentre:

$$\log z_1 = \log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}.$$

ed inoltre:

$$\log z_2 = \log(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi.$$

da cui:

$$\log z_1 z_2 \neq \log z_1 + \log z_2.$$

2.6.2 Le potenze

Esercizio 2.6.3. *Calcolare:*

$$i^i.$$

Soluzione 2.6.3. *Per definizione si ha che:*

$$i^i = e^{iLogi} = e^{i\left[\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.6.4. *Generalizzare il risultato precedente:*

Soluzione 2.6.4. *Si avrà:*

$$z^i = e^{-(\theta + 2k\pi)} \left[\cos\left(\log r\right) + i \sin\left(\log r\right)\right] \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2.6.5. *Esprimere:*

$$f(z)^{g(z)}.$$

mediante l'uso del logaritmo complesso.

Soluzione 2.6.5. *Si avrà:*

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) Log f(z)}.$$

e posto:

$$f(z) = r\left(z\right) e^{i\theta(z)}.$$

avremo

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z)\{\log r(z) + i[\theta(z) + 2k\pi i]\}} \ k \in \mathbb{Z}.$$

Capitolo 3

La derivata complessa

3.1 Applicazione della definizione

Esercizio 3.1.1. *Dimostrare che la funzione* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tale che* $f(z) = z^2$ *è derivabile in ogni punto* $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione 3.1.1. *Sia* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Allora si ha che per ogni* $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = z + z_0$$

e quindi:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 2z_0.$$

Dunque la derivata di $f(z)$ *esiste in ogni punto del piano complesso e vale* $f'(z) = 2z$.

Esercizio 3.1.2. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = e^z.$$

è derivabile in $z = 0$.

Soluzione 3.1.2. *In base alla definizione di derivata, dobbiamo dimostrare che esiste il limite di:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = l \in \mathbb{C}$$

essendo $h \in \mathbb{C}$. Siccome $f(0) = 1$ si deve far vedere che esiste:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \ .$$

con $h \in \mathbb{C}$. Ma questo limite è già stato studiato nell'esercizio 2.5.3 e si sa che vale 1. *Quindi: $f'(0) = 1$.*

Esercizio 3.1.3. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = \sin z.$$

è derivabile in $z = 0$.

Soluzione 3.1.3. *Si procede come nell'esercizio precedente utilizzando però l'esercizio 2.5.5 e si trova $f'(0) = 1$.*

Esercizio 3.1.4. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = \cos z.$$

è derivabile in $z = 0$.

Soluzione 3.1.4. *Si procede come nell'esercizio precedente utilizzando però l'esercizio 2.5.6 e si trova $f'(0) = 0$.*

Esercizio 3.1.5. *Fornire un esempio di una funzione continua su tutto $\mathbb{C}$ e non derivabile in alcun punto.*

Soluzione 3.1.5. *Si consideri la funzione:*

$$f(z) = \overline{z}.$$

definita su tutto $\mathbb{C}$. Per quanto riguarda la continuità si consideri z_0 qualsiasi: dobbiamo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f\,(z) - f\,(z_0)| < \varepsilon$$

Poichè:

$$|f\,(z) - f\,(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

sarà sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$. *D'altra parte.*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{\left(\overline{z - z_0}\right)^2}{(z - z_0)\left(\overline{z - z_0}\right)} = \frac{\left(\overline{z - z_0}\right)^2}{|z - z_0|^2}.$$

Poniamo allora:

$$z = z_0 + h \quad h \in \mathbb{C}.$$

Se $h = ik$ *con* $k \in \mathbb{R}$. *Si ha*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\left(\overline{h}\right)^2}{|h|^2} = \frac{(-ik)^2}{|ik|^2} = \frac{-k^2}{k^2} = -1$$

e quindi:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(z_0 + ik) - f(z_0)}{ik} = -1$$

Se però poniamo:

$$z = z_0 + h \quad h \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(h)^2}{|h|^2} = \frac{(h)^2}{|h|^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

e quindi

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1.$$

da cui si vede che la funzione non è derivabile in alcun punto.

Esercizio 3.1.6. *Fornire un esempio di una funzione continua in ogni punto di* $\mathbb{C}$ *e derivabile solo in un punto.*

Soluzione 3.1.6. *Consideriamo la funzione*

$$f(z) = |z|^2$$

definita su tutto $\mathbb{C}$ *e dimostriamo che essa è ovunque continua ma derivabile solo in* $z = 0$. *Per quanto riguarda la continuità si consideri* z_0 *qualsiasi: dobbiamo provare che*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon) : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Si ha:

$$|f(z) - f(z_0)| = \left||z|^2 - |z_0|^2\right| =$$

$$= |z\bar{z} - z_0\overline{z_0}| = \left|(z_0 + h)\left(\overline{z_0} + \bar{h}\right) - z_0\overline{z_0}\right|$$

da cui:

$$|f(z) - f(z_0)| = \left|h\overline{z_0} + z_0\bar{h} + h\bar{h}\right| \leq$$

$$\leq |h|\,|\overline{z_0}| + \left|\bar{h}\right|\,|z_0| + |h|^2 = 2\,|h|\,|z_0| + |h|^2$$

e quindi:

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |h|\,(2\,|z_0| + |h|)$$

Se $z_0 = 0$ *si avrà:*

$$|f(z) - f(0)| \leqslant |h|^2$$

e quindi basterà prendere $\delta < \sqrt{\varepsilon}$. *Se* $z_0 \neq 0$ *scelto* $|h| \leqslant |z_0|$ *si avrà che*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant 3\,|h|\,|z_0|$$

e quindi basterà prendere $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ *Quindi* f *è continua in ogni punto di* $\mathbb{C}$. *D'altra parte*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \frac{(z\overline{z}) - (z_0\overline{z_0})}{z - z_0}$$

e quindi posto $z = z_0 + h$ *si ha*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z_0 + h)\left(\overline{z_0 + h}\right) - z_0\overline{z_0}}{h} = \frac{(z_0 + h)\left(\overline{z_0} + \overline{h}\right) - z_0\overline{z_0}}{h}$$

da cui

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z_0\overline{z_0} + h\overline{z_0} + z_0\overline{h} + h\overline{h} - z_0\overline{z_0}}{h} = \overline{z_0} + \frac{z_0\overline{h}}{h} + \overline{h}$$

e siccome

$$\nexists \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

si avrà che

$$\nexists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a meno che $z_0 = 0$ *nel qual caso si ha*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

Dunque la funzione è derivabile solo in $z_0 = 0$.

Nota 3.1.1. *In **Analisi Reale** risultati di questo tipo sono molto più difficili da ottenere. Per esempio è noto che esistono funzioni di variabile reale che sono continue in ogni punto ma che non hanno derivata in nessuno di essi. Il primo esempio in questo senso fu fornito da **K. Weierstrass** ed è costruito mediante una **serie trigonometrica**. Il più semplice, noto a chi scrive, è dovuto a **B. Van der Waerden** ed è anch'esso ottenuto mediante una funzione definita mediante una serie:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(2^n x)}{2^n}.$$

dove $\phi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m.|$. *Si dimostra, non senza un po' di fatica, che tale funzione è continua su tutto* $\mathbb{R}$ *e **non derivabile** in alcun punto.*

3.2 Equazioni di Cauchy-Riemann

Esercizio 3.2.1. *Verificare che la funzione:*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

*verifica le equazioni di **Cauchy-Riemann**.*

Soluzione 3.2.1. *Si ha:*

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}$$

e quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Inoltre:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Complessivamente si ha quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

che costituiscono appunto le equazioni di ***Cauchy-Riemann***.

Nota 3.2.1. *Si osservi che la funzione data può essere scritta come:*

$$f(z) = z^2.$$

essendo $z = x + iy$. In altre parole possiamo scrivere la funzione data come funzione della variabile complessa $z = x + iy$. Questo fatto ***non è*** *casuale.*

Esercizio 3.2.2. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = 3z^2 + \overline{z}.$$

non è analitica.

Soluzione 3.2.2. ***Un primo modo*** *per risolvere l'esercizio è il seguente:*

$$\begin{aligned} f(z) = f(x,y) = 3\,(x+iy)^2 + (x-iy) = \\ = (3x^2 - 3y^2 + x) + i\,(6xy - y) \end{aligned}$$

e si osserva che:

$$\begin{cases} u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + x \\ \\ v(x,y) = 6xy - y \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 1 \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 6x - 1 \end{cases}$$

e quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

*per cui le equazioni di **Cauchy-Riemann non sono** verificate. Un secondo e più rapido modo di risolvere l'esercizio consiste nell'osservare che:*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$$

*e quindi la funzione **non è** analitica.*

Esercizio 3.2.3. *Trovare le **armoniche coniugate** della funzione:*

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2 y$$

Soluzione 3.2.3. *Per **definizione**, una funzione **armonica coniugata** di $u(x,y)$ è tale se:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Nel nostro caso, utilizzando la prima di tali equazioni, otteniamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

*dove, per ora, $f(x)$ è una funzione arbitraria. Utilizzando ora la **seconda equazione** si ha:*

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - f'(x).$$

da cui:

$$f'(x) = 3x^2.$$

e quindi:

$$f(x) = x^3 + c.$$

con $c \in \mathbb{R}$. *Allora avremo che le armoniche coniugate di* u *hanno la forma:*

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + c.$$

Nota 3.2.2. *La corrispondente funzione analitica è:*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e quindi:

$$f(z) = \left(y^3 - 3x^2y\right) + i\left(-3xy^2 + x^3 + c\right).$$

E' allora facile verificare che:

$$f(z) = i(z^3 + c).$$

Esercizio 3.2.4. *Dimostrare che la funzione:*

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2).$$

è armonica sul dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ *ma che in tale dominio* ***non può essere*** *la parte reale di una funzione analitica.*

Soluzione 3.2.4. *Poichè:*

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2).$$

si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Tenuto conto delle equazioni di ***Cauchy-Riemann****, si ha allora:*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

da cui:

$$v(x,y) = 2arctg(\frac{y}{x}) + f(x).$$

Questo prova che le armoniche coniugate ***non sono*** *definite su tutta la retta $x = 0$. Quindi la funzione data* ***non può essere*** *la parte reale di una funzione analitica definita su $\mathbb{C} - \{0\}$.*

Esercizio 3.2.5. *Sia $z = x + iy$ e sia:*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

una funzione per la quale $u(x,y)$ e $v(x,y)$ ammettono derivate parziali prime. Siano:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

Dimostrare che se f verifica le equazioni di ***Cauchy-Riemann*** *allora si ha:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

e viceversa.

Soluzione 3.2.5. *Siccome valgono le equazioni di* ***Cauchy-Riemann*** *si ha:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Allora:

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

Poichè ogni passaggio può essere invertito vale anche il viceversa.

Esercizio 3.2.6. *Sia:*

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\left(z^{-4}\right)} & se\ z \neq 0 \\ 0 & se\ z = 0 \end{cases}$$

dimostrare che le equazioni di ***Cauchy-Riemann*** *sono soddisfatte ma la funzione* ***non è analitica****.*

Soluzione 3.2.6. *Supponiamo dapprima che $z = x+iy$ sia diverso da 0. Poniamo:*

$$g(x,y) = -\left(x+iy\right)^{-4}.$$

in modo da poter scrivere:

$$f(z) = e^{g(x,y)}.$$

Si ha pertanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{g(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y).$$

Ma, per la regola della catena, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 4\left(x+iy\right)^{-5} = 4z^{-5}.$$

e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4z^{-5} e^{-\left(z^{-4}\right)}.$$

In modo analogo avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{g(x,y)} \frac{\partial}{\partial y} g(x,y).$$

e siccome:

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 4i\left(x+iy\right)^{-5} = 4iz^{-5}.$$

sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4iz^{-5} e^{-\left(z^{-4}\right)}.$$

Pertanto, in questo caso, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

e quindi se $z \neq 0$ la funzione ***verifica*** *le equazioni di Cauchy-Riemann. Facciamo vedere che esse sono verificate anche per $z = 0$. Per fare ciò dobbiamo calcolare le derivate parziali di f in* ***base alla definizione****. Abbiamo:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \qquad h \in \mathbb{R}.$$

e dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^4}}}{h} = 0.$$

In modo analogo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+ik) - f(0)}{k} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

e dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{k^4}}}{k} = 0.$$

Quindi anche in $z = 0$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pertanto la funzione data verifica le equazioni di Cauchy-Riemann in tutto $\mathbb{C}$*. Tuttavia la funzione* ***non è analitica*** *perchè in $z = 0$* ***non è neppure continua****.Per dimostrare ciò consideriamo la successione:*

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

E' evidente che:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0.$$

tuttavia:

$$f(z_n) = e^{-in^4}.$$

e quindi:

$$|f(z_n)| = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e pertanto ***non può essere*** *che:*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 = f(0).$$

e quindi la funzione ***non è continua*** *in $z = 0$.*

Nota 3.2.3. *Il precedente esercizio mostra che, senza ulteriori condizioni, le equazioni di* ***Cauchy-Riemann non sono sufficienti*** *a garantire l'analiticità.*

Esercizio 3.2.7. *Si consideri la funzione:*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & se \ \ z \neq 0 \\ 0 & se \ \ z = 0 \end{cases}$$

e si dimostri che essa verifica le equazioni di ***Cauchy-Riemann*** *ma* ***non è derivabile*** *in senso complesso in $z = 0$.*

Soluzione 3.2.7. *Calcoliamo:*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \quad h \in \mathbb{R}$$

Poichè $h \in \mathbb{R}$ si ha:

$$g(h) = \frac{h^5}{|h|^4} = \frac{h^5}{h^4} = h.$$

e quindi:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \quad h \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+ik) - g(0)}{k} \quad k \in \mathbb{R}.$$

e siccome:

$$g(ik) = \frac{ik^5}{k^4} = ik.$$

si avrà:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{ik}{k} \ = i \ \ k \in \mathbb{R}.$$

e dunque:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0) = i \frac{\partial g}{\partial x}(0)$$

*e pertanto in $z = 0$ valgono le equazioni di **Cauchy-Riemann**. Tuttavia non esiste il*

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \quad h \in \mathbb{C}.$$

Infatti consideriamo la successione di $\mathbb{C}$ $h = 1/n$ $n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{h^5}{|h|^4}}{h} = 1.$$

D'altra parte, se prendiamo:

$$h = \frac{e^{i\pi/8}}{n} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{h^5}{|h|^4}}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{h^4}{|h|^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{e^{i\pi/2}}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = i.$$

*Pertanto le equazioni di **Cauchy-Riemann**, senza ulteriori condizioni, **non implicano** la derivabilità in senso complesso di una funzione in un punto.*

Nota 3.2.4. *In **Analisi Reale** è ben noto che una funzione f può avere derivata in ogni punto in $\mathbb{R}$ senza che la derivata sia* *necessariamente una funzione continua.*[1] *Per esempio la funzione:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & se \ \ x \neq 0 \\ 0 & se \ x = 0 \end{cases}$$

è ovunque derivabile in $\mathbb{R}$ *e si ha:*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & se \ \ x \neq 0 \\ 0 & se \ x = 0 \end{cases}$$

e pertanto tale derivata ***non è continua*** *in* $x = 0$. *Per le* ***funzioni analitiche*** *di* ***variabile complessa*** *una cosa del genere* ***non può succedere: l'esistenza della derivata prima in un cerchio di raggio*** $r > 0$ ***di*** $\mathbb{C}$ ***implica l'esistenza in tale cerchio delle derivate di qualsiasi ordine.*** *Se si tentasse di imitare l'esempio precedente con la funzione:*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \dfrac{1}{z} & se \ \ z \neq 0 \\ 0 & se \ x = 0 \end{cases}$$

ci si accorgerebbe presto del fatto che tale funzione in realtà ***non è derivabile*** *in* $z = 0$. *Infatti basta scegliere* $z = iy$ *per avere:*

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{i^2 y^2 \sin \frac{1}{iy} - 0}{iy} = iy \sin \frac{1}{iy}$$

Ma:

$$\sin \frac{1}{iy} = \frac{e^{\frac{1}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}}{2i}$$

[1] Un celebre Teorema di Darboux stabilisce che le discontinuità della funzione derivata non possono essere **però** di tipo salto.(vedi anche appendice 13.9

e quindi:

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(iy)-f(0)}{iy-0}=\frac{y}{2}\left(e^{\frac{1}{y}}-e^{-\frac{1}{y}}\right)$$

Poichè:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{2}\left(e^{\frac{1}{y}}-e^{-\frac{1}{y}}\right)=+\infty$$

non esiste finito:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$$

e quindi la funzione non è derivabile in $z=0$.

Capitolo 4

Serie

4.1 Raggio di convergenza

Esercizio 4.1.1. *Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Soluzione 4.1.1. *Se* r *denota il raggio di convergenza, allora è noto che:*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Poichè $a_n = \frac{1}{n}$*, si ha:*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(\sqrt[n]{\frac{1}{n}})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\log(n)} = 1.$$

e di conseguenza $r = 1$.

Esercizio 4.1.2. *Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Soluzione 4.1.2. *Poichè* $a_n = \frac{1}{n^2}$ *si ha:*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$$

$=$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{2}{n}\log(n)} = 1.$$

e di conseguenza $r = 1$.

Esercizio 4.1.3. *Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3 + 4n^2 + 3n + 2}.$$

Soluzione 4.1.3. *Poichè:*

$$a_n = \frac{1}{n^3 + 4n^2 + 3n + 2}.$$

si ha:

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 + 4n^2 + 3n + 2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 + 4n^2 + 3n + 2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(\sqrt[n]{\frac{1}{n^3+4n^2+3n+2}})} =$$

$$= \lim e^{-\frac{1}{n}\log\left(n^3+4n^2+3n+2\right)} = \lim e^{-\frac{1}{n}\log\left[n^3\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)\right]} =$$

$$= \lim e^{-\frac{3}{n}\log(n) - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = 1.$$

e di conseguenza $r = 1$.

Esercizio 4.1.4. *Determinare il raggio di convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{p(n)}.$$

essendo $p(n)$ un polinomio a coefficienti reali tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $p(n) \neq 0$.

Soluzione 4.1.4. *Poichè $a_n = p(n)$ con:*

$$p(n) = b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots b_k$$

$b_r \in \mathbb{R}$,$r = 0 \ldots k$ e $p(n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che, essendo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p(n)}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\log(p(n))} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{k}{n}\log(n)} = 1.$$

è $r = 1$.

Esercizio 4.1.5. *Dimostrare che la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

*ha raggio di convergenza **nullo**.*

Soluzione 4.1.5. *Ragioniamo per assurdo e supponiamo che la serie abbia raggio di convergenza $r > 0$. Se così fosse, essa sarebbe assolutamente convergente, in particolare, sui punti della circonferenza di raggio $r/2$ e quindi la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{r}{2^n}^n.$$

dovrebbe convergere. Tuttavia applicando il ***criterio del rapporto*** *a tale serie si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!r^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n!r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r}{2} = \infty.$$

e questo ci dice che l'ultima serie considerata ***diverge****. Dunque non può essere $r > 0$ e pertanto $r = 0$, cioè la serie converge se e solo se $z = 0$.*

Esercizio 4.1.6. *Si consideri la serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) z^n.$$

e si dimostri che ha raggio di convergenza $r = 1$.

Soluzione 4.1.6. *Siccome per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$|(\sin n) z^n| \leq |z^n|.$$

e siccome la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| < \infty.$$

è ***convergente*** *per $|z| < 1$ avremo che $r \geq 1$. Se fosse $r > 1$ allora la serie data dovrebbe convergere anche per $z = 1$. In altre parole sarebbe convergente la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n).$$

Questo implicherebbe che:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sin n = 0.$$

In tal caso però anche:

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n+1) = 0.$$

Ma:
$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1.$$
e quindi:
$$(\cos n) \sin 1 = \sin(n+1) - \sin n \cos 1.$$
e poichè $\sin 1 \neq 0$ *si avrebbe che:*
$$\exists \lim_{n\to+\infty} \cos n = \frac{1}{\sin 1}\left\{\lim_{n\to+\infty} \sin(n+1) - \lim_{n\to+\infty} \sin(n)\right\} = 0.$$
Ma ciò è assurdo, poichè in tal caso:
$$\exists \lim_{n\to+\infty} \left(\sin^2 n + \cos^2 n\right) = 0.$$
mentre $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Dunque* $r = 1$**.**

Esercizio 4.1.7. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *e sia* $\alpha \neq -m \ \ \forall m \in \mathbb{N}$, $\beta \neq -m \ \ \forall m \in \mathbb{N}$*. Dimostrare che la serie:*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n)} z^n.$$
ha raggio di convergenza $r \geq 1$*.*

Soluzione 4.1.7. *Per le ipotesi fatte su* α *e* β *segue che, posto:*
$$a_n = \frac{\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n)}.$$
si ha $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Studiamo allora la serie:*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n)}\right| |z|^n$$
alla quale possiamo applicare il ***criterio del rapporto****. Si ha:*
$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)}{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n+1)} \frac{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{\alpha\,(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}\right|.$$

e dunque:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{(\alpha+n+1)}{(\beta+n+1)}z\right|.$$

Abbiamo allora:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}z\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(\alpha+n+1)}{(\beta+n+1)}\right||z| = |z|.$$

La serie data è pertanto assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$ e dunque $r \geq 1$.

Esercizio 4.1.8. *Fornire un esempio di una serie di potenze tale per cui:*

1. *Il suo raggio di convergenza è $r > 0$ assegnato*

2. *La funzione che essa rappresenta non ha zeri.*

Soluzione 4.1.8. *Si consideri:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}z^n.$$

Si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n.$$

e quindi:

$$|z| < r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{r}}.$$

che non ha zeri.

4.2 Serie di potenze con raggio di convergenza finito

Esercizio 4.2.1. *Stabilire per quali punti della circonferenza:*

$$|z| = 1.$$

la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2n+1}.$$

converge.

Soluzione 4.2.1. *Posto $z = -w$, la serie si trasforma in:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{2n+1}.$$

*alla quale è applicabile il **teorema di Picard**. Tale serie converge allora su tutti i punti della **circonferenza unitaria** eccetto $w = 1$ e quindi la serie data converge su tutti i punti della **circonferenza unitaria** eccetto $z = -1$.*

Esercizio 4.2.2. *Dimostrare che se $0 < \lambda \leq 1$ allora la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^\lambda}.$$

converge su tutti i punti del cerchio unitario eccetto $z = 1$.

Soluzione 4.2.2. *Si pu'o applicare il **teorema di Picard** ottenendo che la serie converge in tutti i punti della circonferenza $|z| = 1$ **eccettuato al più** il punto $z = 1$. In tale punto si ha la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}.$$

che per le ipotesi su λ è divergente.

Esercizio 4.2.3. *Dimostrare che la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{(2^n)}.$$

***diverge** in tutti i punti di un sottoinsieme **denso** della circonferenza unitaria.*

Soluzione 4.2.3. *Osserviamo chem la serie diverge sicuramente nei punti per i quali è $z^2 = 1$. Siccome:*

$$f(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^4\right)^{(2^n)}$$

*la serie data divergerà anche nei punti per i quali $z^4 = 1$. In generale, procedendo nello stesso modo, si ha che la serie diverge sicuramente in tuti i punti della circonferenza unitaria per i quali $z^{2^n} = 1$. Tali punti costituiscono evidentemente un sottoinsieme denso della suddetta circonferenza, essendo i vertici di un $2n$-**agono regolare inscritto in essa.***

Esercizio 4.2.4. *Dimostrare che la serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

*diverge in un sottoinsieme **denso** della circonferenza unitaria.*

Soluzione 4.2.4. *Si ha che:*

$$f(z) = z^1 + z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \cdots z^{n!} + \cdots .$$

e siccome si può scrivere:

$$f(z) = z^1 + z^{1!} + z^2 + \left(z^2\right)^3 + \left(z^2\right)^{3\cdot 4} + \cdots \left(z^2\right)^{3\cdot 4 \cdots n} + \cdots .$$

*avremo che la serie diverge sicuramente nei punti per i quali $z^2 = 1$. In modo simile, se p è un qualunque **numero primo** si dimostra che la serie diverge nei punti tali per cui $z^p = 1$. La serie diverge dunque su tutti i punti dell'insieme:*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1, p \in \mathcal{P}\}.$$

*che è sicuramente un sottoinsieme **denso** della circonferenza unitaria.*

Nota 4.2.1. *Le serie viste negli ultimi due esercizi sono esempi delle cosiddette serie* ***"lacunari"*** *così chiamate per il fatto che sono* ***"poche"*** *le potenze di z presenti. La presenza di un sottoinsieme* ***denso*** *di punti della circonferenza unitaria sui quali tali serie divergono, rende* ***impossibile*** *il loro* ***prolungamento analitico*** *oltre tale circonferenza.*

Nota 4.2.2. *Se abbiamo una serie di potenze:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

il cui raggio di convergenza r è ***finito e positivo****, sappiamo che la serie è divergente per ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale per cui $|z_0| > r$. Questo significa, per definizione, che se consideriamo la successione delle somme parziali $(s_n(z))_n$ data da:*

$$\begin{aligned}
&s_0(z_0) = a_0 \\
&s_1(z_0) = a_0 + a_1 z_0 \\
&\vdots \\
&s_n(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \cdots a_n z_0^n
\end{aligned}$$

si ha che:

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} s_n(z_0) \in \mathbb{C}.$$

Può però accadere che se si considera una sottosuccessione della successione $(s_n(z_0))_n$ ***questa converga****. Il fenomeno suddetto è chiamato* ***sovraconvergenza*** *e verrà illustrato nel seguente:*

Esempio 4.2.1. *Si consideri dapprima la serie:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{z(1-z)\}^{4^n}}{p_n}.$$

nella quale p_n *è il* ***massimo*** *dei coefficienti dello sviluppo di* $(1-z)^{4^n}$.[1]
Per esempio se $n = 1$ *siccome:*

$$(1-z)^4 = \left(1 - 4z^1 + 6z^2 - 4z^3 + z^4\right).$$

si avrà che $p_1 = 6$. *Facciamo ora alcune osservazioni:*

- *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha che* $\{z\,(1-z)\}^{4^n}$ *è un polinomio il cui termine di grado massimo ha grado* $2 \cdot 4^n$.
- *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha che* $\{z\,(1-z)\}^{4^{(n+1)}}$ *è un polinomio il cui termine di grado minimo ha grado* $4^{(n+1)}$.
- *I coefficienti dei termini di* $\frac{\{z(1-z)\}^{4^n}}{p_n}$ *sono tutti,in modulo,* ***non superiori*** *a* 1 *ed esattamente* ***uno di essi*** *vale* 1*: esso sarà quello corrispondente a al termine dello sviluppo di* $(1-z)^{4^n}$ *avente coefficiente* p_n.

Ne segue allora che:

- *Quando si sviluppano tutti i polinomi* $\frac{\{z(1-z)\}^{4^n}}{p_n}$ *si ottiene una serie di potenze di* z.
- *Ogni termine della suddetta serie proviene* ***esattamente*** *da uno dei suddetti sviluppi.*
- *Il raggio di convergenza della serie di potenze è* 1, *in quanto ogni coefficiente in modulo è* ***non superiore*** *a* 1 *ed è* 1 *per* ***infiniti valori*** *di* n.

Osserviamo inoltre che siccome:

$$f(z) = \left(\frac{z^4}{6} - \frac{4z^5}{6} + z^6 - \frac{4z^7}{6} + \frac{z^8}{6}\right) + \left(\frac{z^{16}}{p_2} + \cdots z^{24} + \cdots \frac{z^{32}}{p_2}\right) + \cdots.$$

---

[1]Per ogni n esso è unico e corrisponde al coefficiente $\begin{pmatrix} 4^n \\ \frac{4^n}{2} \end{pmatrix} = \frac{4^n!}{[(2^{2n-1})!]^2}$

avremo:

$$
\begin{aligned}
&s_0(z) = s_1(z) = s_2(z) = s_3(z) = 0\\
&s_4(z) = \frac{z^4}{6}\\
&s_5(z) = \frac{z^4}{6} - \frac{4z^5}{6}\\
&s_6(z) = \frac{z^4}{6} - \frac{4z^5}{6} + z^6\\
&s_7(z) = \frac{z^4}{6} - \frac{4z^5}{6} + z^6 - \frac{4z^7}{6}\\
&s_8(z) = \frac{z^4}{6} - \frac{4z^5}{6} + z^6 - \frac{4z^7}{6} + \frac{z^8}{6}\\
&s_9(z) = s_{10}(z) \cdots = s_{15}(z) = s_8(z)\\
&s_{16}(z) = s_8(z) + \frac{z^{16}}{p_2}\\
&\vdots\\
&s_{32}(z) = s_8(z) + \left(\frac{z^{16}}{p_2} + \cdots z^{24} + \cdots \frac{z^{32}}{p_2}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

In altri termini la successione delle somme parziali $S_n(z)$ della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{z\,(1-z)\}^{4^n}}{p_n}.$$

corrisponde a una ***particolare sottosuccessione*** *della successione delle somme parziali $s_n(z)$. Siccome per $|z| < 1$ la serie di potenze converge anche tale sottosuccessione* ***converge****. A questo punto facciamo la seguente semplice osservazione: se si pone $z = 1 - w$ e si sostituisce nella serie data, si ottiene la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{(1-w)\,w\}^{4^n}}{p_n}.$$

che è ***formalmente identica*** *e dunque converge per ogni* $w \in \mathbb{C}$ *tale che* $|w| < 1$. *Ma:*

$$|w| < 1 \Leftrightarrow |1 - z| = |z - 1| < 1.$$

e quindi la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{z\,(1-z)\}^{4^n}}{p_n}.$$

converge anche per $|z - 1| < 1$. *Questo è come dire che la* ***particolare sottosuccessione*** *di somme parziali che essa rappresenta converge anche* ***fuori dal cerchio di convergenza*** *della serie di potenze.*

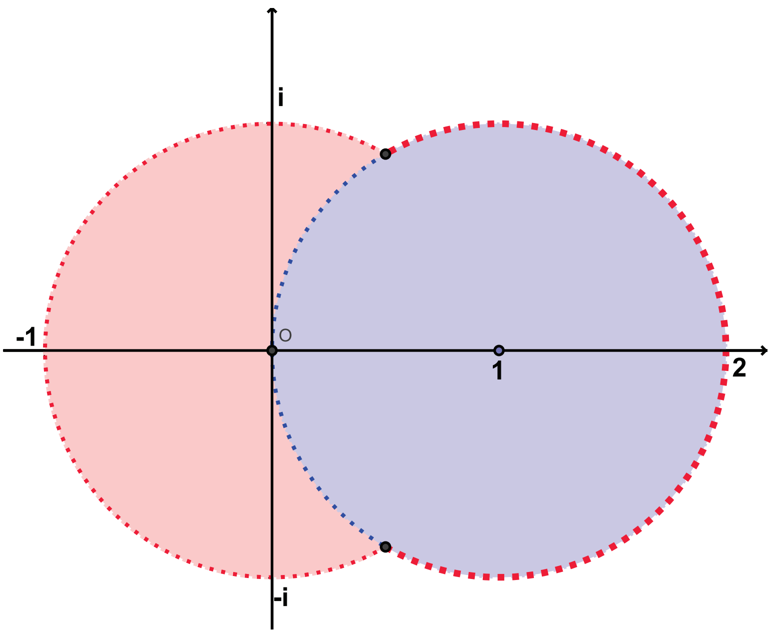

Figura 4.1: Il cerchio di colore rosa è quello di convergenza della serie data dalla successione delle somme parziali $s_n(z)$; la regione il cui contorno è colorato in rosso rappresenta l'insieme di convergenza della sottosuccessione delle somme parziali data da $S_n(z)$

4.3 Serie di Taylor e Maclaurin

Esercizio 4.3.1. *Si determini lo sviluppo in serie di Maclaurin della funzione:*

$$f(z) = z^2 e^{3z}.$$

Soluzione 4.3.1. *Dallo sviluppo della funzione esponenziale otteniamo che per ogni* $z \in$ *si ha:*

$$e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n!}.$$

e quindi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^{n+2}}{n!}.$$

Ponendo ora $m = n + 2$ *si ha:*

$$f(z) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^{m-2} z^m}{(m-2)!}.$$

che costituisce lo sviluppo cercato.

Esercizio 4.3.2. *Si trovi lo sviluppo di Maclaurin della funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Soluzione 4.3.2. *Ricordiamo che se* $0 \leq |z| < 1$ *si ha:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

e scriviamo:

$$f(z) = \frac{1}{1-(-z)}.$$

Osserviamo che:

$$0 \leq |-z| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq |z| < 1.$$

e quindi possiamo scrivere:

$$f(z) = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z)^n =.$$

che costituisce lo sviluppo cercato.

Esercizio 4.3.3. *Scrivere lo sviluppo di Maclaurin per la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9}.$$

Soluzione 4.3.3. *Osserviamo che:*

$$f(z) = \frac{z}{9}\left[\frac{1}{1+(z^4/9)}\right].$$

e che:

$$0 \leq \left|z^4/9\right| < 1 \Leftrightarrow 0 \leq |z| < \sqrt{3}.$$

In tali ipotesi otteniamo:

$$\frac{1}{1+(z^4/9)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{9^n}$$

da cui:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{9^{n+1}}.$$

e quindi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}}.$$

che è lo sviluppo cercato.

Esercizio 4.3.4. *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

determinarne lo sviluppo di Maclaurin.

Soluzione 4.3.4. *Sia*

$$g(z) = \frac{1}{(1-z)}.$$

Osserviamo che:

$$g'(z) = f(z).$$

Ma

$$g(z) = \frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad |z| < 1.$$

Allora:

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} \qquad |z| < 1.$$

Posto $n - 1 = m$ *si ha:*

$$g'(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)z^m.$$

e quindi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n.$$

Esercizio 4.3.5. *Si consideri la serie:*

$$l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

e si dimostri che:

- *Il raggio di convergenza è* 1.
- $e^{l(z)} = z + 1$.

Soluzione 4.3.5. *Per quanto riguarda il* ***raggio di convergenza****, è sufficiente applicare il risultato dell'appendice 13.3. Si ponga ora:*

$$f(z) = (1+z)e^{-l(z)}.$$

Ne segue che, per $|z| < 1$ si ha:

$$f'(z) = e^{-l(z)} - e^{-l(z)}(1+z)l'(z) = e^{-l(z)}\left[1 - (1+z)l'(z)\right].$$

e quindi:

$$f'(z) = e^{-l(z)}\left[1 - (1+z)\left(1 - z + z^2 \cdots\right)\right].$$

Dunque:

$$f'(z) = e^{-l(z)}\left[1 - (1+z)\frac{1}{1+z}\right] = 0.$$

Pertanto $f(z) = c$ e dato che $f(0) = 1$ avremo che:

$$(1+z)e^{-l(z)} = 1.$$

da cui:

$$(1+z) = e^{l(z)}.$$

4.4 Serie di Laurent

Esercizio 4.4.1. *Si trovi lo sviluppo in **serie di Laurent** della funzione:*

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}.$$

*nei **domini di analiticità**.*

Soluzione 4.4.1. *Scriviamo innanzitutto:*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

*e osserviamo che la funzione f ha **due punti singolari** in $z = 1$ e $z = 2$. Pertanto la funzione è analitica nei seguenti **domini**:*

1. $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| < 1\}$.

2. $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

3. $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

Nel dominio D_1 *possiamo scrivere:*

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

ed inoltre:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\,(1-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

e dunque:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

che di fatto è uno ***sviluppo di Maclaurin****. Per quanto riguarda il dominio* D_2*, osserviamo che:*

$$1 < |z| < 2 \Rightarrow \begin{cases} |1/z| < 1 \\ |z/2| < 1 \end{cases}$$

e quindi:

$$\tfrac{1}{z-1} = \tfrac{1}{z(1-1/z)}$$

$$-\tfrac{1}{z-2} = +\tfrac{1}{2(1-z/2)}$$

da cui:

$$f(z) = \frac{1}{z\,(1-1/z)} + \frac{1}{2\,(1-z/2)}.$$

Ma:

$$\frac{1}{z\,(1-1/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}.$$

e dunque:

$$\frac{1}{2\,(1-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

per cui:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Ovviamente si può riscrivere $f(z)$ come segue:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

e questo è esattamente lo ***sviluppo di Laurent****, perchè si può scrivere:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

dove:

$$c_n = \begin{cases} 1 \ \ se \ n \leq -1 \\ \frac{1}{2^{n+1}} se \ n \geq 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il dominio D_3, si procede in modo analogo, scrivendo:

$$f(z) = \frac{1}{z\,(1 - 1/z)} - \frac{1}{z\,(1 - 2/z)}.$$

dopo avere osservato che in tale dominio si ha:

$$0 \leq |1/z| < 1, 0 \leq |2/z| < 1.$$

Si ottiene allora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

che può essere riscritta come:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n}.$$

che è lo ***sviluppo di Laurent*** *cercato, perchè si può scrivere:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

dove:

$$c_n = \begin{cases} 1 - 2^{n-1} & se\ n \leq -1 \\ 0 & se\ n \geq 0 \end{cases}$$

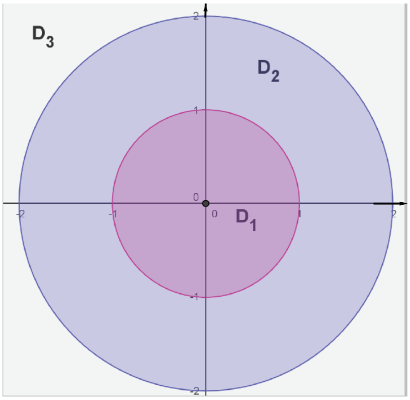

Figura 4.2: I domini di convergenza degli sviluppi trovati

Esercizio 4.4.2. *Sia:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

dimostrare che essa definisce una ***funzione intera****.*

Soluzione 4.4.2. *Consideriamo la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^{2n}|}{(2n)!}.$$

e dimostriamo che essa è convergente per ogni z. Per fare ciò applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|z|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^2.}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Questo prova che la serie che definisce $f(z)$ è assolutamente convergente e quindi convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ e pertanto $f(z)$ è una ***funzione intera****.*

Esercizio 4.4.3. *Dimostrare che la funzione $f(z)$ definita nell'esercizio precedente è soluzione dell'equazione differenziale:*

$$f''(z) - f(z) = 0.$$

Soluzione 4.4.3. *Siccome $f(z)$ è analitica le sue derivate possono essere ottenute derivando termine a termine la serie che la definisce. Le serie che si ottengono sono anch'esse convergenti in tutto $\mathbb{C}$. Si ottiene:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nz^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

e quindi

$$f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)z^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

Posto $m = n - 2$ si può scrivere

$$f''(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = f(z)$$

da cui la tesi.

Esercizio 4.4.4. *Sia:*

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots .$$

Dimostrare che:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Soluzione 4.4.4. *Il raggio di convergenza della serie data è dato dalla formula che abbiamo già visto in un precedente paragrafo e poichè:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{1}{n}\right)^n .$$

si ha che tale raggio vale 1*. Derivando termine a termine otteniamo:*

$$f'(z) = 1 - z^2 + z^4 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n.$$

che vale per $|z| < 1$*. Tenuto conto della* ***formula della somma di una serie geometrica*** *si ha la tesi.*

Capitolo 5

Singolarità

5.1 Singolarità isolate

Esercizio 5.1.1. *Determinare le singolarità,* ***specificandone il tipo****, della funzione:*

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}.$$

Soluzione 5.1.1. *Le singolarità di questa funzione sono i valori di* $z \in \mathbb{C}$ *che annullano il denominatore. Esse sono dunque* ***singolarità isolate*** *e sono* $z = 0$ *e* $z = \pm i$*. Poichè:*

$$\lim_{z \to 0} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z^2+1)} = 1.$$

avremo che $z = 0$ *è un* ***polo di ordine*** 3*. Nello stesso modo si dimostra che* $z = \pm i$ *sono* ***poli di ordine*** 1 *cioè* ***poli semplici****.*

Esercizio 5.1.2. *Determinare le singolarità della seguente funzione,* ***specificandone il tipo****:*

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}.$$

Soluzione 5.1.2. *Poichè:*

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots .$$

si avrà:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} + \frac{z^5}{5!} \cdots \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Ne segue che:

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0}\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^8}{5!} + \cdots\right) = 1.$$

*e quindi $z = 0$ è un **polo di ordine** 3. Non vi sono altre singolarità.*

Esercizio 5.1.3. *Si consideri la funzione:*

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}.$$

*e si dimostri che $z = 0$ è una **singolarità eliminabile**.*

Soluzione 5.1.3. *Siccome:*

$$z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots .$$

si avrà:

$$f(z) = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots .$$

e quindi:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{3!}.$$

*Questo prova che la singolarità per $z = 0$ è una **singolarità eliminabile**.*

Nota 5.1.1. *Se si considera la funzione:*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \;\; se \; z \neq 0 \\ \frac{1}{3!} se \; z = 0 \end{cases}$$

*si ottiene una **funzione intera**.*

Esercizio 5.1.4. *Stabilire la natura delle singolarità della funzione:*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Soluzione 5.1.4. *La funzione è definita e analitica per ogni $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Se consideriamo lo sviluppo di f(z) in* ***serie di Laurent*** *otteniamo:*

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \frac{1}{n!z^n} + \cdots .$$

Da questo sviluppo, deduciamo che $z = 0$ ***non può essere un polo nè una singolarità eliminabile*** *in quanto la sua* ***parte principale*** *ha un* ***numero infinito di termini****. Quindi si tratta di una singolarità* ***essenziale.***

Esercizio 5.1.5. *Determinare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

Soluzione 5.1.5. *Iniziamo con il dimostrare che $z = 0$ è una* ***singolarità eliminabile****. In un intorno di $z = 0$ si ha:*

$$f(z) = \frac{z - e^z + 1}{z\,(e^z - 1)} = \frac{z - 1 - z - z^2/2! + O(z^3) + 1}{z\,(z + O(z^2))} = \frac{-z^2/2! + O(z^3)}{z^2\,[1 + O(z)]}.$$

da cui:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

e quindi $z = 0$ è una ***singolarità eliminabile****. Le restanti singolarità al finito provengono dagli zeri di:*

$$e^z - 1$$

Essi sono dati da $z_n = 2n\pi i$ $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Dimostriamo che si tratta di ***poli semplici****. Dobbiamo provare che se $n \neq 0$ allora:*

$$\lim_{z \to 2n\pi i} (z - 2n\pi i)\, f(z) = l \in \mathbb{C}.$$

Si ha che:

$$(z-2n\pi i)\,f(z) = (z-2n\pi i)\left[\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right] = \frac{(z-2n\pi i)}{e^z-1} - \frac{(z-2n\pi i)}{z}.$$

Inoltre:

$$e^z-1 = e^{z-2n\pi i+2n\pi i}-1 = e^{z-2n\pi i}e^{2n\pi i}-1 = e^{z-2n\pi i}-1.$$

Posto allora:

$$w = z-2n\pi i.$$

si ha:

$$\frac{(z-2n\pi i)}{e^z-1} = \frac{w}{e^w-1}.$$

da cui:

$$\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{(z-2n\pi i)}{e^z-1} = \lim_{w\to 0}\frac{w}{e^w-1} = 1.$$

e siccome:

$$\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{(z-2n\pi i)}{z} = 0.$$

$$\exists \lim_{z\to 2n\pi i}(z-2n\pi i)\,f(z) = 1.$$

Quindi i suddetti punti sono ***poli semplici****.*

Nota 5.1.2. *Si noti che in:*

$$\Sigma = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

cioè sulla ***sfera di Riemann*** *o* ***piano complesso esteso****, il punto ∞ è* ***punto di accumulazione di poli semplici****.*

Esercizio 5.1.6. *Determinare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}.$$

Soluzione 5.1.6. *Sicuramente in $z = 1$ vi è una singolarità. Poniamo:*

$$g(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

e

$$h(z) = e^z - 1.$$

Osserviamo che in $z = 1$ h è analitica. Quindi per studiare la singolarità presente in $z = 1$ basta riferirsi a g. Lo ***sviluppo di Laurent*** *di tale funzione è:*

$$g(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!\,(z-1)^2} + \cdots .$$

e poichè la parte principale contiene ***infiniti termini*** *$z = 1$ è una* ***singolarità essenziale*** *per g e quindi anche per f. Vi sono poi i punti per i quali $h(z) = 0$ che sono sicuramente* ***punti singolari****. Essi sono del tipo $z_n = 2ni\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Procedendo come nell'esercizio precedente si ha che essi sono* ***poli semplici****.*

Nota 5.1.3. *Si noti che in:*

$$\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

cioè sulla ***sfera di Riemann*** *o* ***piano complesso esteso****, il punto ∞ è* ***punto di accumulazione di poli semplici****.*

Esercizio 5.1.7. *Dimostrare che in $z = 0$ la funzione:*

$$(z) = e^{\left(e^{-\frac{1}{z}}\right)}.$$

ha una ***singolarità essenziale****.*

Soluzione 5.1.7. *Il modo più semplice per risolvere l'esercizio è il seguente: restringiamoci all'**asse reale**; in tal caso si ha:*

$$\lim_{h \to 0^+} e^{-\frac{1}{h}} = 0.$$

e quindi:

$$\lim_{h \to 0^+} f(h) = 1.$$

D'altra parte:

$$\lim_{h\to 0^-} e^{-\frac{1}{h}} = +\infty.$$

e quindi:

$$\lim_{h\to 0^+} f(h) = +\infty.$$

*Pertanto non ci può essere in $z = 0$ una **singolarità eliminabile**, in quanto dovrebbe essere finito il:*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = l \in \mathbb{C}.$$

*e non i può essere nemmeno **un polo** perchè dovrebbe essere:*

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty.$$

*Dunque in $z = 0$ c'è una **singolarità essenziale**.*

Esercizio 5.1.8. *Dimostrare che la seguente:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

ha come singolarità poli semplici situati negli interi non positivi.

Soluzione 5.1.8. *Sia $R > 0$ un qualsiasi numero reale e sia m un intero tale che $m > 2R$. Scriviamo:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

e poniamo:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

$$h(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

Osserviamo che $g(z)$ ammette poli in $z = -n$ con $0 \leq n \leq m$. Infatti:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{(1+z)} + \frac{1}{2\,(2+z)} + \cdots \frac{(-1)^m}{m!(m+z)}.$$

Consideriamo ora:

$$h(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

e dimostriamo che essa è analitica per $|z| < R$. Infatti dalla disuguaglianza triangolare si ha:

$$|n - |z|| \leq |n + z|\,.$$

e siccome $n \geq m + 1 > 2r$ si ha:

$$n - |z| \leq |n + z|\,.$$

Da ciò segue che:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}\right| = \frac{1}{n!\,|n+z|} \leq \frac{1}{n!\,(n-|z|)} \leq \frac{1}{n!R}.$$

Poichè:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!R} < +\infty.$$

avremo quindi che, per il ***criterio M di Weierstrass*** [1]*, la serie:*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

è ***totalmente convergente*** *e quindi $h(z)$ è analitica in ogni* ***compatto*** *K tale per cui $z \in K \Rightarrow |z| < R$. Siccome R può essere scelto arbitrariamente grande avremo che l'insieme dei poli coincide con l'insieme degli* ***interi non positivi****.*

[1] Vedi appendice 13.10.1

Esercizio 5.1.9. *Dimostrare che la funzione:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

ha come singolarità poli semplici che costituiscono l'insieme:

$$S = \{z = mi \,, m \in \mathbb{Z} - \{0\}\}\,.$$

Soluzione 5.1.9. *Come prima, scegliamo $R > 0$ e un intero $m > 2R$. Allora:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 + z^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

Poniamo:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

e

$$h(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

Siccome:

$$\frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{1}{(z + in)\,(z - in)}.$$

avremo che:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(z + in)\,(z - in)}.$$

che ha poli nei punti $z = \pm in$ con $1 \leq n \leq m$. D'altra parte, ragionando come prima, si ha:

$$\left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - |z|^2} \leq \frac{1}{n^2 - R^2} = \frac{1}{n^2\,(1 - R^2/n^2)} \leq \frac{4}{3n^2}.$$

L'ultima parte della disuguaglianza segue dal fatto che $n \geq m+1 > 2R$. Allora,per il ***criterio M di Weierstrass****, la serie:*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

*è **totalmente convergente** su ogni compatto K tale per cui $z \in K \Rightarrow |z| < R$ ed è ivi analitica. Siccome R si può scegliere arbitrariamente grande si ha la tesi.*

5.2 Singolarità non isolate

Esercizio 5.2.1. *Si studino le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \sec \frac{1}{z}.$$

Soluzione 5.2.1. *Sono singolarità della funzione il punto $z = 0$ e i punti per i quali:*

$$\cos \frac{1}{z} = 0.$$

Questi ultimi sono costituiti dai seguenti:

$$z_k = \frac{2}{\pi(2k+1)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Poichè $z = 0$ è punto di accumulazione per l'insieme:

$$S = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

*avremo che $z = 0$ è una singolarità **non isolata**.*

Capitolo 6

Integrazione

6.1 Integrazione su curve

Esercizio 6.1.1. *Calcolare:*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

dove:

$$f(z) = z - i.$$

e $\mathcal{C}$ è la curva parametrizzata da:

$$\gamma(t) = t + it^2 \quad , -1 \leq t \leq 1.$$

Soluzione 6.1.1. *Poichè la funzione $f(z)$ è intera, si ha che la funzione:*

$$F(z) = \frac{z^2}{2} - iz.$$

*è **una primitiva** della funzione $f(z)$, pertanto l'integrale proposto **non dipende** dal **cammino di integrazione**. Siccome:*

$$\begin{cases} \gamma(-1) = -1 + i \\ \\ \gamma(1) = 1 + i \end{cases}$$

si ha:

$$\int_C f(z)dz = F(1+i) - F(-1+i).$$

e quindi:

$$\int_C f(z)dz = \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{(-1+i)^2}{2} - i\left\{(1+i) - (-1+i)\right\} = 2i - 2i = 0.$$

Esercizio 6.1.2. *Calcolare:*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

dove:

$$f(z) = z^2 + 1.$$

e $\mathcal{C}$ è la curva parametrizzata da:

$$\gamma(t) = e^{it} \quad , 0 \leq t \leq 2\pi.$$

in due modi.

Soluzione 6.1.2. *Come prima, osservando che la funzione $f(z)$ è intera e che una sua* ***primitiva*** *è:*

$$F(z) = \frac{z^3}{3} + z.$$

osservando che la curva $\mathcal{C}$ è chiusa e che $\gamma(2\pi) = \gamma(0) = 1$ si ha:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = F(1) - F(1) = 0.$$

Un ***secondo modo*** *di risolvere l'esercizio, è quello di procedere in base alla definizione:*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(e^{2it}+1\right) ie^{it}dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \left(e^{3it}+e^{it}\right) dt = i\int_0^{2\pi} e^{3it}dt + i\int_0^{2\pi} e^{it}dt =$$

$$= i\frac{e^{3it}}{3i} + ie^{it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{3it}}{3} + e^{it}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{e^{6\pi i}}{3} + e^{2\pi i}\right) - \left(\frac{e^0}{3} + e^0\right) = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right) = 0$$

Esercizio 6.1.3. *Sia $\mathcal{C}$ una **curva semplice chiusa** di $\mathbb{C}$ e sia z_0 un punto nel suo interno. Dimostrare che esiste $\rho > 0$ tale per cui:*

$$\left| \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^k} \right| < \frac{1}{\rho^k} L.$$

essendo L la lunghezza di $\mathcal{C}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Soluzione 6.1.3. *Sia:*

$$M = \max\left\{ \left| \frac{1}{(z-z_0)^k} \right| \quad z \in \mathcal{C} \right\}.$$

*Tale massimo esiste finito per la **continuità** di:*

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}.$$

*sulla curva $\mathcal{C}$ e per la **compattezza** di quest'ultima. Sia ora:*

$$\rho = \min\left\{ |z-z_0| \; z \in \mathcal{C} \right\}$$

*Tale minimo esiste per **la compattezza** di $\mathcal{C}$ ed è inoltre positivo perchè z_0 appartiene all'interno di $\mathcal{C}$. Ovviamente si ha:*

$$M \leq \frac{1}{\rho^k}.$$

e quindi la tesi.

Esercizio 6.1.4. *Sia:*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

una ***funzione analitica*** *per la quale:*

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si dimostri che f è ***iniettiva****.*

Soluzione 6.1.4. *Dobbiamo provare che per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $a \neq b$ si ha $f(a) \neq f(b)$. Consideriamo il segmento Γ congiungente i due punti a e b e una sua parametrizzazione:*

$$\gamma(t) = a + t(b-a) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Essendo f una primitiva di f' si avrà:

$$\int_{\Gamma} f'(z)dz = f(b) - f(a).$$

Ma:

$$\int_{\Gamma} f'(z)dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 f'(\gamma(t))(b-a)dt.$$

e quindi:

$$f(b) - f(a) = (b-a)\int_0^1 f'(\gamma(t))dt.$$

da cui:

$$\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = \int_0^1 f'(\gamma(t))dt.$$

Ma:

$$\int_0^1 f'(\gamma(t))dt = \int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \operatorname{Im} f'(\gamma(t))dt.$$

e siccome, per ipotesi si ha $\operatorname{Re} f'(z) > 0 \ \forall z \in C$ *avremo che ,in particolare,*$\operatorname{Re} f'(\gamma(t)) > 0$ *per ogni* $0 \leq t \leq 1$*. Da ciò segue che:*

$$\int_0^1 \operatorname{Re} f'(\gamma(t))dt \neq 0.$$

e dunque:

$$\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \neq 0$$

da cui $f(b) \neq f(a)$*.*

Esercizio 6.1.5. *Si calcoli l'integrale:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz.$$

essendo $\mathcal{C}$ *la curva costituita* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

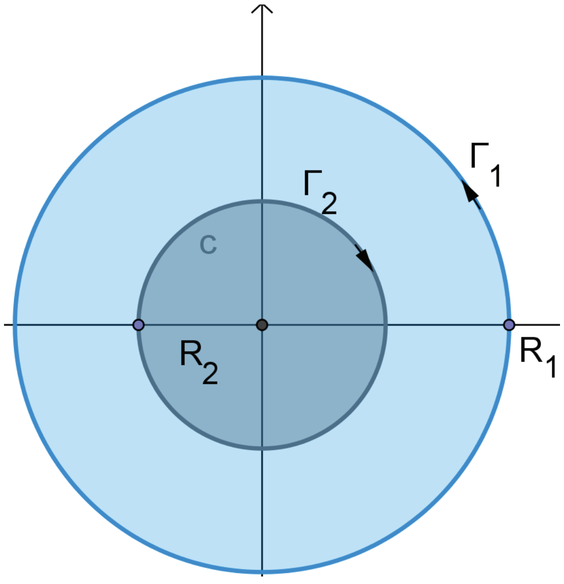

Figura 6.1: $\mathcal{C} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

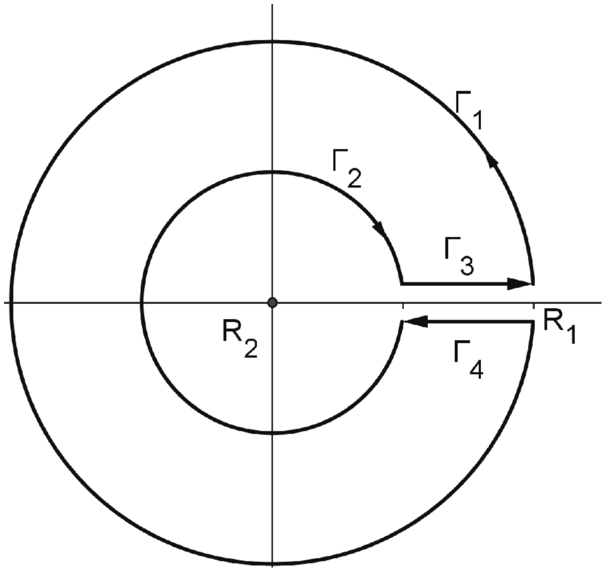

Figura 6.2: Il taglio costituito dalle due curve Γ_3 e Γ_4 consente di rendere il dominio semplicemente connesso

Soluzione 6.1.5. *Immaginiamo di tagliare il dominio come in 6.2. Si ha:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_4} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz$$

Poichè:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

$$\int_{\Gamma_4} \frac{1}{z} dz = -\int_{\Gamma_4} \frac{1}{z} dz$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz = -2\pi i$$

avremo che:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Esercizio 6.1.6. *Si calcoli l'integrale:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz.$$

essendo $\mathcal{C}$ la curva costituita $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$.

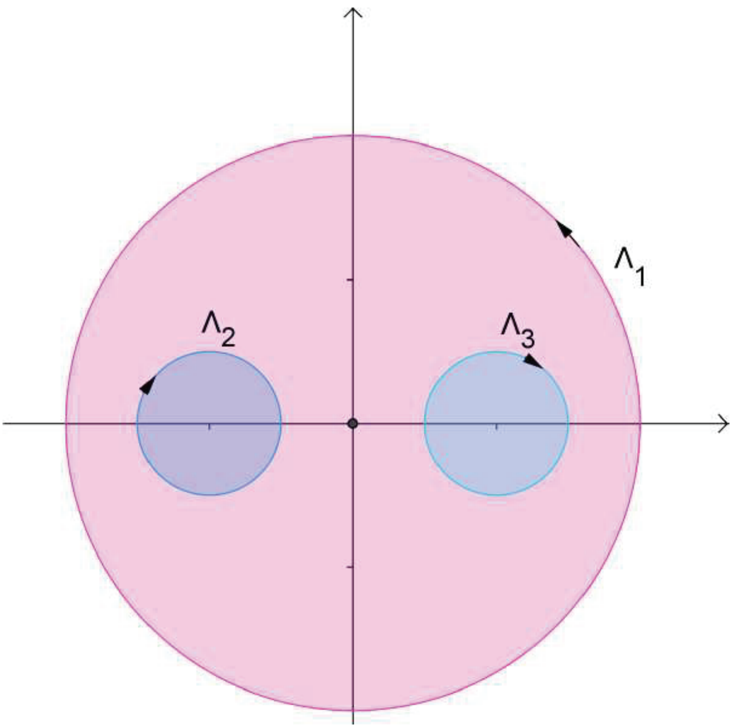

Figura 6.3: La curva $\mathcal{C}$ la curva costituita $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$

Soluzione 6.1.6. *Si ha:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_4} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_5} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_6} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_7} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_8} \frac{1}{z} dz$$

e siccome:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_5} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

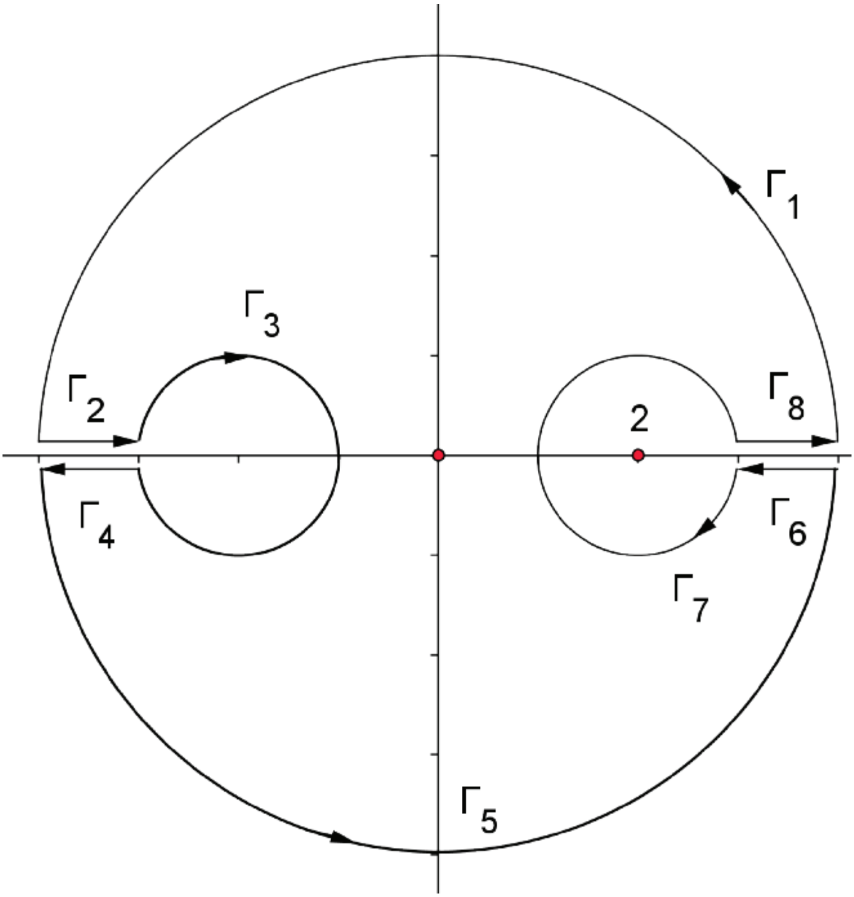

Figura 6.4: Il contorno di integrazione

$$\int_{\Gamma_3} \frac{1}{z} dz = \int_{\Gamma_7} \frac{1}{z} dz = 0.$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_4} \frac{1}{z} dz = 0.$$

$$\int_{\Gamma_6} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_8} \frac{1}{z} dz = 0.$$

si avrà che:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Esercizio 6.1.7. *Calcolare:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{2z-2}{z(z-2)} dz.$$

essendo $\mathcal{C}$ la curva dell'esercizio precedente.

Soluzione 6.1.7. *Poichè:*

$$\frac{2z-2}{z(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2}.$$

si avrà:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} dz = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz + \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz.$$

Resta dunque da calcolare:

$$\int\limits_{C} \frac{1}{z-2} dz = \sum_{j=1}^{8} \int\limits_{\Gamma_j} \frac{1}{z-2} dz.$$

Ovviamente, si ha che il ***contributo*** *di Γ_2 e Γ_4 è* ***nullo*** *così come quello di Γ_6 e Γ_8. Anche il* ***contributo*** *di Γ_3 è* ***nullo*** *perchè su tale curva e nel suo interno la funzione integranda è* ***analitica****. D'altra parte:*

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{z-2} dz = -\int\limits_{\Gamma_7} \frac{1}{z-2} dz.$$

e quindi:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{2z-2}{z(z-2)} dz = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Esercizio 6.1.8. *Sia:*

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

e sia:

$$\begin{aligned} f : \Gamma &\to \Gamma \\ z &\to \overline{z} \end{aligned}.$$

Dimostrare che:

1. *f è continua si Γ.*
2. *Non può esistere una **successione di polinomi** $(p_n(z))_n$ che **converge uniformemente** a f su Γ.*

Soluzione 6.1.8. *Per quanto riguarda la **prima parte**, dobbiamo dimostrare che per ogni $z_0 \in \Gamma$ si ha che:*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta\,(z_0, \varepsilon) > 0 : |z - z_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Poichè:

$$|f(z) - f(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|.$$

*assegnato $\varepsilon > 0$ basterà scegliere $\delta = \varepsilon$ per avere la tesi. Supponiamo ora che esista una **successione di polinomi** $p_n(z)$ che **converge uniformemente** a f su Γ. Poichè i polinomi sono **analitici** su Γ e nel **suo interno** si ha:*

$$\int_\Gamma p_n(z)dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ed inoltre:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = 2\pi i.$$

Ma se fosse:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) \underset{unif}{=} f(z).$$

allora avremmo:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma p_n(z)dz = \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} p_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i.$$

*e ciò è **assurdo**.*

6.2 Teorema e formula integrale di Cauchy

Esercizio 6.2.1. *Sia z_0 un punto qualsiasi di $\mathbb{C}$ e $\mathcal{C}$ una circonferenza di centro z_0 e raggio $r > 0$ **orientata** in **senso antiorario**. Calcolare:*

$$\int_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz.$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Soluzione 6.2.1. *Supponiamo dapprima che sia $n \neq -1$. In tal caso posto:*

$$f(z) = (z - z_0)^n .$$

si ha che:

$$g(z) = \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1} .$$

*è **una primitiva** di $f(z)$ perchè $g'(z) = f(z)$ e quindi siccome $\mathcal{C}$ è una **curva chiusa** si ha che:*

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0.$$

Se $n = -1$ parametrizziamo $\mathcal{C}$ ponendo:

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \;\; t \in [0, 2\pi] .$$

e otteniamo:

$$\int_C \frac{1}{(z - z_0)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z_0)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i.$$

Esercizio 6.2.2. *Sia* $\mathcal{C}$ *la* ***circonferenza unitaria*** *di centro l'origine parametrizzata da:*

$$\gamma(t) = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sia:

$$f(z) = \frac{z}{4 - z^2}.$$

Calcolare:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - i/2} dz$$

Soluzione 6.2.2. *Osserviamo che la funzione* ***sulla curva*** $\mathcal{C}$ *e* ***nel suo interno*** *è analitica.* [1]*Pertanto per il* ***Teorema di Cauchy*** *si ha:*

$$\int_C \frac{f(z)}{z - i/2} dz = 2\pi i f\left(\frac{i}{2}\right) = 2\pi i \frac{i/2}{4 + 1/4} = -\frac{4\pi}{17}.$$

Esercizio 6.2.3. *Sia* $\mathcal{C}$ *la* ***circonferenza unitaria*** *di centro l'origine parametrizzata da:*

$$\gamma(t) = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sia $f(z) = z$ Calcolare:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{2z + 1} dz.$$

Soluzione 6.2.3. *La funzione* $f(z)$ ***non ha singolarità*** *in* $\mathbb{C}$. *Scriviamo allora:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{2z + 1} dz = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z + 1/2)} dz.$$

Per la ***Formula integrale di Cauchy*** *si ha:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z + 1/2)} dz = 2\pi i f(-1/2) = -i\pi.$$

[1]Le singolarità al finito della funzione sono $z = \pm 2$ che però sono esterne alla curva

Esercizio 6.2.4. *Sia $\mathcal{C}$ la* ***curva chiusa*** *del piano complesso delimitata dalle rette $x = \pm 3$ $y = \pm 3i$ e* ***orientata positivamente****. Si calcoli:*

$$\int_C \frac{\sin z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\left(z^2 + 16\right)} dz.$$

Soluzione 6.2.4. *Consideriamo:*

$$f(z) = \frac{\sin z}{\left(z^2 + 16\right)}.$$

Tale funzione, avendo come uniche singolarità al finito, $z = \pm 4i$, risulta essere analitica ***sulla curva e ne suo interno****. Osserviamo poi che $z_0 = \pi/2$ è interno alla curva. Allora per la* ***Formula integrale di Cauchy*** *si ha:*

$$\int_C \frac{\sin z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\left(z^2 + 16\right)} dz = \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} dz = 2\pi i f\left(-\pi/2\right) = \frac{-8\pi i}{\pi^2 + 64}.$$

Esercizio 6.2.5. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza $|z| = \sqrt{2}$* ***orientata positivamente****. Si calcoli:*

$$\int_C \frac{z}{\left(4 - z^2\right)\left(z + i\right)} dz.$$

Soluzione 6.2.5. *Consideriamo:*

$$f(z) = \frac{z}{\left(4 - z^2\right)}.$$

Tale funzione, avendo come uniche singolarità al finito $z = \pm 2$, è ***analitica sulla curva e nel suo interno****. Osserviamo poi che $z_0 = -i$ è contenuto nell'interno della curva. Quindi*

$$\int_C \frac{z}{\left(4 - z^2\right)\left(z + i\right)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = \frac{2\pi i}{5}(-i) = \frac{2\pi}{5}.$$

Esercizio 6.2.6. *Calcolare:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza $|z| = 3$.

Soluzione 6.2.6. *Ricordiamo la* ***Formula generalizzata di Cauchy****:*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Nel nostro caso $f(z) = e^{2z}$, $a = -1$ ed $n = 3$. Si ha dunque:

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz.$$

da cui:

$$\int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}.$$

Esercizio 6.2.7. *Sia:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

una funzione analitica in $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Supponiamo che:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|}.$$

Dimostrare che:

$$|a_n| < e \ \ \forall n \ \geq 1.$$

Soluzione 6.2.7. *Siccome: $f'(0) = a_1$ direttamente dall'ipotesi, avremo che:*

$$|a_1| = |f'(0)| < \frac{1}{1-0} < e.$$

Quindi per $n = 1$ la proprietà è vera. Se consideriamo $f'(z)$ abbiamo che essa è rappresentata dalla serie:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

per ogni $z \in D$. Posto:

$$g(z) = f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

abbiamo allora:

$$g^{(n-1)}(0) = n! a_n.$$

La ***Formula generalizzata di Cauchy*** *ci dice allora che:*

$$g^{(n-1)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{g(z)}{z^n} dz.$$

dove $\mathcal{C}_r$ è la circonferenza di centro 0 e raggio r tale che $0 < r < 1$. Ne segue che:

$$n! a_n = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{g(z)}{z^n} dz.$$

e dunque:

$$n a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{g(z)}{z^n} dz.$$

Se $n > 1$ possiamo scegliere $r = 1 - \frac{1}{n}$. Si ha allora che:

$$|n a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{g(z)}{z^n} dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g(z)}{z^n} \right| |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(z)|}{|z^n|} |dz|.$$

e siccome:

$$|g(z)| = |f'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{1}{1-r}.$$

ed inoltre:

$$|z^n| = r^n \quad |dz| = r.$$

otteniamo:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-r} \frac{r}{r^n} d\theta.$$

e quindi:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^{n-1}} \frac{1}{1-r} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{(1-r)\, r^{n-1}}$$

Ricordando il valore di r *si ha che per ogni* $n > 1$

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{(1-r)\, r^{n-1}} = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n+1}.$$

e quindi:

$$|a_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

da cui:

$$|a_n| \leq \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-n+1} = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-n} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) <$$

$$< \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-n} < e$$

Pertanto, ***per ogni*** $n \geq 1$ *si ha* $|a_n| < e$.

Esercizio 6.2.8. *E' data la funzione:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right) z^n.$$

Dimostrare che:

1. *Il* ***raggio di convergenza*** *della serie è* 1.

2. Esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ *con* $|z_0| < 1$ *per il quale:*

$$|f'(z_0)| > \frac{1}{1 - |z_0|}.$$

Soluzione 6.2.8. *Per quanto riguarda* ***la prima parte****, si ha che:*

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2}.$$

e siccome denotando con r *il* ***raggio di convergenza****, vale la formula:*

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

abbiamo:

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to+\infty} \sup \left(\frac{3n+6-5}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(3 - \frac{5}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Per quanto riguarda ***la seconda parte****, si osservi che se per assurdo si avesse:*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{1 - |z|}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $|z| < 1$*,* ***in base all'esercizio precedente****, si avrebbe:*

$$|a_n| < e.$$

per ogni $n \geq 1$*. Ciò però, nel nostro caso, è* ***falso*** *in quanto:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > e.$$

e quindi esiste $m \in \mathbb{N}$ *tale per cui* ***per ogni*** $n > m$ *si ha* $a_n > e$*.*

Esercizio 6.2.9. *Sia* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *e si abbia:*

$$\forall z \in D \Rightarrow f(z) \in D \ .$$

Dimostrare che:

$$|f'(0)| \leqslant 1.$$

Soluzione 6.2.9. *Sia* $0 < r < 1$ *e sia* $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio* r*. Allora:*

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^2} dz \right|.$$

e quindi:

$$|f'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^2} r d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Siccome, per ipotesi, $f(D) \subseteq D$ *si avrà che* $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq 1$ *e quindi:*

$$|f'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi r} \int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{r}.$$

Allora:

$$|f'(0)| \leqslant \inf_{0<r<1} \frac{1}{r} = 1.$$

che è la tesi.

Esercizio 6.2.10. *Sia* f *una funzione analitica su:*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Si supponga che:

$$[\operatorname{Re} f(0)]^2 = [\operatorname{Im} f(0)]^2 .$$

Dimostrare che:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right)\right]^2 d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left[\operatorname{Im} f\left(re^{i\theta}\right)\right]^2 d\theta.$$

per ogni $0 < r < 1$*.*

Soluzione 6.2.10. *Poniamo:*

$$g(z) = [f(z)]^2 .$$

La ***Formula integrale di Cauchy*** *permette di affermare che:*

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{g(z)}{z} dz.$$

se $0 < r < 1$*. Quindi:*

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{[f(z)]^2}{z} dz.$$

da cui:

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left[f(re^{i\theta})\right]^2}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta.$$

e dunque:

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

valida per $0 < r < 1$*. Scriviamo allora:*

$$[f(0)]^2 = [\operatorname{Re} f(0)]^2 + i [\operatorname{Im} f(0)]^2 .$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta + i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

Avremo:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta + i \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

da cui:

$$[\mathrm{Re}\, f\,(0)]^2 + i\,[\mathrm{Im}\, f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

e quindi:

$$[\mathrm{Re}\, f\,(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

$$[\mathrm{Im}\, f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

Allora:

$$[\mathrm{Re}\, f\,(0)]^2 - [\mathrm{Im}\, f(0)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

*e pertanto, **sottraendo membro a membro** e tenendo conto dell'ipotesi, si ha:*

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

da cui:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left[f(re^{i\theta})\right]^2 d\theta.$$

Esercizio 6.2.11. *Calcolare:*

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta.$$

Soluzione 6.2.11. *Per la **Formula integrale di Cauchy** si ha:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz = e^0 = 1.$$

posto allora $z = e^{i\theta}$ *si ha* $d\theta = ie^{i\theta}$ *e quindi:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = 1.$$

da cui:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = 2\pi.$$

Esercizio 6.2.12. *Calcolare*

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta.$$

Soluzione 6.2.12. *Per la **Formula generalizzata di Cauchy** si ha:*

$$1 = f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz.$$

da cui, operando la stessa sostituzione dell'esercizio precedente, si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{2i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = 1.$$

e quindi:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta = 1.$$

da cui segue:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}d\theta = 2\pi.$$

Esercizio 6.2.13. *Sia f una **funzione intera** e si supponga che:*

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta.$$

*sia una **funzione limitata**. Si provi che f è **costante**.*

Soluzione 6.2.13. *Sia z un punto qualsiasi di $\mathbb{C}$ e si scelga $R > 2|z|$. Per la **Formula integrale di Cauchy** si ha:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

e

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(w)}{w} dw.$$

da cui:

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w} \right) dw.$$

e quindi:

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{zf(w)}{w\,(w-z)} dw.$$

Ponendo $w = \mathrm{Re}^{i\theta}$ si ha:

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{zf(\mathrm{Re}^{i\theta})}{\mathrm{Re}^{i\theta}\,(w-z)} Rie^{i\theta} d\theta.$$

e quindi:

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{zf(\mathrm{Re}^{i\theta})}{(w-z)} d\theta.$$

Ma:
$$|w-z| \geqslant |w|-|z| = R-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}$$
da cui segue:
$$|f(z)-f(0)| \leqslant \frac{|z|}{R\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\mathrm{Re}^{i\theta})\right| d\theta.$$
e cioè:
$$|f(z)-f(0)| \leqslant \frac{|z|}{R\pi}F(R).$$
Tenendo ***fisso*** z *si ha allora:*
$$\lim_{R\to+\infty}|f(z)-f(0)| = 0.$$
in quanto, per ipotesi, $F(R)$ *è costante. Ne segue dunque che:*
$$f(z)-f(0)=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$
che è quanto si voleva provare.

Esercizio 6.2.14. *Sia* $f : D \to D$ *una funzione analitica e sia* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$*. Dimostrare che* $|f''(0)| \leq 2$ *e che il valore* 2 *è* ***ottimale****, cioè* ***non si può sostituire con uno più piccolo****.*

Soluzione 6.2.14. *Sia* $0 < r < 1$*, in base alla* ***Formula generalizzata di Cauchy*** *si ha:*
$$f^{(2)}(0) = \frac{2}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(w)}{w^3}dw.$$
e quindi:
$$\left|f^{(2)}(0)\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\max_{|w|=r}\left|\frac{f(w)}{w^3}\right| 2\pi r.$$
da cui, data l'ipotesi sulla f*,*
$$\left|f^{(2)}(0)\right| \leqslant \frac{2}{r^2}\,|f(w)| \leqslant \frac{2}{r^2}.$$

Ne segue che:

$$\left|f^{(2)}(0)\right| \leqslant \inf_{0<r<1} \frac{2}{r^2} = 2.$$

che è quanto si voleva provare. Se si considera poi la funzione $f(z) = z^2$ *si vede che essa soddisfa le ipotesi del teorema e si ha* $f''(0) = 2$ *e dunque tale valore è **ottimale**.*

Capitolo 7

Calcolo dei residui

7.1 Applicazione diretta della serie di Laurent

Esercizio 7.1.1. *Trovare il* ***residuo*** *della funzione:*

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}.$$

in $z = 0$.

Soluzione 7.1.1. *Scriviamo:*

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

e vediamo che il ***residuo*** *è* 1.

Esercizio 7.1.2. *Trovare il* ***residuo*** *della funzione:*

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+1)}.$$

in $z = 0$.

Soluzione 7.1.2. *Se scriviamo:*

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+1)} = z^3 \frac{1}{1+z}.$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

che vale per $|z| < 1$*. Allora abbiamo:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+3} = z^3 - z^4 + z^5 \cdots .$$

da cui deduciamo che il ***residuo*** *cercato è* 0*.*

Esercizio 7.1.3. *Trovare il* ***residuo*** *della funzione:*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6}.$$

in $z = 0$*.*

Soluzione 7.1.3. *Poichè per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si ha:*

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots .$$

abbiamo:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z}{7!} + \cdots .$$

da cui si vede che il ***residuo*** *cercato è* $\frac{1}{5!}$*.*

Esercizio 7.1.4. *Trovare il* ***residuo*** *della funzione:*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^7}.$$

in $z = 0$

Soluzione 7.1.4. *Di nuovo utilizzando:*

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots .$$

si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z^6} - \frac{1}{3!z^4} + \frac{1}{5!z^2} - \frac{1}{7!} + \frac{z^2}{9!} \cdots .$$

*e quindi in questo caso il **residuo** è* 0.

Esercizio 7.1.5. *Trovare il **residuo** della funzione:*

$$f(z) = \frac{e^z}{z\left(z^2+1\right)}.$$

in $z = 0$.

Soluzione 7.1.5. *Se* $0 < |z| < 1$ *si può senza dubbio scrivere:*

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 - z^2 + z^4 + \cdots\right).$$

e quindi:

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5}{6}z^2 + \cdots .$$

*da cui si vede che il **residuo** cercato vale* 1.

Esercizio 7.1.6. *Trovare il **residuo** della funzione:*

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin z}.$$

in $z = 0$.

Soluzione 7.1.6. *Scriviamo:*

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin z} = \frac{e^z}{z}\frac{z}{\sin z}.$$

e osserviamo che:

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!}.$$

D'altra parte:

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots}.$$

Se poniamo:

$$\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right) = 1.$$

otteniamo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 - \frac{1}{3!} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

e quindi:

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3!}z^2 + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{3}{2} + \cdots.$$

da cui deduciamo che il ***residuo*** *cercato vale* 1.

7.2 Caso delle singolarità di tipo polo

Esercizio 7.2.1. *Trovare il* ***residuo*** *della funzione:*

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}.$$

in $z = 1$.

Soluzione 7.2.1. *Possiamo riscrivere*[1]

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} = \frac{1}{(z + 1)(z - 1)}.$$

[1] Nel fare ciò teniamo conto che $z = \pm i$ sono singolarità eliminabili

Anzichè procedere nel solito modo, teniamo conto del fatto che se $z = z_0$ è un polo di ordine k, vale la formula:

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z - z_0)^k f(z) \right\}.$$

Nel nostro caso $z_0 = 1$ e $k = 1$, e quindi abbiamo:

$$a_{-1} = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 7.2.2. *Trovare il **residuo** della funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{\sinh^2 z}.$$

in $z = 0$.

Soluzione 7.2.2. *E' facile verificare che $z = 0$ è un polo di ordine 2 per tale funzione, tenuto conto dello **sviluppo di Taylor** della funzione $\sinh z$. Applichiamo allora la formula precedente:*

$$a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{1}{\sinh^2 z} \right\}.$$

e quindi:

$$a_{-1} = \lim_{z \to 0} \frac{2z \sinh z - 2z^2 \cosh z}{\sinh^3 z}.$$

e quindi:

$$a_{-1} = 2 \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sinh z} \left\{ \frac{\sinh z - z \cosh z}{\sinh^2 z} \right\}.$$

Ma:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sinh z} = 1.$$

e

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sinh z - z \cosh z}{\sinh^2 z} = 0.$$

*Questi limiti possono essere facilmente valutati o mediante l'uso della **regola di De L'Hospital** o mediante l'utilizzo degli **sviluppi in serie delle funzioni** $\sinh z$ e $\cosh z$ (Lo studente è vivamente incoraggiato a provare quest'ultimo metodo).*
Pertanto si ha che $a_{-1} = 0$.

7.3 Teorema dei Residui

Esercizio 7.3.1. *Calcolare:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{5z-2}{z(z-2)} dz.$$

dove $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 3$ percorsa in ***senso antiorario****.*

Soluzione 7.3.1. *Le singolarità della funzione sono* ***poli semplici*** *e sono situate in $z = 0$ e $z = 2$ e pertanto sono* ***interne*** *alla curva che costituisce il cammino di integrazione. Si ha:*

$$\text{Res}\,(f)_{z=0} = \lim_{z\to 0} z \frac{5z-2}{z(z-2)} = 1.$$

ed inoltre:

$$\text{Res}\,(f)_{z=2} = \lim_{z\to 2}(z-2) \frac{5z-2}{z(z-2)} = 4.$$

Pertanto:

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-2)} dz = 2\pi i \left\{\text{Res}\,(f)_{z=0} + \text{Res}\,(f)_{z=2}\right\} = 2\pi i\,(5) = 10\pi i.$$

Esercizio 7.3.2. *Calcolare:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cosh z}{z^3} dz.$$

Soluzione 7.3.2. *Poichè:*

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha:

$$f(z) = \frac{\cosh z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} + \cdots \frac{z^{2n-3}}{(2n)!} + \cdots .$$

*e quindi $z = 0$ è l'unica singolarità al **finito** della funzione e si ha:*

$$\mathrm{Res}(f)_{z=0} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int\limits_{C} \frac{\cosh z}{z^3} dz = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

Capitolo 8

Applicazioni del Teorema dei Residui

8.1 Calcolo di integrali definiti reali

Ci occuperemo di integrali del tipo:

$$\int_0^{2\pi} f\,(\cos\theta, \sin\theta)d\theta \tag{8.1}$$

facendo vedere come essi possano essere ricondotti a integrali nel **piano complesso** che successivamente possono essere determinati col **Teorema dei Residui**. Consideriamo la circonferenza unitaria $\mathcal{C}$ in $\mathbb{C}$. Se $z \in \mathcal{C}$, possiamo scrivere:

$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

e quindi:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta.$$

da cui otteniamo:

$$d\theta = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}.$$

D'altra parte:

$$\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz} \end{array}.$$

e quindi (8.1) può essere riscritto come un integrale di linea (lungo la circonferenza unitaria) nel piano $\mathbb{C}$.

Esercizio 8.1.1. *Calcolare:*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{24 - 8\cos\theta}.$$

Soluzione 8.1.1. *Tenuto conto della premessa, abbiamo:*

$$I = -i \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z\left[24 - 8\frac{z^2+1}{2z}\right]}.$$

ovvero:

$$I = \frac{i}{4} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2 - 6z + 1)}.$$

Le singolarità della funzione integranda sono costituite dagli ***zeri del denominatore****. Essi sono:*

$$\begin{array}{l} z_1 = 3 + 2\sqrt{2} \\ z_2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{array}$$

Di essi, solo z_2 è ***interno al cerchio unitario*** *e quindi ci interessa calcolare solo il residuo in z_2. Dopo avere scritto:*

$$z^2 - 6z + 1 = (z - z_1)(z - z_2).$$

avremo:

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=z_2} = \lim_{z\to z_2} (z - z_2) \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{(z_2 - z_1)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Ne segue che:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2-6z+1)} = 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}.$$

e quindi:

$$I = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

8.2 Calcolo di Integrali impropri reali

8.2.1 Singolarità di tipo polo non reali

Esercizio 8.2.1. *E' ben noto dall'**Analisi Reale** che:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi.$$

*Dimostrare questo risultato per mezzo dell'integrazione nel **piano complesso**.*

Soluzione 8.2.1. *Consideriamo, nel **piano complesso**, la curva costituita da*$\mathcal{C} = c_1 + c_2$*. Per il Teorema dei Residui si ha che:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res} f(z).$$

dove $f(z)$ è la funzione integranda e i residui che si considerano sono quelli relativi alle singolarità contenute nell'interno di $\mathcal{C}$. Le singolarità di $f(z)$ sono solo $z = \pm i$ e di queste ci interessa solo $z = i$. Si ha che:

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=i} = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}.$$

e quindi:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Osserviamo ora che:

$$\int_{C} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_{c_1} \frac{1}{z^2+1} dz + \int_{c_2} \frac{1}{z^2+1} dz.$$

Se dimostriamo che:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{c_2} \frac{1}{z^2+1} dz = 0.$$

Avremo:

$$\pi = \lim_{R \to +\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2+1} dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{c_1} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx.$$

Ma:

$$|z|^2 = \left|z^2 + 1 - 1\right| \leq \left|z^2 + 1\right| + 1.$$

e quindi:

$$|z|^2 - 1 \leq \left|z^2 + 1\right|.$$

Se $|z| = R$ *si ha pertanto:*

$$\left|z^2 + 1\right| \geq R^2 - 1.$$

e quindi:

$$\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1}.$$

purchè si sia scelto $R > 1$*. Ricordando che:*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \, L(\gamma).$$

dove $L(\gamma)$ *denota la lunghezza della curva* γ*, si ha:*

$$\left| \int_{c_2} \frac{1}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \pi R.$$

e quindi è vero che:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{c_2}\frac{1}{z^2+1}dz\right|=0.$$

da cui la tesi.

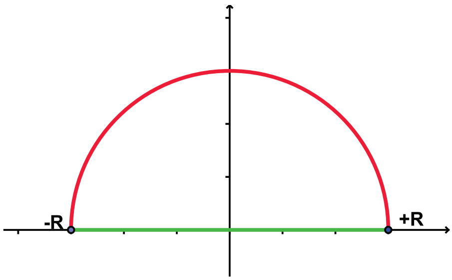

Figura 8.1: Il cammino di integrazione

Esercizio 8.2.2. *Calcolare:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx.$$

Soluzione 8.2.2. *Consideriamo:*

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z^6+1}dz.$$

essendo $\mathcal{C}$ la curva dell'esercizio precedente. Le singolarità della funzione integranda sono date dalle soluzioni di $z^6+1=0$ e sono pertanto:

$$z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\quad k=0\cdots 5.$$

e dunque:

$$\begin{cases} z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} \\ z_1 = e^{\frac{3\pi}{6}i} \\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i} \\ z_3 = e^{\frac{7\pi}{6}i} \\ z_4 = e^{\frac{9\pi}{6}i} \\ z_5 = e^{\frac{11\pi}{6}i} \end{cases}$$

*e sono **poli semplici**. Di esse, **solo** le prime tre si trovano nell'interno della curva $\mathcal{C}$ (per R abbastanza grande) e perciò siamo interessati **solo** al calcolo dei residui ad esse relativi. Si ha:*

$$\begin{array}{l} \text{Res} f(z)_{z=z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{1}{z^6+1} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{6}i} \\ \text{Res} f(z)_{z=z_1} = \lim\limits_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^6+1} = \lim\limits_{z \to z_1} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{2}i} \\ \text{Res} f(z)_{z=z_2} = \lim\limits_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{1}{z^6+1} = \lim\limits_{z \to z_1} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi}{6}i} \end{array}$$

*dove nell'ultimo passaggio del calcolo di ciascun limite si è fatto uso della **Regola di De L'Hospital**. Allora:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^6+1} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{6}i} + \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{2}i} + \frac{1}{6} e^{-\frac{25\pi}{6}i} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ma:

$$\int\limits_{C} \frac{1}{z^6+1} dz = \int\limits_{c_1} \frac{1}{z^6+1} dz + \int\limits_{c_2} \frac{1}{z^6+1} dz.$$

*e quindi, come nell'**esercizio precedente**, se dimostriamo che:*

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{c_2} \frac{1}{z^6+1} dz = 0.$$

avremo che:

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{c_1} \frac{1}{z^6+1} dz = \frac{2\pi}{3}.$$

da cui seguirà che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx = \frac{2\pi}{3}.$$

e quindi l'integrale richiesto vale $\pi/3$. *Dimostriamo dunque che:*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{c_2} \frac{1}{z^6+1} dz = 0.$$

*Per fare ciò si procede esattamente come nell'**esercizio precedente**:*

$$\left|z^6+1\right| \geq R^6 - 1.$$

da cui:

$$\left| \int_{c_2} \frac{1}{z^6+1} dz \right| \leq \frac{1}{R^6-1} \pi R.$$

e quindi:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{c_2} \frac{1}{z^6+1} dz \right| = 0.$$

Esercizio 8.2.3. *Calcolare:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2 \left(x^2+2x+2\right)} dx.$$

Soluzione 8.2.3. *Consideriamo:*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2z+2\right)} dz.$$

dove la curva $\mathcal{C}$ *è quella degli esercizi precedenti. Le singolarità della funzione integranda sono:*

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_1 = -i \\ z_2 = -1+i \\ z_3 = -1-i \end{cases}$$

Di queste, quando R è sufficientemente grande, solo z_0 e z_2 si trovano nell'interno della curva considerata. Esse sono poli e di questi z_0 è ***doppio*** *mentre z_2 è un polo* ***semplice****. Abbiamo quindi:*

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=z_0} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2 (z-i)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z+i)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2i\left[(i+i)(-1+2i+2)\right]+\left[2(-1+2i+2)+(i+i)(2i+2)\right]}{(i+i)^3(-1+2i+2)^2}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{-4(1+2i)+[2+4i-4+4i]}{-8i(-3+4i)}\right\} = \frac{-12+9i}{100}.$$

Inoltre:

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=z_2} = \lim_{z\to -1+i} (z+1-i) \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2(z+1-i)(z+1+i)}.$$

da cui:

$$\lim_{z\to -1+i} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}.$$

e quindi:

$$\int_C \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)} dz = 2\pi i\left(\frac{3-4i}{25}+\frac{-12+9i}{100}\right) = \frac{7\pi}{50}.$$

Come al solito scriviamo:

$$\int_C \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)} dz =$$

$$= \int_{c_1} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)} dz + \int_{c_2} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)} dz$$

e dimostriamo che:

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{c_2}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz=0.$$

Si ha:

$$\left|\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right|=\frac{R^2}{\left|\left(z^2+1\right)^2\right|}\frac{1}{\left|\left(z^2+2z+2\right)\right|}.$$

ed inoltre:

$$\left|z^2+1\right|\geq R^2-1.$$

come pure:

$$\left|\left(z^2+2z+2\right)\right|\geq R^2-2R-2.$$

e dunque:

$$\left|\int\limits_{c_2}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz\right|\leq\frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^2\left(R^2-2R-2\right)}\pi R.$$

da cui la tesi cercata. Pertanto:

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{c_1}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}dz=\frac{7\pi}{50}.$$

e quindi:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=\frac{7\pi}{50}.$$

8.2.2 Singolarità di tipo polo reali

Esercizio 8.2.4. *Calcolare:*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}.$$

Soluzione 8.2.4. ***Non si può*** *utilizzare la curva $\mathcal{C}$ degli esercizi precedenti perchè* ***una delle singolarità della funzione integranda si trova su tale curva****: si tratta del punto $z = -1$. Utilizziamo allora: la curva $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. dove:*

$$\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

rappresenta la ***radice primitiva*** *dell'unità.*[1] *Osserviamo che le singolarità sono:*

$$\begin{cases} z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} \\ z_1 = e^{\frac{3\pi}{3}i} = -1 \\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{3}i} \end{cases}$$

Osserviamo che di queste solo z_0 è contenuta nell'interno della curva della figura fig 8.2 e che tale singolarità può essere espressa mediante ω. Infatti:

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} = -e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\omega^2.$$

ed inoltre:

$$z_0^3 = -\omega^6 = -1.$$

Allora:

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{1}{z^3+1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3\omega^4} = \frac{1}{3\omega}.$$

e quindi:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^3+1} = \frac{2\pi i}{3\omega}.$$

Ma:

$$\int_C \frac{dz}{z^3+1} = \int_{c_1} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1} + \int_{c_3} \frac{dz}{z^3+1}.$$

e quindi:

$$\int_0^R \frac{dt}{t^3+1} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1} + -\omega \int_0^R \frac{dt}{t^3+1} = \frac{2\pi i}{3\omega}.$$

[1] Tale radice genera il **gruppo ciclico** di ordine 3 costituito dalle radici terze dell'unità

ovvero:
$$(1-\omega)\int_0^R \frac{dt}{t^3+1} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1} = \frac{2\pi i}{3\omega}.$$
Osserviamo allora che:
$$\left|\int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{R}^3-1}\frac{2\pi R}{3}.$$
e pertanto:
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1}\right| = 0.$$
e dunque:
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1} = 0.$$
Allora, dal fatto che:
$$\lim_{R\to+\infty}\left\{(1-\omega)\int_0^R \frac{dt}{t^3+1} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^3+1}\right\} = \frac{2\pi i}{3\omega}.$$
*e dal **limite precedente**, si deduce che:*
$$\lim_{R\to+\infty}(1-\omega)\int_0^R \frac{dt}{t^3+1} = \frac{2\pi i}{3\omega}.$$
e quindi:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} = \frac{2\pi i}{3\omega\,(1-\omega)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

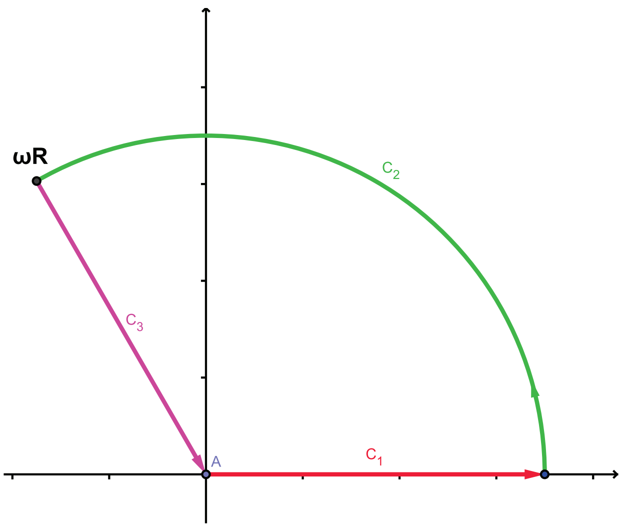

Figura 8.2: ω è la radice primitiva dell'unità.

8.2.3 Integrali di Fourier

Ci occuperemo di integrali del tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos mx dx. \tag{8.2}$$

o

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin mx dx. \tag{8.3}$$

che verranno ottenuti considerando l'integrale:

$$\int_{C} f(z) e^{imz} dz.$$

nel piano complesso, dove $\mathcal{C}$ è un **opportuno cammino di integrazione**. Una volta noto questo integrale, (8.2) o (8.3) si otterranno da esso prendendone la **parte reale o immaginaria**.

Esercizio 8.2.5. *Sia $f(z)$ una* ***funzione analitica*** *sulla curva $\gamma(R)$ del piano complesso parametrizzata da:*

$$z = \mathrm{Re}^{i\theta} \ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

essendo R un numero ***reale positivo arbitrario ma fissato****. Supponiamo che esistano due costanti reali positive M e k tali per cui:*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}.$$

per ogni $z \in \gamma(R)$. Dimostrare che se m è un qualsiasi numero positivo fissato si ha:

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\gamma(R)} e^{imz} f(z)\, dz = 0.$$

Soluzione 8.2.5. *Si ha che:*

$$\int\limits_{\gamma(R)} e^{imz} f(z)\, dz = \int\limits_0^\pi e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} d\theta.$$

e dunque:

$$\left| \int\limits_0^\pi e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int\limits_0^\pi \left| e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} \right| d\theta.$$

da cui:

$$\int\limits_0^\pi \left| e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} \right| d\theta = \int\limits_0^\pi \left| e^{im\mathrm{R}\cos\theta - mR\sin\theta} f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) Rie^{i\theta} \right| d\theta =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left| e^{im\mathrm{R}\cos\theta} \right| e^{-mR\sin\theta} \left| f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) \right| R\, |i| \left| e^{i\theta} \right| d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} R \left| f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) \right| d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} d\theta.$$

Ma

$$\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta.$$

e siccome [2]

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}.$$

avremo:

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR\frac{2\theta}{\pi}} d\theta.$$

da cui:

$$\frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} d\theta \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k} \left(1 - e^{-mR}\right).$$

e siccome:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi M}{mR^k} \left(1 - e^{-mR}\right) = 0.$$

si ha la tesi.

Nota 8.2.1. *Dimostriamo che:*

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \ .$$

Per $\theta = 0$ *o* $\theta = \pi/2$ *essa è* ***banalmente*** *vera. Supponiamo dunque* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *e consideriamo, in tale intervallo, la funzione*

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}.$$

[2] Vedi nota alla fine dell'esercizio.

si ha:

$$f'(\theta) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2}.$$

e quindi, nell'intervallo considerato si ha:

$$f'(\theta) \leq 0 \Leftrightarrow \theta\cos\theta - \sin\theta \leq 0.$$

e quindi:

$$\theta\cos\theta - \sin\theta \leq 0 \Leftrightarrow \theta \leq tg\theta. \tag{8.4}$$

Posto:

$$g(\theta) = \theta$$

$$h(\theta) = tg\theta$$

si ha:

$$g'(\theta) = 1$$

$$h'(\theta) = \tfrac{1}{\cos^2\theta}$$

e dunque:

$$g'(\theta) \leq h'(\theta) \ \ \forall\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Allora:

$$\int_0^\theta g'(t)dt \leq \int_0^\theta h'(t)dt \ \forall\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi:

$$g(\theta) - g(0) \leq h(\theta) - h(0) \ \forall\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

da cui:

$$\theta \leq tg\theta \ \forall\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

In virtù della (8.4) *ciò prova la tesi.*

Nota 8.2.2. *Esiste anche un* ***modo geometrico*** *per dimostrare la precedente disuguaglianza. Esso è basato sul fatto che nell'intervallo* $[0, \pi/2]$ *la funzione* $f(x) = sin(x)$ *è* ***concava****. Si osservi il grafico riportato:*

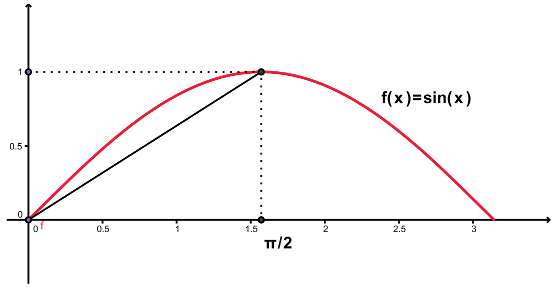

Figura 8.3: Poichè la funzione $\sin(x)$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$ è concava si ottiene subito la disuguaglianza

Esercizio 8.2.6. *Calcolare:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx \qquad m > 0\,.$$

Soluzione 8.2.6. *Consideriamo la funzione:*

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1}.$$

e l'integrale:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz.$$

*dove $\mathcal{C}$ è lo stesso contorno semicircolare degli esercizi precedenti. Le singolarità di $f(z)$ sono **poli semplici** dati da:*

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_1 = -i \end{cases}$$

e solo z_0 è contenuto nell'interno della curva. Si ha:

$$\mathrm{Res} f(z)_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{e^{imz}}{(z-z_0)(z-z_1)} = \lim_{z \to i} \frac{e^{imz}}{(z+i)} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

e quindi:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m}.$$

Quindi:
$$\int_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \int_{c_1} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz + \int_{c_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz.$$
e cioè:
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz + \int_{c_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$
da cui:
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx + \int_{c_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$
Se poniamo:
$$g(x) = \frac{\sin mx}{x^2+1}.$$
*è immediato verificare che $g(x)$ è una funzione **dispari** e quindi*
$$i\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx = 0.$$
D'altra parte, se poniamo:
$$h(x) = \frac{\cos mx}{x^2+1}.$$
*è immediato verificare che $h(x)$ è una funzione **pari** e quindi:*
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = 2\int_{0}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx.$$
Allora:
$$2\int_{0}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + \int_{c_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Siccome poi:

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} \leq \frac{1}{R^2-R^2/2} = \frac{2}{R^2} \qquad R > \sqrt{2}.$$

per l'esercizio 8.2.5 si ha che:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{c_2} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz = 0.$$

e quindi:

$$\lim_{R\to\infty} 2 \int\limits_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \pi e^{-m}.$$

da cui:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-m}}{2}.$$

Esercizio 8.2.7. *Calcolare:*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Soluzione 8.2.7. *Si vorrebbe utilizzare l'integrale:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

ma il ***contorno di integrazione*** $\mathcal{C}$ ***non può essere lo stesso di prima*** *perchè su tale contorno c'è* ***la singolarità*** $z = 0$ *della funzione integranda. Utilizzeremo invece il contorno* $\mathcal{C}$ *indicato nella figura 8.4. Esso* ***non contiene singolarità*** *e perciò:*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

e quindi:

$$\int\limits_{c_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{c_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{c_3} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{c_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

e dunque:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{c_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{c_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Mediante il cambiamento di variabile $x = -y$ si ha:

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

e quindi:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

e dunque:

$$2i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_{c_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{c_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

In base all'esercizio 8.2.5 si ha che:

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{c_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Poniamo ora:

$$z = \varepsilon e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Si ha:

$$\int\limits_{c_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = i \int\limits_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta.$$

Consideriamo ora:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta.$$

e ricordiamo il seguente:

Teorema 8.2.1. *Se:*

$$\begin{array}{l} f:[c,d]\times[a,b]\to\mathbb{C} \\ (\varepsilon,\theta)\to f(\varepsilon,\theta) \end{array}$$

una funzione continua. Allora:

$$\begin{array}{l} F:[c,d]\to\mathbb{C} \\ \varepsilon\to F(\varepsilon) \end{array}$$

con:

$$F(\varepsilon)=\int_{a}^{b} f(\varepsilon,\theta)\,d\theta$$

è una ***funzione continua*** *e quindi:*

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} F(\varepsilon)=F(\varepsilon_0)=\int_{a}^{b} f(\varepsilon_0,\theta)\,d\theta=\int_{a}^{b}\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f(\varepsilon,\theta)\,d\theta.$$

Nel nostro caso si ha dunque:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=i\int_{\pi}^{0}\lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta=-i\pi.$$

Si ha quindi:

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} 2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}dx=\pi i.$$

e dunque:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

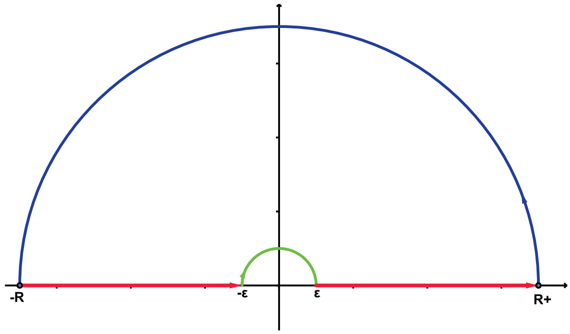

Figura 8.4: Il contorno di integrazione per evitare la singolarità nell'origine

8.3 Sommazione di serie

La **Teoria dei Residui** permette di ottenere il valore di **molte** serie convergenti. Occorre preliminarmente il seguente:

Teorema 8.3.1. *Sia ∂Q_N il bordo del quadrato di vertici $A(N)$,$B(N)$, $C(N)$, $D(N)$ dove:*

$$\begin{array}{l} A\,(N) = (\lambda, \lambda i) \\ B\,(N) = (-\lambda, \lambda i) \\ C\,(N) = (-\lambda, -\lambda i) \\ D(N) = (\lambda, -\lambda i) \\ \lambda = \lambda(N) = N + \frac{1}{2} \quad N \in \mathbb{N} \end{array}$$

Allora, esiste una costante reale positiva α tale che per ogni $z \in \partial Q_N$ si ha:

$$|\cot \pi z| \leq \alpha.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che:

$$\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = i\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}$$

e quindi:

$$|\cot \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi x-\pi y}+e^{-i\pi x+\pi y}}{e^{i\pi x-\pi y}-e^{-i\pi x+\pi y}} \right| \le \frac{\left|e^{i\pi x-\pi y}\right|+\left|e^{-i\pi x+\pi y}\right|}{\left|e^{i\pi x-\pi y}-e^{-i\pi x+\pi y}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|e^{i\pi x-\pi y}\right|+\left|e^{-i\pi x+\pi y}\right|}{\left|\left|e^{i\pi x-\pi y}\right|-\left|e^{-i\pi x+\pi y}\right|\right|} = \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{\left|e^{-\pi y}-e^{\pi y}\right|}.$$

Distinguiamo ora **vari casi**:

- $y > 1/2$.
- $y < -1/2$.
- $-1/2 \le y \le 1/2$..

Nel **primo** di essi si ha:

$$|\cot \pi z| \le \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} = \frac{e^{2\pi y}+1}{e^{2\pi y}-1}.$$

e siccome $y \to e^{-2\pi y}$ avremo che,in particolare, per tutti i punti del bordo del quadrato per i quali $y > 1/2$ si ha che:

$$|\cot \pi z| \le \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \alpha_1 > 0. \tag{8.5}$$

Nel **secondo** di essi si ha:

$$|\cot \pi z| \le \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{\left|e^{-\pi y}-e^{\pi y}\right|} = \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{-\pi y}-e^{\pi y}} = \frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \le \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \alpha_1 > 0.$$

in particolare, per tutti i punti del bordo del quadrato per i quali $y < -1/2$. Nel **terzo caso** procediamo così: Se

$$z = N + \frac{1}{2} + iy.$$

allora:

$$|\cot \pi z| = \left|\cot \pi \left(N + \tfrac{1}{2} + iy\right)\right| = \left|\cot \left(\tfrac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| =$$

$$= |\tanh \pi y| \le \left|\tanh \left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \alpha_2 > 0.$$

Se $z = -N - \frac{1}{2} + iy$ allora:

$$|\cot \pi z| = \left|\cot \pi \left(-N - \tfrac{1}{2} + iy\right)\right| = \left|\cot \left(-\tfrac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right|$$

$$= |\tanh \pi y| \leq \left|\tanh \left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \alpha_2 > 0$$

e quindi, per ogni $z \in \partial \mathcal{Q}_N$, si ha:

$$|\cot \pi z| \leq \max \{\alpha_1, \alpha_2\} = \alpha.$$

$\square$

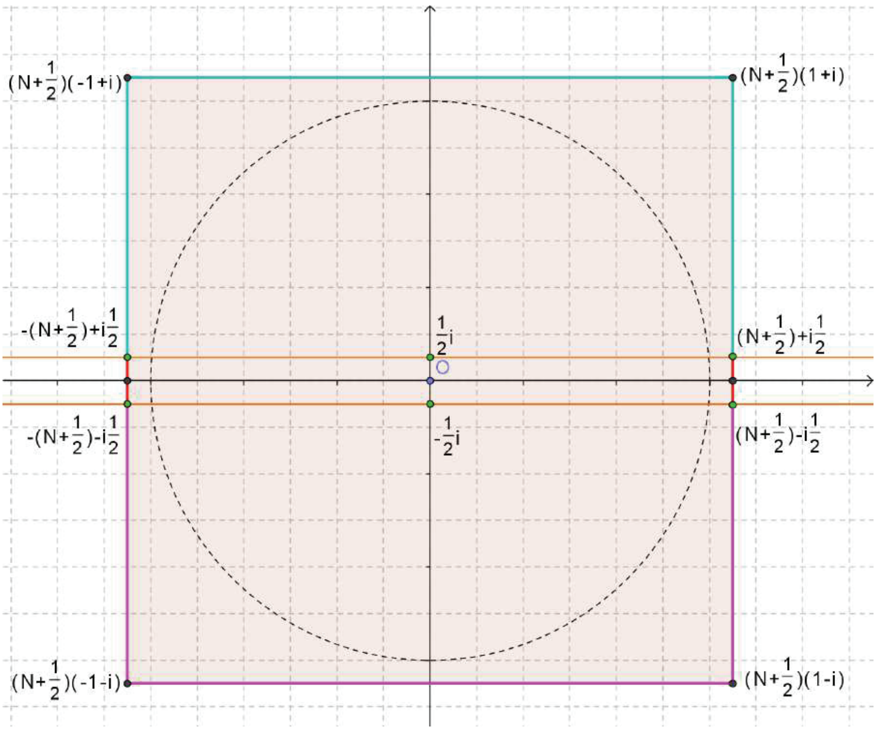

Figura 8.5: Il contorno azzurro corrisponde al primo caso, il contorno porpora al secondo, i segmenti in rosso al terzo. La circonferenza tratteggiata è quella di raggio N e quindi tutti i punti di $\partial \mathcal{Q}_N$ hanno modulo maggiore di N.

Ci occorre anche il seguente altro:

Teorema 8.3.2. *Sia $f(z)$ una funzione tale che sul contorno $\partial\mathcal{Q}_N$ del teorema precedente sia tale per cui esistono due costanti $M > 0$ e $k > 1$ tali che:*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}.$$

Supponiamo inoltre che f abbia soltanto un ***numero finito di poli*** *e che* ***nessuno di essi coincida con un intero****. Allora:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{p\in P} \mathrm{Res}\left\{f(z)\cot(\pi z)\right\}_{z=p}.$$

*dove P è l'****insieme dei poli*** *di $f(z)$.*

Dimostrazione. Poichè f ha solo un **numero finito di poli** si può scegliere un valore di N tale che il quadrato $\mathcal{Q}_N$ li contenga **tutti**. Sia:

$$g(z) = \pi f(z)\cot(\pi z).$$

e sia P_g l'insieme dei poli della funzione g. Per il Teorema dei Residui [3] Si ha:

$$\int\limits_{\partial\mathcal{Q}_N} f(z)\,\pi\cot(\pi z)\,dz = 2\pi i\left\{\sum_{\substack{p\in P_g\\ p\in\mathcal{Q}_N}} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=p}\right\}.$$

Ne segue allora che:

$$\left|\int\limits_{Q_N} f(z)\,\pi\cot(\pi z)\,dz\right| \leq \int\limits_{Q_N} |f(z)\,\pi\cot(\pi z)|\,dz \leq$$

$$\leq \tfrac{M}{N^k}\pi\alpha 8\left(N+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\pi\alpha M(8N+4)}{N^k}.$$

Infatti, se $L(\partial\mathcal{Q}_N)$ denota il perimetro del quadrato $\mathcal{Q}_N$, si ha:

$$\left|\int\limits_{\partial\mathcal{Q}_N} f(z)\,\pi\cot(\pi z)\,dz\right| \leq \sup_{z\in\partial\mathcal{Q}_N} |f(z)|\,\pi \sup_{z\in\partial\mathcal{Q}_N} |\cot(\pi z)|\,L(\partial\mathcal{Q}_N).$$

Inoltre è noto che:

[3] Si considera di percorrere il $\partial\mathcal{Q}_N$ in senso antiorario.

- $L\left(\partial\mathcal{Q}_N\right)$=$8N+4$.
- Per ogni $z \in \partial\mathcal{Q}_N$ si ha $|z| \geq N$.
- Per l'ipotesi su f si ha $\sup\limits_{z\in\partial Q_N} |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k} \leq \frac{M}{N^k}$ avendo tenuto conto anche del punto precedente.
- $\sup\limits_{z\in\partial Q_N} |\cot(\pi z)| \leq \alpha$ per il teorema precedente.

Pertanto:

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\int_{Q_N} f(z)\,\pi\cot(\pi z)\,dz\right| \leq \lim_{N\to+\infty}\frac{\pi\alpha M(8N+4)}{N^k} = 0.$$

essendo, per ipotesi,$k>1$. Allora:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{\substack{p\in P_g\\ p\in Q_N}} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=p} = 0.$$

Ma:

$$\sum_{\substack{p\in P_g\\ p\in Q_N}} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=p} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\leq N}} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=n} + \sum_{p\in P_f} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=p}$$

avendo denotato con P_f l'insieme dei poli di f ed avendo osservato che **tutti e soli i restanti poli** di g sono quelli di $\cot\pi z$ che sono appunto situati negli interi. Siccome stiamo supponendo che f abbia solo **un numero finito di poli**, possiamo chiamare:

$$\sum_{p\in P_f} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=p} = S \in \mathbb{C}.$$

e quindi:

$$\lim_{N\to+\infty}\left\{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |p|\leq N}} \mathrm{Res}\left[g(z)\right]_{z=n} + S\right\} = 0. \tag{8.6}$$

.
Poichè i poli di $\cot \pi z$ sono **semplici**, si ha che:

$$\mathrm{Re}s\left[g(z)\right]_{z=n\in\mathbb{Z}} = \lim_{z\to n}(z-n)\,f(z)\cot\pi z =$$

.

$$= \lim_{z\to n}\tfrac{(z-n)}{\sin\pi z}f(z)\cos\pi z$$

e osservando che:

$$\lim_{z\to n} h\left(z\right) = f\left(n\right)\pi\cos\left(\pi n\right).$$

mentre:

$$\lim_{z\to n}\frac{(z-n)}{\sin\pi z} = \frac{1}{\pi\cos\left(\pi n\right)}.$$

si avrà:

$$\lim_{z\to n}\frac{(z-n)}{\sin\pi z}f\left(z\right)\pi\cos\left(\pi z\right) = f\left(n\right)\pi\cos\left(\pi n\right)\frac{1}{\pi\cos\left(\pi n\right)} = f(n).$$

Allora:

$$\sum_{\substack{n\in Z\\|n|\leq N}}\mathrm{Re}s\left[g(z)\right]_{z=n} = \sum_{n=-N}^{N}f(n).$$

Pertanto, ricordando (8.6) si avrà:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n) = -S.$$

e dunque:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}f(n) = -S.$$

□

Esercizio 8.3.1. *Determinare la* ***somma della serie****:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}.$$

essendo a un ***numero reale positivo****.*

Soluzione 8.3.1. *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

si ha che essa ha ***due poli semplici*** *che sono* $z = \pm ia$. *Avremo poi che:*

$$g(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + a^2}.$$

Ne segue che:

$$\operatorname{Res}\left[g(z)\right]_{z=ia} = \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + a^2} =$$

$$= \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{\pi \cot \pi z}{(z + ia)(z - ia)} = \frac{\pi \cot ia}{2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth a.$$

e analogamente:

$$\operatorname{Res}\left[g(z)\right]_{z=-ia} = \lim_{z \to -ia} (z + ia) \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 + a^2} =$$

$$= \lim_{z \to -ia} (z + ia) \frac{\pi \cot \pi z}{(z + ia)(z - ia)} = \frac{\pi \cot(-ia)}{-2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth a$$

Quindi:

$$S = -\frac{\pi}{a} \coth a.$$

e dunque:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -S = \frac{\pi}{a} \coth a.$$

Esercizio 8.3.2. *Calcolare:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

essendo a *un numero reale positivo.*

Soluzione 8.3.2. *Possiamo scrivere:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

e siccome:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

per ragioni di parità, si ha che:

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth a.$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth a - \frac{1}{2a^2}.$$

Nota 8.3.1. *Supponiamo che f verifichi **tutte le ipotesi del teorema** 8.3.2 **tranne** per il fatto di avere un polo di ordine h in $z = 0$. Supponiamo inoltre che f, ristretta all'**asse reale**, sia una **funzione pari**. Non è difficile provare che, in questo caso, vale il seguente risultato:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = -\frac{1}{2} \mathrm{Res}\,(g(z))_{z=0}\,.$$

essendo come prima:

$$g(z) = \pi f(z) \cot \pi z$$

*che però, a differenza di prima non ha in $z = 0$ un **polo semplice** ma un polo di ordine $h + 1$.*

Esercizio 8.3.3. *Determinare il valore di:*

$$\zeta\,(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soluzione 8.3.3. *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

basterà allora determinare il residuo in $z = 0$ *dove c'è un polo di ordine* 3. *Il modo più conveniente per farlo è il seguente:*

$$g(z) = \pi \frac{1}{z^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{1}{z^2} \frac{\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + O\left(z^4\right)\right)}{\left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + O\left(z^5\right)\right)}.$$

e dunque:

$$g(z) = \frac{1}{z^3} \frac{\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + O\left(z^4\right)\right)}{\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O\left(z^4\right)\right)}.$$

Sia:

$$k(z) = \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O\left(z^4\right).$$

Osserviamo che, se $|z|$*è sufficientemente piccolo, si ha* $|k(z)| < 1$. *Allora:*

$$h(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O(z^4)\right)} = \frac{1}{\{1 - k(z)\}} =$$

$$= 1 + k(z) + k^2(z) + \cdots = 1 + k(z) + O\left(k^2(z)\right).$$

e quindi:

$$h(z) = 1 + \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O\left(z^4\right).$$

Ne segue che:

$$g(z) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + O\left(z^4\right)\right) \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O\left(z^4\right)\right).$$

da cui:

$$g(z) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} + O\left(z^4\right)\right).$$

e quindi:

$$g(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + O(z).$$

Allora:

$$\mathrm{Re}s\,(g(z))_{z=0} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

e dunque:

$$\zeta\,(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nota 8.3.2. *Procedendo come nel caso del teorema 8.3.2, si dimostra il seguente:*

Teorema 8.3.3. *Sia $f(z)$ una funzione tale che sul contorno $\partial \mathcal{Q}_N$ del teorema precedente sia tale per cui esistono due costanti $M > 0$ e $k > 1$ tali che:*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}.$$

Supponiamo inoltre f abbia soltanto un numero finito di poli e che ***nessuno di essi*** *coincida con un intero. Allora:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{p \in P} \mathrm{Re}\,s\,\{f(z) \csc \pi z\}_{z=p}$$

dove P è l'insieme dei poli di $f(z)$.

Esercizio 8.3.4. *Determinare la somma della serie:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+a)^2}.$$

essendo a un numero reale positivo ***non intero****.*

Soluzione 8.3.4. *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}.$$

Abbiamo che f ha un unico polo doppio in $z = -a$. Si ha quindi:

$$\mathrm{Re}\,s\,\{f(z) \csc \pi z\}_{z=a} = \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} \left\{ (z+a)^2 \frac{\csc \pi z}{(z+a)^2} \right\} =$$

$$= \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{\sin \pi z} \right\} = \lim_{z \to -a} \left\{ \frac{-\cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \right\} = \frac{-\pi \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

e dunque:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}.$$

Esercizio 8.3.5. *Determinare la somma della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$

Soluzione 8.3.5. *Si può ricorrere a una* ***variante dell'ultimo teorema enunciato****, ma in questo, come in altri casi, si può anche fare uso di metodi del tutto elementari anche se ingegnosi: Per esempio, sia:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots = S$$

e sia:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots = S' = \frac{\pi^2}{6}.$$

Allora si può osservare che:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} \cdots \right).$$

e dunque:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{32} \cdots \right).$$

cioè:

$$S = S' - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{32} \cdots \right).$$

Ma:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\cdots\right)=\frac{S'}{2}.$$

e quindi:

$$S=S'-\frac{S'}{2}=\frac{S'}{2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Pertanto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Se si vuole procedere invece utilizzando la Teoria dei Residui si ha:

Soluzione 8.3.6.

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=-\pi\sum_{p\in P}\operatorname{Res}\left\{f(z)\csc\pi z\right\}_{z=p}.$$

dove: $f(z)=\frac{1}{z^2}$. *Bisogna quindi valutare:*

$$\operatorname{Re}s\left\{\frac{1}{z^2}\csc\pi z\right\}_{z=0}.$$

Posto:

$$g(z)=\frac{1}{z^2\sin\pi z}.$$

si ha:

$$g(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{\left(\pi z-\frac{\pi^3z^3}{3!}+O(z^5)\right)}=\frac{1}{\pi z^3}\frac{1}{\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3!}+O(z^4)\right)}.$$

Se:

$$k(z)=\frac{\pi^2z^2}{3!}+O(z^4).$$

allora, per $|z|$ *sufficientemente piccolo, sarà* $|k(z)|<1$ *e quindi:*

$$h(z)=\frac{1}{1-k(z)}=1+k(z)+O\left(k^2(z)\right)=1+\frac{\pi^2z^2}{3!}+O(z^4).$$

da cui:

$$g(z) = \frac{1}{\pi z^3}\left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{3!} + O(z^4)\right) = \frac{1}{\pi z^3} + \frac{\pi}{3! z} + O(z)$$

e dunque:

$$\operatorname{Re} s \left\{ \frac{1}{z^2} \csc \pi z \right\}_{z=0} = \frac{\pi}{3!}.$$

Allora:

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3!}.$$

Pertanto:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3!}.$$

e quindi:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3!}.$$

da cui:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Capitolo 9

Proprietà delle funzioni analitiche

9.1 Teorema di Unicità

Esercizio 9.1.1. *Sia:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

E' possibile che si abbia:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} = f\left(-\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}?$$

Soluzione 9.1.1. *Siccome f è* ***analitica****, essa è in particolare* ***continua*** *e quindi avremo che:*

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Osserviamo allora che la funzione f e la funzione: $g(z) = z^2$. coincidono sull'insieme:

$$A = \left\{z = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}.$$

che ha come ***punto di accumulazione*** $z = 0$. *Per il Teorema di Unicità, esse sono la stessa funzione. Quindi la risposta è* ***affermativa*** *e si ha:*

$$\begin{cases} a_n = 0 \ se \ n \in \mathbb{N} - \{2\} \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 9.1.2. *Sia:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

E' possibile che si abbia:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} = f\left(-\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}?$$

Soluzione 9.1.2. *Procedendo come prima troviamo che* f *e la funzione* $g = z^3$ *coincidono sull'insieme:*

$$A = \left\{z = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}.$$

e quindi deve essere $f(z) = z^3$. *Tuttavia questo* ***impedisce*** *il verificarsi della condizione* $f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ *e quindi una tale funzione analitica* ***non esiste***.

Esercizio 9.1.3. *Siano* $f(z)$*e* $g(z)$ *due funzioni analitiche definite su un aperto* Ω ***connesso*** *e nessuna delle due sia la funzione* ***identicamente nulla***. *Dimostrare che il loro prodotto* $f(z)g(z)$ ***non può essere*** *la funzione* ***identicamente nulla***.

Soluzione 9.1.3. *Siccome* $f(z)$ *è* ***analitica*** *essa è, in particolare,* ***continua*** *Allora, si ha che l'insieme:*

$$f^{-1}(0) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

è ***chiuso*** *in* Ω *e* ***non coincide*** *con esso, poichè per ipotesi* f ***non è identicamente nulla*** *su* Ω. *Allora:*

$$U = \Omega - f^{-1}(0).$$

è ***aperto*** *e pertanto si dovrà avere che per ogni* $z \in U$, $g(z) = 0$. *Dunque, per il* ***Teorema di Unicità****, dovrà essere* $g(z) = 0$ *in tutto* Ω *e ciò è contro l'ipotesi.*

Nota 9.1.1. *L'ipotesi che* Ω *sia* ***connesso*** *è fondamentale. Si consideri infatti:*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < 1\}$$

che è un aperto ***non connesso****. Basterà definire:*

$$A = \{z \in C : |z| < 1\}$$

$$B = \{z \in C : |z - 3| < 1\}$$

e porre:

$$f(z) = \begin{cases} 1 \ \ se \ z \in A \\ 0 \ se \ z \in B \end{cases}$$

e

$$g(z) = \begin{cases} 0 \ \ se \ z \in A \\ 1 \ se \ z \in B \end{cases}$$

per avere che $f(z)g(z) = 0$ *per ogni* $z \in \Omega$*, senza che* f *e* g *siano* ***identicamente nulle****.*

Esercizio 9.1.4. *Sia* f *una* ***funzione intera*** *tale per cui:*

$$\begin{cases} f(z+1) = f(z) \\ f(z+\sqrt{2}) = f(z) \end{cases}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$*. Dimostrare che* f *è* ***costante****.*

Soluzione 9.1.4. *Dalle ipotesi su* f *è facile dedurre che:*

$$f(z + m + n\sqrt{2}) = f(z)$$

per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$*. Osserviamo che se valgono le* ***due condizioni dell'ipotesi*** *allora si ha anche:*

$$\begin{cases} f(z-1) = f(z) \\ f(z-\sqrt{2}) = f(z) \end{cases}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Infatti, per quanto riguarda la prima di esse, si ha:

$$f(z) = f(z-1+1) = f(z'+1) = f(z') = f(z-1).$$

e analogamente per ***la seconda****. Allora, utilizzando anche l'induzione, si ha*

$$f\left(z+m+n\sqrt{2}\right) = f\left(z'+n\sqrt{2}\right) = f\left(z'\right) = f\left(z+m\right) = f(z).$$

In particolare, se poniamo $z = 0$ si ha:

$$f(m+n\sqrt{2}) = f(0).$$

Consideriamo ora il sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A = \left\{m+n\sqrt{2} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

e osserviamo che, ad esempio, il punto $z = 0$ è un suo ***punto di accumulazione****. Per dimostrare questa affermazione occorre tenere presente il seguente* ***risultato classico*** *di Teoria dei Numeri: " Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

ed inoltre n ed m sono ***relativamente primi****." Avremo allora:*

$$\left|n\sqrt{2} - n\frac{m}{n}\right| \leq n\frac{1}{n^2}.$$

e quindi:

$$\left|n\sqrt{2} + m'\right| \leq \frac{1}{n}.$$

dove $m' = -m$. Allora, siccome:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

avremo che:

$$\left|n\sqrt{2} + m'\right| \leq \varepsilon.$$

e questo prova che 0 *è un* ***punto di accumulazione*** *per* A. *Si consideri ora:*

$$g(z) = f(z) - f(0).$$

che è ovviamente una ***funzione intera***. *Si ha che:*

$$g(m + n\sqrt{2}) = f(m + n\sqrt{2}) - f(0) = 0.$$

Allora $g(z)$ *è una* ***funzione analitica*** *che si* ***annulla*** *su un insieme avente* ***almeno un punto di accumulazione***. *Per il* ***Teorema di Unicità*** *avremo che tale* ***funzione è nulla***. *Quindi:*

$$g(z) = f(z) - f(0) = 0.$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ *e dunque* $f(z) = f(0)$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 9.1.5. *Sia* f *una* ***funzione intera*** *tale che:*

1. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

Dimostrare che:

1. *I coefficienti dello* ***sviluppo di Maclaurin*** *sono tutti reali.*

2. *I coefficienti di* ***indice pari*** *sono nulli.*

Soluzione 9.1.5. *Siccome* f *è intera si ha:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sia $z = x \in \mathbb{R}$. *Dall'ipotesi segue che:*

$$f(z) = f(x) = \overline{f(z)} \in \mathbb{R}.$$

e poichè:

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} x^n.$$

avremo:

$$a_n = \overline{a_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Questo prova la **prima tesi**. Sia ora $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$. Dall'ipotesi si ha:*

$$f(iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n i^n y^n \in i\mathbb{R}.$$

Ma:

$$f(iy) = \sum_{\substack{n=0 \\ 2|n}}^{+\infty} a_n i^n y^n + \sum_{\substack{n=0 \\ 2\nmid n}}^{+\infty} a_n i^n y^n \in i\mathbb{R}.$$

e siccome:

$$\sum_{\substack{n=0 \\ 2|n}}^{+\infty} a_n i^n y^n \in \mathbb{R}.$$

deve essere:

$$\sum_{\substack{n=0 \\ 2|n}}^{+\infty} a_n i^n y^n = 0 \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Sia allora:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

dove:

$$b_n = \begin{cases} a_n \ se \ 4|n \\ -a_n \, se \ 2|n \ \wedge 4 \nmid \ n \\ 0 \ \ se \ 2 \nmid n \end{cases}$$

Si ha che $g(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e quindi, dal Teorema di Unicità, segue che deve essere $a_n = 0$ per ogni n pari.

Esercizio 9.1.6. *Utilizzando il Teorema di Unicità dimostrare che:*

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione 9.1.6. *Si consideri la funzione:*

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1.$$

*Essa è una **funzione intera** in quanto lo sono* $\sin z$ *e* $\cos z$*. Osserviamo allora che se* $z \in \mathbb{R}$ *si ha* $f(z) = 0$*. Per il Teorema di Unicità si dovrà avere che* $f(z) = 0$ *per ogni* $\in \mathbb{C}$*.*

Esercizio 9.1.7. *(Importante) Sia:*

$$B\left(0,1\right) = \left\{z \in C : |z| < 1\right\}.$$

*E' possibile trovare una funzione analitica **non identicamente nulla** in* $B(0,1)$ *dotata di infiniti zeri?*

Soluzione 9.1.7. *Si consideri:*

$$f(z) = \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Poichè:

$$\phi(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

è analitica in $B(0,1)$ *e poichè la funzione* $\sin z$ *è intera, si ha che* f *è analitica in* $B(0,1)$*. La funzione* f *si annulla se e solo se:*

$$\frac{z+1}{z-1} = n\pi.$$

e quindi nei punti:

$$z_n = \frac{n\pi+1}{n\pi-1}\ n \in \mathbb{Z}.$$

Se $n \leq 0$ *tali punti appartengono a* $B(0,1)$*. Si noti che questo fatto **non è in contraddizione** col **Teorema di Unicità** perchè:*

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{n\pi+1}{n\pi-1} = 1 \notin B\left(0,1\right).$$

Esercizio 9.1.8. *Sia* f *una **funzione intera** tale per cui:*

$$f(n) = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

E' vero che $f(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$*?*

Soluzione 9.1.8. *In generale la risposta è **negativa**; basta infatti considerare:*

$$f(z) = (z-1)\sin \pi z.$$

*Si ha ovviamente, $f(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma $f(z)$ **non** è **identicamente nulla**.*[1]

9.2 Teorema del Massimo Modulo

Esercizio 9.2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una **funzione analitica non costante**. Siano:*

$$B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$\overline{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

*e si supponga che $\overline{B}(0,1) \subset \Omega$. Dimostrare che se $|f(z)| = c$ su $\partial B(0,1)$ allora esiste **almeno un punto** z_0 di $B(0,1)$ tale per cui $f(z_0) = 0$.*

Soluzione 9.2.1. *Se $c = 0$ per il **Teorema del Massimo Modulo** si avrebbe che $f(z) = 0$ su tutto $B(0,1)$ e quindi avremmo un assurdo perchè si sta supponendo che f **non sia costante**. Se $c > 0$, per il **Teorema del Massimo Modulo**, si ha $\forall z \in B(0,1)$ deve essere $|f(z)| < c$. Se fosse $f(z) \neq <$ per ogni $z \in B(0,1)$ allora la funzione:*

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

*sarebbe ivi analitica e dovrebbe assumere il **massimo del suo modulo** su $\partial B(0,1)$ ed il valore di tale massimo sarebbe $1/c$. Ma se $z \in B(0,1)$ si ha $|f(z)| < c$ e quindi:*

$$|g(z)| > \frac{1}{c}.$$

[1] Se si aggiungono però opportune ipotesi sulla crescita del modulo di F si ottengono risultati in positivo. Un teorema dovuto a Carlson afferma che “Se f è una funzione intera per la quale $|f(z)| \leqslant Ae^{\lambda|z|}$ essendo A e λ costanti per le quali $A > 0$ e $0 < \lambda < \pi$, allora $f(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ implica f identicamente nulla su $\mathbb{C}$.

e ciò è assurdo.

Esercizio 9.2.2. *Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$ contenente il **disco chiuso unitario** di centro 0 ed $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa non costante e $|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$ allora il **disco aperto unitario** è contenuto nell'immagine di f.*

Soluzione 9.2.2. *Si deve provare che:*

$$\forall\, w : |w| < 1 \;\; \exists\, z : f(z) = w.$$

Avevamo già visto che:

$$\exists z_0 : |z_0| < 1 \wedge f(z_0) = 0.$$

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che:

$$\exists\, w : 0 < |w| < 1 \;\; \wedge \; \forall z : f(z) \neq w$$

In questo caso $g(z) = f(z) - w$ è olomorfa nel disco unitario chiuso e poichè $|g(z)| \neq 0$ nel disco aperto, il minimo del modulo di $g(z)$ dovrebbe essere assunto in un punto z tale che $|z| = 1$. Ma:

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geqslant 1 - r$$

dove $r = |w|$. Poichè:

$$|g(z_0)| = |f(z_0) - w| = |0 - w| = r.$$

Dovrà allora essere $1 - r > r$ da cui otteniamo:

$$0 < r < \frac{1}{2}$$

Consideriamo ora:

$$h(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

Si ha che:

$$|h(z_0)| = \frac{1}{r}.$$

ed inoltre:
$$\frac{1}{1+r} \leqslant |h(z)| \leqslant \frac{1}{1-r}.$$
da cui, per il ***Teorema del Massimo Modulo****:*
$$\frac{1}{1-r} > \frac{1}{r}.$$
e quindi $\frac{1}{2} < r < 1$ *e ciò costituisce, con la condizione precedentemente trovata, un assurdo.*

Esercizio 9.2.3. *Sia* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione intera tale per cui:*
$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$
Dimostrare che f *è una funzione costante.*

Soluzione 9.2.3. *Si consideri:*
$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$
Affermiamo che $g(z)$ *è anch'essa una funzione intera. Infatti:*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots .$$
con:
$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1$$
e dunque:
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$
che ha ancora raggio di convergenza infinito e quindi è una funzione intera. Dall'ipotesi segue che:
$$\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = 0.$$

e quindi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbb{R} > 0 : \ \forall z \in \mathbb{C}, \ |z| \geq R \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon.$$

Sia:

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Avremo che in particolare che:

$$\forall z \in \partial D(0,R) \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon.$$

Ma ,per il ***Teorema del Massimo Modulo****, si ha*

$$\max_{z \in D(0,R)} |g(z)| = \max_{z \in \partial D(0,R)} |g(z)| \leq \varepsilon$$

Allora:

$$\begin{cases} \forall z : |z| \leq R \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon \\ \forall z : \ |z| \geq R \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Quindi:

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon.$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε, si ha:

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(z) = 0.$$

e quindi:

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = f(0).$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 9.2.4. *Sia $a \in \mathbb{C}$ con $|a| \leq 1$. Si consideri il polinomio:*

$$p(z) = \frac{a}{2} + \left(1 - |a|^2\right) z - \frac{\overline{a}}{2} z^2.$$

Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \leq 1$ si ha $|p(z)| \leq 1$.

Soluzione 9.2.4. *Consideriamo gli z per i quali $|z| = 1$; potremo allora scrivere:*

$$p(z) = z\left[\left(1 - |a|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right)\right].$$

ed avremo che $z = e^{i\theta}$. Ne segue che:

$$\frac{a}{z} - \overline{a}z = ae^{-i\theta} - \overline{a}e^{i\theta} = ae^{-i\theta} - \overline{ae^{-i\theta}}.$$

e dunque:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right) = \mathrm{Re}\left(ae^{-i\theta} - \overline{ae^{-i\theta}}\right) = 0.$$

e pertanto:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right).$$

*è un numero **immaginario puro**. Inoltre:*

$$\left|\mathrm{Im}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right)\right| \leq \left|\frac{a}{z} - \overline{a}z\right| \leq \frac{|a|}{|z|} + |\overline{a}|\,|z| = |a| + |\overline{a}| = 2\,|a|\,.$$

Siccome:

$$|p(z)|^2 = |z|^2\left|\left(1 - |a|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right)\right|^2.$$

e $|z| = 1$ avremo:

$$|p(z)|^2 = \left|\left(1 - |a|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right)\right|^2 = |A + iB|^2 = A^2 + B^2$$

dove:

$$A = \left(1 - |a|^2\right)$$

$$B = \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\tfrac{a}{z} - \overline{a}z\right)$$

Allora:

$$|p(z)|^2 = \left(1 - |a|^2\right)^2 + \left[\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{a}{z} - \overline{a}z\right)\right]^2 \leq \left(1 - 2\,|a|^2 + |a|^4\right) + |a|^2\,.$$

e quindi:

$$|p(z)|^2 \leq 1 - |a|^2 + |a|^4 \leq 1 - \left(|a|^2 - |a|^4\right) \leq 1$$

in quanto, essendo per ipotesi $|a| \leq 1$ *avremo che* $|a|^2 - |a|^4 \geq 0$. *Dunque*

$$\max_{|z|=1} |p(z)| \leq 1.$$

Ma, per il ***Teorema del Massimo Modulo****, si ha:*

$$\max_{|z|\leq 1} |p(z)| = \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

e quindi:

$$\forall\, |z| \leq 1 \Rightarrow |p(z)| \leq 1.$$

Esercizio 9.2.5. *Sia* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. *Sia* $f : D \to \mathbb{C}$ *una funzione analitica tale che:*

$$\left|f(z^2)\right| \geqslant |f(z)| \quad \forall z \in D.$$

Dimostrare che f *è costante su* D.

Soluzione 9.2.5. *Sia* $0 < r < 1$ *e sia* $\mathcal{C}_{r^2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r^2\}$. *Poichè* f *è analitica in* D *essa è in particolare continua in su* $\mathcal{C}_{r^2}$ *che è un insieme compatto. Pertanto* $|f$ *ha massimo su* $\mathcal{C}_{r^2}$. *In altre parole:*

$$\exists z_0 \in \mathcal{C}_{r^2} : |f(z_0)| = \max_{z \in \mathcal{C}_{r^2}} |f(z)|.$$

Indichiamo con:

$$D(0, r^2) = \left\{z \in C : |z| < r^2\right\}$$
$$D(0, r) = \{z \in C : |z| < r\}$$

Allora per il ***Teorema del Massimo Modulo*** *si avrà:*

$$\max_{z \in \overline{D(0,r^2)}} |f(z)| = \max_{z \in C_{r^2}} |f(z)| = |f(z_0)|.$$

Osserviamo che:

$$z \in \overline{D(0,r)} \Rightarrow |z| \leqslant r \Rightarrow |z|^2 \leqslant r^2 \Rightarrow \left|z^2\right| \leqslant r^2.$$

per cui posto $w = z^2$ *si ha* $|w| \leq r^2$ *e quindi:*

$$w \in \overline{D(0,r^2)}.$$

Pertanto:

$$A = \left\{ w \in C : w = z^2, |z| \leqslant r \right\} \subseteq \left\{ w' \in C : |w'| \leqslant r^2 \right\} = B.$$

e quindi:

$$\max_{z \in \overline{D(0,r^2)}} |f(z)| = \max_{w' \in B} |f(w')| \geqslant \max_{w \in A} |f(w)| = \max_{z \in \overline{D(0,r)}} \left| f\left(z^2\right) \right|.$$

In definitiva:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{D(0,r^2)}} |f(z)| \geqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} \left| f\left(z^2\right) \right|.$$

Poichè, per ipotesi:

$$\left| f(z^2) \right| \geqslant |f(z)| \quad \forall z \in D.$$

avremo allora:

$$\max_{z \in \overline{D(0,r)}} \left| f\left(z^2\right) \right| \geqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} |f(z)|.$$

e quindi

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{D(0,r^2)}} |f(z)| \geqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} \left| f\left(z^2\right) \right| \geqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} |f(z)|.$$

e dunque:

$$|f(z_0)| \geqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} |f(z)| \tag{9.1}$$

Siccome $0 < r < 1$ *avremo che* $r^2 < r$ *e quindi:*

$$\overline{D(0,r^2)} \subset \overline{D(0,r)}.$$

da cui segue che:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{D(0,r^2)}} |f(z)| \leqslant \max_{z \in \overline{D(0,r)}} |f(z)|.$$

e dunque:
$$|f(z_0)| \leqslant \max_{z\in\overline{D(0,r)}} |f(z)|. \tag{9.2}$$
Allora da (9.1) *e* (9.2) *segue che:*
$$|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{D(0,r)}} |f(z)|.$$

*e siccome z_0 è interno a $\overline{D(0,r)}$ per il teorema del massimo modulo f è costante su $\overline{D(0,r)}$. Utilizzando ora il **Teorema di Unicità** si ha che f è costante su tutto D.*

9.3 Principio dell'Argomento

Esercizio 9.3.1. *Si consideri il polinomio:*
$$p(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$$
con $z \in \mathbb{C}$ e si determini il numero di zeri che tale polinomio ha:

1. *Nel **semipiano superiore** $\mathbb{H}$.*
2. *Nel **primo quadrante**.*

Soluzione 9.3.1. *Per quanto riguarda la **prima domanda**, è evidente, dalla positività dei coefficienti di $p(z)$, che esso non ha zeri sul **semiasse reale positivo** o **nell'origine**. E' facile anche convincersi che non ne ha sul **semiasse reale negativo**. Infatti se $z = x \in \mathbb{R}^-$ ci sono due possibilità:*

- $-1 \leq x < 0$.
- $x < -1$.

*Nel **primo** di questi casi scriviamo:*
$$p(z) = q(x) = f(x) + g(x).$$
con:
$$f(x) = \left(x^6 + 9x^4\right).$$

e

$$g(x) = x^3 + 2x + 4.$$

Banalmente, si ha che:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

Inoltre, possiamo scrivere:

$$g(x) = 4 + x(2 + x^2).$$

e osservare che:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow 2 < (2 + x^2) \leq 3 \Rightarrow x(2 + x^2) \geq -3.$$

da cui $g(x) \geq 1$*. Allora è sicuramente vero che:*

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow q(x) > 0.$$

Nel ***secondo*** *di tali casi scriviamo:*

$$p(z) = q(x) = m(x) + n(x).$$

dove:

$$m(x) = x^6 + 4$$

e

$$n(x) = 9x^4 + x^3 + 2x.$$

Banalmente, si ha che:

$$x < -1 \Rightarrow m(x) > 0.$$

Inoltre, osservando che $h(x) = x^3 + 2x$ *è una* ***funzione dispari*** *e che:*

$$x > 1 \Rightarrow x^3 + 2x = x(2 + x^2) < x(2x^2 + x^2) = 3x^3 < 3x^4.$$

si ha:

$$x < -1 \Rightarrow x^3 + 2x > -3x^4.$$

e dunque:

$$x < -1 \Rightarrow n(x) = 9x^4 + h(x) > 6x^4 > 0.$$

Quindi anche per $x < -1$ non ci sono zeri reali. La conclusione è che per ogni $x \in \mathbb{R}$ ***il polinomio non si annulla****. Poichè, per il* ***Teorema Fondamentale dell'Algebra****, esso ha sei zeri e poichè i suoi* ***coefficienti sono reali****, si ha che per ogni valore $\alpha \in \mathbb{C}$ che annulla il polinomio, anche il suo complesso coniugato fa lo stesso. Quindi ci dovranno essere esattamente tre zeri nel semipiano superiore $\mathbb{H}$. Per rispondere alla seconda domanda occorre fare ragionamenti* ***più delicati*** *che si basano sul* ***Principio dell'Argomento****. Consideriamo la curva rappresentata in figura con R "****grande****"[2] Cerchiamo ora di valutare la variazione di $\arg p(z)$.*

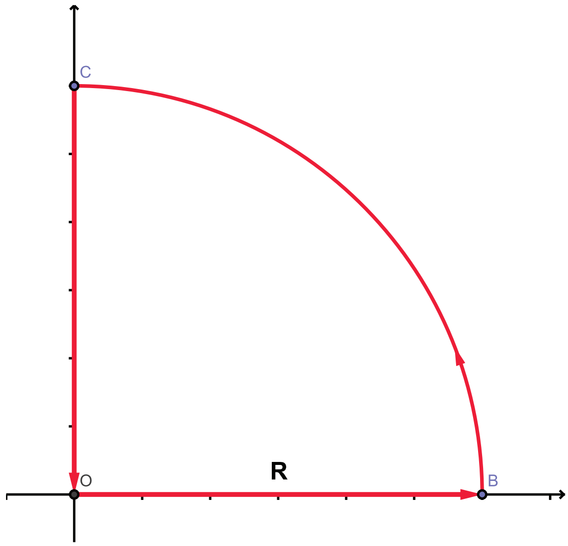

Figura 9.1: Il numero degli zeri di $p(z)$ nel primo quadrante dipende dalla variazione di $\arg p(z)$ quando z percorre la curva considerata

Supponiamo che z vari sull'arco di circonferenza BC. Siccome, per

[2]Siccome gli zeri del polinomio sono al finito, si può sempre pensare che R sia stato scelto così grande in modo se z_0 è uno zero nel primo quadrante, esso sia contenuto nella curva considerata.

R sufficientemente grande il termine dominante del polinomio è z^6, la variazione dell'argomento lungo questo tratto deve essere:

$$6\frac{\pi}{2} = 3\pi$$

Sul tratto AO abbiamo che $z = iy$ con y che decresce tra R e 0.

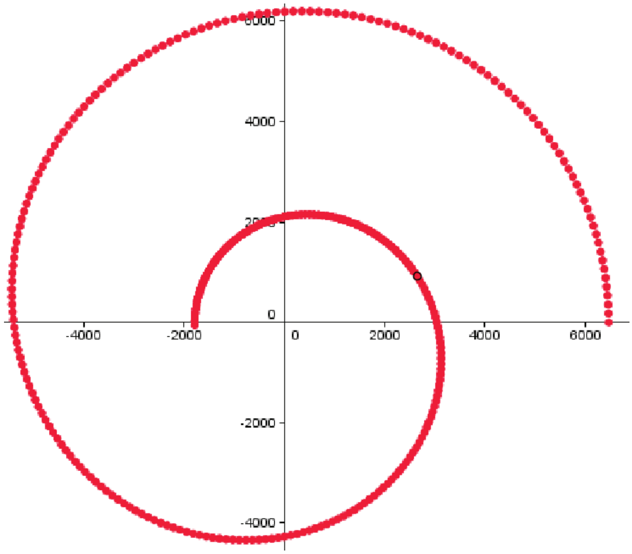

Figura 9.2: La variazione dell'argomento di $p(z)$ quando z percorre l'arco BC

Su tale tratto avremo quindi:

$$p(z) = \left(-y^6 + 9y^4 + 4\right) + i\left(-y^3 + 2y\right).$$

Quando $y = R$ abbiamo all'incirca $p(z) \approx -R^6, -iR^3$ mentre quando $y = 0$ si ha che $p(z) = 4 + i0$. Osserviamo che la parte immaginaria di $p(z)$ quando $z = iy$ si annulla per i seguenti valori di y:

$$y_1 = -\sqrt{2}$$
$$y_2 = \sqrt{2}$$
$$y_3 = 0$$

Questo significa che quando y decresce dal valore R (molto grande) a 0 assume certamente il valore $y = y_2$. Quindi per tale valore $p(iy_2)$ è un ***numero reale****. Infatti*

$$p(i\sqrt{2}) = -8 + 36 + 4 = 32 > 4.$$

Quando y decresce da $\sqrt{2}$ a 0 si ha una variazione dell'argomento

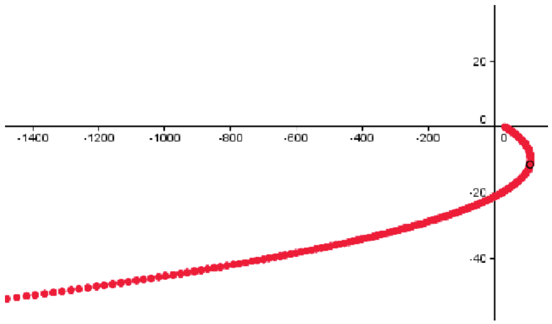

Figura 9.3: La variazione dell'argomento di $p(z)$ quando y decresce dal valore R al valore $\sqrt{2}$

simile a quella riportata nella figura 9.3.1: Infine quando z il tratto

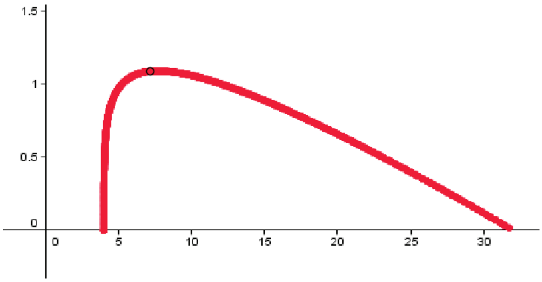

Figura 9.4: La variazione dell'argomento di $p(z)$ quando y decresce dal valore $\sqrt{2}$ al valore 0

OB non si ha variazione dell'argomento perchè sull'asse reale $p(z)$ è reale.

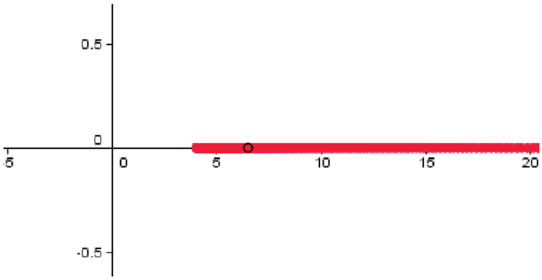

Figura 9.5: La variazione dell'argomento di $p(z)$ quando z percorre il segmento OB è nulla

*Un **grafico globale**, di **carattere qualitativo (non in scala)** è quello di figura 9.6: Pertanto nel **primo quadrante**, in base al*

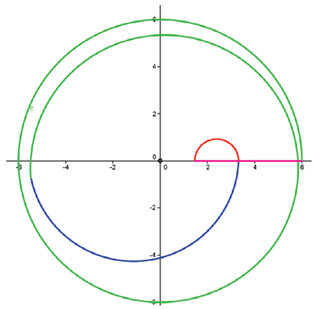

Figura 9.6: La variazione complessiva dell'argomento di $p(z)$ è 4π

***Principio dell'Argomento**, ci sono 2 zeri. Siccome è facile verificare che non esistono valori reali di y che annullano simultaneamente $Re\, p(z)$ e $Im\, p(z)$ il polinomio non ha zeri sull'asse immaginario e quindi il restante zero presente nel semipiano superiore $\mathbb{H}$ è nel **secondo quadrante**.*

9.4 Teorema di Rouchè

Esercizio 9.4.1. *Dimostrare che l'equazione:*

$$9z^{10} + z^8 + 3z^5 + z^4 - 1 = 0.$$

ha tutte le sue dieci soluzioni nell'interno del cerchio unitario di centro l'origine.

Soluzione 9.4.1. *Siano* $f(z) = 9z^{10}$. *e* $g(z) = z^8 + 3z^5 + z^4 - 1$. *Poichè se* $|z| = 1$ *si ha:*

$$\begin{aligned} &|f(z)| = 9 \\ &|g(z)| \leqslant \left|z^8\right| + \left|3z^5\right| + \left|z^4\right| + 1 \leqslant 1 + 3 + 1 + 1 = 6 \end{aligned}$$

è verificata, su tale circonferenza,la condizione:

$$|f(z)| > |g(z)|\,.$$

Allora, il ***Teorema di Rouchè*** *consente di affermare che nell'insieme:*

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

le funzioni $f(z)$ *ed* $f(z) + g(z)$ *hanno* ***lo stesso numero*** *di zeri. Poichè* $f(z)$ *, in tale cerchio, ha uno zero di molteplicità 10, ne segue la tesi.*

Esercizio 9.4.2. *Dimostrare che l'equazione:*

$$z^{11} + z^8 - 3z^5 + z^4 + 7 = 0.$$

non ha soluzioni nell'insieme $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soluzione 9.4.2. *Siano* $f(z) = 7$ *e* $g(z) = z^{11} + z^8 - 3z^5 + z^4$. *Se* $|z| = 1$ *si ha:*

$$\begin{aligned} &|f(z)| = 7 \\ &|g(z)| \leqslant \left|z^{11}\right| + \left|z^8\right| + \left|-3z^5\right| + \left|z^4\right| \leqslant 6 \end{aligned}$$

e quindi è verificata, su tale circonferenza,la condizione:

$$|f(z)| > |g(z)|\,.$$

Allora, il ***Teorema di Rouchè*** *consente di affermare che nell'insieme:*

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,.$$

le funzioni $f(z)$ *ed* $f(z) + g(z)$ *hanno* ***lo stesso numero*** *di zeri. Poichè* $f(z)$ *non ha zeri, la tesi è provata.*

Esercizio 9.4.3. *Con riferimento all'****esercizio precedente****, provare che tutte le soluzioni dell'equazione data si trovano nell'insieme:*

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| < 2.\}$$

Soluzione 9.4.3. *Poichè è già stato provato che l'equazione data* ***non ha*** *soluzioni nell'interno del cerchio unitario di centro l'origine, resta solo da dimostrare che le sue soluzioni sono all'interno del cerchio di raggio 2 e centro l'origine. A tale scopo, si considerino:* $f(z) = z^{11}$. *e* $g(z) = +z^8 - 3z^5 + z^4 + 7$. *Se* $|z| = 2$ *si ha:*

$$|f(z)| = 2^{11}$$
$$|g(z)| < 2^8 + 3 \cdot 2^5 + 2^4 + 7$$

Quindi, su tale circonferenza, è verificata la condizione:

$$|f(z)| > |g(z)|\,.$$

Il ***Teorema di Rouchè*** *consente di ottenere allora la tesi.*

Esercizio 9.4.4. *Dimostrare che se* $a > e$ *allora l'equazione:* $az^n = e^z$. *ha* n *soluzioni all'interno del cerchio unitario di centro l'origine. Dimostrare poi che se* $n = 2$ *tali soluzioni* ***sono reali****.*

Soluzione 9.4.4. *Posto:*

$$f(z) = az^n$$
$$g(z) = -e^z$$

se $|z| = 1$ *si ha:*

$$|f(z)| > |g(z)|\,.$$

e quindi nell'interno del cerchio unitario di centro l'origine $f(z)$ *ed* $f(z) + g(z)$ *hanno lo stesso numero di zeri. Siccome* $f(z)$ *ne ha* n *(coincidenti), la prima parte della tesi è provata. Si consideri ora la funzione di variabile reale:*

$$F(x) = ax^n - e^x.$$

che è ovviamente una funzione continua. Siccome:

$$\begin{cases} F(0) = -1 \\ F(1) = a - e > 0 \end{cases}$$

per il ***Teorema degli Zeri****, esiste* $x_1 \in [0, 1]$

tale che $F(x_1) = 0$*. Tale* x_1 *è una delle due soluzioni dell'equazione proposta. In modo simile si prova che l'altra soluzione appartiene all'intervallo* $(-1, 0)$*.*

Esercizio 9.4.5. *Dimostrare il* ***Teorema Fondamentale dell'Algebra*** *per mezzo del* ***Teorema di Rouchè****.*

Soluzione 9.4.5. *Sia:*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ *e siano:*

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n \\ g(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots a_{n-1} z^{n-1} \end{aligned}$$

Consideriamo ora una circonferenza di raggio r *e centro l'origine, con* $r > 1$*. Si ha:*

$$|g(z)| = \left|a_0 + a_1 z + \cdots a_{n-1} z^{n-1}\right| \leqslant |a_0| + |a_1|\, r + \cdots |a_{n-1}|\, r^{n-1}.$$

Se:

$$M = \max\left\{|a_0|\,, |a_1|\,, \cdots |a_{n-1}|\right\}.$$

si ha:

$$|g(z)| \leqslant M\left(1 + r + \cdots r^{n-1}\right) = M\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

D'altra parte:

$$|f(z)| = |a_n|\, r^n.$$

Quindi:

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leqslant M\frac{r^n - 1}{r - 1}\frac{1}{|a_n|\, r^n}.$$

$$\frac{r^n - 1}{r - 1}\frac{1}{|a_n|\, r^n} = \frac{M}{|a_n|}\left(\frac{r^n - 1}{r^n}\right)\frac{1}{r - 1} < \frac{M}{|a_n|}\frac{1}{r - 1}.$$

in quanto:

$$\frac{r^n - 1}{r^n} < 1.$$

Dunque:

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < \frac{M}{|a_n|}\frac{1}{r - 1} < 1.$$

se r è sufficientemente grande. Pertanto, su tale circonferenza, si ha:

$$|g(z)| < |f(z)|\,.$$

e quindi per il ***Teorema di Rouchè****, la funzione $p(z) = f(z) + g(z)$ ha, all'interno del cerchio considerato, lo stesso numero di zeri di $f(z)$. Quest'ultima funzione ha n zeri coincidenti nell'origine e quindi la tesi è provata.*

9.5 Teorema di Liouville

Esercizio 9.5.1. *Dimostrare che se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è intera e tale che esiste una costante M reale per la quale $Re(f(z)) < M$ allora f è* ***costante****.*

Soluzione 9.5.1. *Consideriamo:*

$$g(z) = e^{f(z)}.$$

Ovviamente, essendo f intera, lo è anche g. Si ha:

$$e^{f(z)} = e^{\mathrm{Re}(f(z))+i\,\mathrm{Im}(f(z))} = e^{\mathrm{Re}(f(z))} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}(f(z))}.$$

da cui:

$$\left|e^{f(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(f(z))} \leqslant e^{M} = M'.$$

*Allora, per il **Teorema di Liouville**, si ha che g è una funzione costante. Ne segue che:*

$$g'(z) = f'(z)\, e^{f(z)} = 0.$$

e poichè per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che $e^{f(z)} \neq 0$, avremo che:

$$f'(z) = 0.$$

*per ogni $z \in \mathbb{C}$. Da ciò segue che f è **costante**.*

Nota 9.5.1. *Com'è ben noto, una **funzione intera limitata** è necessariamente costante (**Teorema di Liouville**). Se però, ci si limita a considerare funzioni **solo continue**, allora si possono trovare esempi diversi; la funzione*

$$f(z) = \frac{z}{1+|z|}.$$

*è sicuramente **continua** su $\mathbb{C}$ e **limitata**, in quanto*

$$0 \leq |f(z)| = \frac{|z|}{1+|z|} < 1.$$

*ed è sicuramente **non costante**. Quindi essa è **necessariamente non-analitica**.*

Esercizio 9.5.2. *Siano $f(z)$ e $g(z)$ **funzioni intere**, cioè analitiche in tutto $\mathbb{C}$. Supponiamo che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si abbia:*

$$|f(z)| < |g(z)|.$$

Dimostrare che esiste una costante $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che:

$$f(z) = \lambda g(z).$$

Soluzione 9.5.2. *Dall'ipotesi, si ha che per ogni $z \in \mathbb{C}$ deve essere $g(z) \neq 0$. Infatti:*

$$|g(z)| > |f(z)| \geq 0.$$

Allora:

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

*Abbiamo quindi che $h(z)$ è il quoziente di due funzioni intere, delle quali quella al denominatore è priva di zeri e quindi $h(z)$ è anch'essa una **funzione intera**. Inoltre si ha:*

$$|h(z)| = \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1.$$

*e quindi $h(z)$ è una **funzione intera limitata**. Per il **Teorema di Liouville**, essa deve essere costante, cioè deve esistere $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $h(z) = \lambda$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Da ciò segue la tesi.*

Esercizio 9.5.3. *Trovare tutte le funzioni intere per le quali si ha:*

$$|f'(z)| < |f(z)|.$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione 9.5.3. *Poichè la derivata di una funzione intera è ancora una funzione intera, in base all'esercizio precedente deve esistere una costante $\lambda \in$ tale per cui:*

$$f'(z) = \lambda f(z).$$

Siccome, per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che:

$$g(z) = e^{-\lambda z} \neq 0.$$

la precedente uguaglianza equivale a

$$e^{-\lambda z} f'(z) = \lambda e^{-\lambda z} f(z).$$

e quindi:

$$e^{-\lambda z} f'(z) - \lambda e^{-\lambda z} f(z) = 0.$$

Ma:
$$e^{-\lambda z} f'(z) - \lambda e^{-\lambda z} f(z) = \frac{d}{dz} \left\{ e^{-\lambda z} f(z) \right\}.$$
e dunque:
$$\frac{d}{dz} \left\{ e^{-\lambda z} f(z) \right\} = 0.$$
e siccome $\mathbb{C}$ è connesso, ciò significa che:
$$e^{-\lambda z} f(z) = \alpha.$$
essendo $\alpha \in \mathbb{C}$ una costante arbitraria. Allora tutte e sole le funzioni intere per le quali vale la condizione data sono:
$$f(z) = \alpha e^{\lambda z} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 9.5.4. *Sia $f(z)$ una funzione intera che scriveremo come $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si abbia $u(x,y) > 0$. Dimostrare che $f(z)$ è costante.*

Soluzione 9.5.4. *Consideriamo la funzione:*
$$g(z) = e^{-f(z)}.$$
che è anch'essa una funzione intera. Si ha allora:
$$g(z) = e^{-u-iv} = e^{-u} e^{-iv}.$$
e quindi
$$|g(z)| = \left| e^{-u} e^{-iv} \right| = e^{-u} \leq e^0 = 1.$$
data l'ipotesi su u. Allora la funzione $g(z)$ è costante, per il teorema di Liouville, e quindi deve essere costante anche $f(z)$.

Esercizio 9.5.5. *Sia $f(z)$ una funzione intera che scriveremo come $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si abbia $|u(x,y)| < |v(x,y)|$. Dimostrare che $f(z)$ è* ***costante****.*

Soluzione 9.5.5. *Consideriamo la funzione:*

$$g(z) = e^{f^2(z)}.$$

che è anch'essa una funzione intera. Si ha allora:

$$g(z) = e^{u^2-v^2+2iuv} = e^{u^2-v^2}e^{2iuv}.$$

e quindi:

$$|g(z)| = \left|e^{u^2-v^2}e^{2iuv}\right| = e^{u^2-v^2}.$$

Ma, dall'ipotesi su u *e* v *segue che* $u^2 - v^2 < 0$ *e quindi:*

$$|g(z)| = e^{u^2-v^2} \leq e^0 = 1.$$

Come prima, si conclude che $g(z)$ *è costante e quindi lo è anche* $f^2(z)$ *e di conseguenza anche* $f(z)$*.*

Esercizio 9.5.6. *Sia* $f(z)$ *una funzione intera. Supponiamo che per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si abbia:*

$$\begin{cases} f(z+1) = f(z) \\ \\ f(z+i) = f(z) \end{cases}$$

Dimostrare che $f(z)$ *è* ***costante****.*

Soluzione 9.5.6. *Procedendo dome nell'esercizio 9.1.4:*

$$f(z+m+ni) = f(z).$$

Quindi:

$$f(z) = f(x+iy) = f\left(\{x\} + i\{y\} + [x] + i[y]\right) = f\left(\{x\} + i\{y\}\right).$$

Siccome:

$$\begin{cases} 0 \leq \{x\} < 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \\ 0 \leq \{y\} < 1 \ \ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avremo che:

$$\{x\} + i\{y\} \in [0,1) \times [0,i) \subset \mathbb{C} \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

e siccome f è analitica e quindi è continua, avremo che:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z\in[0,1)\times[0,i)} |f(z)| \leq \max_{z\in[0,1]\times[0,i]} |f(z)| = M < \infty.$$

essendo:

$$A = [0,1] \times [0,i].$$

un insieme compatto. Pertanto $f(z)$ è intera e limitata e per il ***Teorema di Liouville*** *è costante.*

Esercizio 9.5.7. *Siano:*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

tali che:

$$\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}.$$

1. *α e β sono una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ sul campo $\mathbb{R}$.*
2. *Se f è una funzione intera tale che*

$$\begin{cases} f(z+\alpha) = f(z) \ \forall z \in \mathbb{C} \\ f(z+\beta) = f(z) \ \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

allora f è costante.

Soluzione 9.5.7. *Per dimostrare che α e β sono* ***una base*** *per lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ è sufficiente dimostrare che essi sono* ***linearmente indipendenti****, in quanto è ben noto che $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ha dimensione 2.* [3] *Per fare ciò,* ***ragioniamo per assurdo*** *e supponiamo che α e β siano linearmente dipendenti. Allora esisteranno due scalari λ $\mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che*

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0_{\mathbb{C}}.$$

[3] Una base è ad esempio costituita da $z_1 = 1 + 0i$ $z_2 = 0 + 1i$

cioè
$$\lambda\,(a+ib)+\mu\,(c+id)=0+0i.$$
e quindi:
$$\begin{cases}\lambda a+\mu c=0\\ \\ \lambda b+\mu d=0\end{cases}$$
Osserviamo che ***non può accadere*** *che sia a che c siano nulli perchè in tal caso sicuramente dovrebbe essere*[4] $d\neq 0$ *e allora avremmo:*
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{b}{d}\in\mathbb{R}.$$
contro l'ipotesi. Dunque si può supporre che uno di essi sia ***diverso*** *da* 0*; supponiamo che esso sia c. Ne segue che:*
$$\begin{cases}\mu=-\frac{\lambda a}{c}\\ \\ \lambda b+\mu d=0\end{cases}$$
e quindi:
$$\lambda b-\frac{\lambda a}{c}d=0.$$
Sicuramente ***non può essere*** $\lambda=0$ *perchè altrimenti avremmo:*
$$\mu\beta=0_C.$$
e dato che $\beta\neq 0$ dovrebbe essere $\mu=0$. Se $\lambda\neq 0$ allora abbiamo:
$$b=\frac{ad}{c}.$$
e quindi:
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+i\frac{ad}{c}}{c+id}=\frac{1}{c}\frac{ac+iad}{c+id}=\frac{a}{c}\in\mathbb{R}$$
che è assurdo. Pertanto α e β sono ***linearmente indipendenti*** *e per quanto detto sopra sono una base di $\mathbb{C}$ pensato come spazio*

[4]Se fosse anche $d=0$ si avrebbe $\beta=0$ contro l'ipotesi

vettoriale su $\mathbb{R}$. Questo fatto ci serve per provare la seconda tesi. Infatti, se z è un numero complesso qualsiasi allora esistono x y numeri reali opportuni tali che

$$z = x\alpha + y\beta.$$

Ragionando come nell'esercizio 9.1.4, si ha che:

$$f(z + m\alpha + n\beta) = f(z) \;\; \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

e quindi:

$$f(z) = f\left(x\alpha + y\beta\right) = f\left(\{x\}\,\alpha + \{y\}\,\beta + [x]\,\alpha + [y]\,\beta\right) = f\left(\{x\}\,\alpha + \{y\}\,\beta\right).$$

Ma

$$\{x\}\,\alpha + \{y\}\,\beta \in \mathcal{P}(\alpha, \beta).$$

dove $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ indica il parallelogramma generato dai vettori α e β al quale mancano i lati opposti a tali vettori. Allora:

$$\sup_{z \in C} |f(z)| = \sup_{z \in P(\alpha,\beta)} |f(z)| \leq \max_{z \in \overline{P}(\alpha,\beta)} |f(z)| = M < \infty.$$

*e quindi come prima si ha che f è **costante**.*

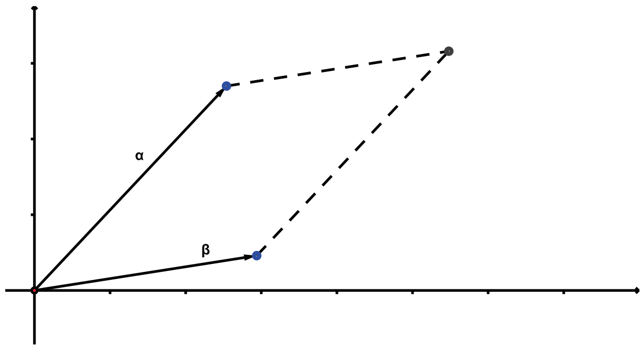

Figura 9.7: Il parallelogramma P

Esercizio 9.5.8. *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera **non costante**. Dimostrare che $f(\mathbb{C})$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Soluzione 9.5.8. *Ragioniamo per* ***assurdo*** *e supponiamo che* $f(\mathbb{C})$ *non sia denso in* $\mathbb{C}$. *Allora dovrebbero esistere un* $w \in f(\mathbb{C})$ *e un* $\varepsilon > 0$ *per i quali:*

$$|f(z) - w| > \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ma posto:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

si ha che $g(z)$ *è una funzione intera essendo la reciproca di una funzione intera mai nulla. Inoltre:*

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

e dunque $g(z)$ *è limitata. Per il* ***Teorema di Liouville*** *essa è costante e quindi anche* f *sarebbe costante contro l'ipotesi.*

Esercizio 9.5.9. *Sia* f *una funzione intera e siano* M *ed* α *costanti positive reali. Supponiamo che per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si abbia:*

$$|f(z)| \leq M\, |z|^{\alpha}.$$

Dimostrare che f *è un* ***polinomio***.

Soluzione 9.5.9. *Distinguiamo due casi:*

1. $0 < \alpha < 1$.

2. $\alpha \geq 1$.

Nel ***primo*** *di essi si ha che* $0 < 1 - \alpha < 1$ *e quindi, se* $|z|$ *è sufficientemente grande avremo:*

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{|z|^{1-\alpha}}.$$

e quindi:

$$\frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{|f(z)|}{|z|^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{|z|^{1-\alpha}}.$$

Da questo ciò segue che:

$$\exists \lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|} = 0.$$

e quindi, in base all'esercizio 9.2.3, avremo che f è costante. Supponiamo ora che sia $\alpha \geq 1$. Indichiamo con m il più piccolo intero tale per cui $m \geq \alpha$. Siccome f è intera potremo scrivere:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne segue che:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n.$$

Poniamo:

$$g(z) = \frac{f(z) - \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n z^n}{z^m} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}.$$

che può evidentemente essere anche scritta come [5].

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} z^n.$$

Ne segue che g è una funzione intera, in quanto la serie che la rappresenta ha lo stesso raggio di convergenza di quella di f e cioè $+\infty$. Si ha inoltre:

$$|g(z)| = \frac{\left| f(z) - \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n z^n \right|}{|z|^m} \leq \frac{|f(z)| + \left| \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n z^n \right|}{|z|^m} \leq \frac{M\,|z|^\alpha + \sum\limits_{n=0}^{m-1} |a_n|\,|z|^n}{|z|^m}.$$

[5] La variabile n è muta

e dunque:

$$|g(z)| \leq M\frac{|z|^{\alpha}}{|z|^{m}} + \frac{1}{|z|^{m}}\sum_{n=0}^{m-1}|a_n|\,|z|^{n}.$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ allora, dalla definizione di m segue che $\alpha = m$ e quindi:

$$|g(z)| \leq M + \frac{1}{|z|^{m}}\sum_{n=0}^{m-1}|a_n|\,|z|^{n}.$$

da cui segue che:

$$\lim_{|z|\to\infty}|g(z)| \leq M.$$

e quindi $g(z)$ è limitata. Se $\alpha \notin N$ allora $m > \alpha$ e quindi:

$$|g(z)| \leq M\frac{1}{|z|^{m-\alpha}} + \frac{1}{|z|^{m}}\sum_{n=0}^{m-1}|a_n|\,|z|^{n}.$$

e dunque:

$$\lim_{|z|\to\infty}|g(z)| = 0.$$

e anche in questo caso $g(z)$ è limitata. Dal teorema di Liouville segue che g è una funzione costante e dunque:

$$c = \frac{f(z) - \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n z^n}{z^m}.$$

con $c \in \mathbb{C}$ opportuna. Allora:

$$f(z) = cz^m + \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^n.$$

e dunque f è un polinomio di grado al più [6] *m.*

[6] Se $c \neq 0$ avrà grado m altrimenti avrà grado inferiore

Esercizio 9.5.10. *Sia f una funzione intera tale per cui:*

$$f(2z) = 2f(z).$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che f è un polinomio di grado non superiore a 1 e che $f(0) = 0$.

Soluzione 9.5.10. *Scriviamo la relazione funzionale come:*

$$f(z) = \frac{f(2z)}{2}.$$

Da questa deduciamo che:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{f\,(1)}{2} \\ &\vdots \\ f\left(\frac{1}{2^n}\right) &= \frac{f\,(1)}{2^n} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f\,(1)}{2^n} = 0.$$

Poichè f è analitica e quindi in particolare continua segue che $f(0) = 0$. Avremo allora

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = z\,(a_1 + a_2 z + \cdots) = zg(z).$$

e quindi posto:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}.$$

si ha che $g(z)$ è anch'essa una funzione intera ed inoltre:

$$f(z) = zg(z).$$

Ne segue che:

$$f(2z) = 2zg(2z).$$

e dunque:
$$2zg(2z) = 2zg(z).$$
da cui:
$$g(z) = g(2z).$$
Sia allora:
$$M = \max_{|z|\leqslant 1} |g(z)| \in \mathbb{R}.$$
e sia $w \in \mathbb{C}$ qualsiasi. Si avrà che:
$$\exists n \in \mathbb{N} : w' = \frac{w}{2^n} \Rightarrow |w'| \leqslant 1$$
Allora:
$$g(w') = g(2w') = \cdots g(2^n w') = g(w).$$
e dunque:
$$|g(w)| \leqslant M \ \ \forall w \in \mathbb{C}.$$
*Per il **Teorema di Liouville** si ha che g è costante e dunque $g(z) = a_1$. Allora $f(z) = a_1 z$, che è quanto si voleva provare.*

9.6 Lemma di Schwarz

Esercizio 9.6.1. *Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e tale che:*

1. $|f(z)| < 1 \ \ \forall z \in D.$
2. $f(0) = 0.$

Dimostrare che:
$$|f(z) + f(-z)| \leqslant 2\,|z|^2\,.$$

Soluzione 9.6.1. *Per il **Lemma di Schwarz** si ha che:*
$$|f(z)| \leqslant |z|$$

per ogni $z \in D$ *ed inoltre* $|f'(0)| \leqslant 1$. *Definiamo:*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)+f(-z)}{2z} & se\ \ z \neq 0 \\ 0 & se\ z = 0 \end{cases}$$

Si ha che:

$$\lim_{z\to 0} \tfrac{f(z)+f(-z)}{2z} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{f(z)-f(0)}{z} - \tfrac{f(-z)-f(0)}{-z}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(f'(0) - f'(0)\right) = 0$$

e quindi, per il ***Teorema della Singolarità Rimovibile di Riemann****, si ha che* $g(z)$ *è analitica in* D. *Se* $z \neq 0$ *si ha:*

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)+f(-z)}{2z}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{|f(z)|}{|z|} + \frac{|f(-z)|}{|-z|}\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{|z|}{|z|} + \frac{|-z|}{|-z|}\right] \leqslant 1$$

e quindi per ogni $z \in D$ *si ha* $|g(z)| \leq 1$. *Poichè* $g(0) = 0$ *si può applicare a* g *il* ***Lemma di Schwarz*** *ottenendo che:*

$$|g(z)| \leqslant |z|\,.$$

per ogni $z \in D$. *Allora:*

$$\left|\frac{f(z)+f(-z)}{2z}\right| \leqslant |z|\,.$$

da cui segue:

$$|f(z)+f(-z)| \leqslant 2\,|z|^2\,.$$

Esercizio 9.6.2. *Sia* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *e sia* $|f(z)| < 1 \ \ \forall z \in D$. *Dimostrare che per ogni* $z \in D$ *si ha:*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Soluzione 9.6.2. *Per ogni $a \in D$ l'applicazione:*

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

è ben definita e analitica e tale che $\phi(D) \subseteq D$. [7]
Siccome $a \in D \Leftrightarrow -a \in D$ e siccome $a \in D \Rightarrow f(a) \in D$, avremo che anche:

$$\phi_{f(a)}(z) = \frac{z - f(a)}{1 - \overline{f(a)}z}.$$

e

$$\phi_{-a}(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

sono funzioni analitiche da D in D. Consideriamo allora:

$$g(z) = \left(\phi_{f(a)} \circ f \circ \phi_{-a}\right)(z).$$

che sarà una funzione analitica da D in D e osserviamo che per la ***regola della catena*** *avremo*

$$g'(0) = \phi'_{f(a)}\left(f\left(\phi_{-a}(0)\right)\right) \cdot f'\left(\phi_{-a}(0)\right) \cdot \phi'_{-a}(0).$$

Ma:

$$\phi'_{-a}(z) = \frac{1+\overline{a}z - (z+a)\,\overline{a}}{(1+\overline{a}z)^2}.$$

e quindi:

$$\phi'_{-a}(0) = 1 - |a|^2.$$

Inoltre:

$$\phi_{-a}(0) = a.$$

e quindi:

$$f'\left(\phi_{-a}(0)\right) = f'(a).$$

Infine:

$$f\left(\phi_{-a}(0)\right) = f(a).$$

[7] Vedi esercizio 1.1.4 ed esercizio 1.1.5

e siccome:

$$\phi'_{f(a)}(z)=\frac{\left(1-\overline{f\,(a)}z\right)+(z-f\,(a))\,\overline{f\,(a)}}{\left(1-\overline{f\,(a)}z\right)^2}.$$

si avrà:

$$\phi'_{f(a)}\left(f\left(\phi_{-a}\left(0\right)\right)\right)=\phi'_{f(a)}\left(f\left(a\right)\right)=\frac{1}{\left(1-\left|f\left(a\right)\right|^2\right)}.$$

Da tutto ciò segue che:

$$g'(0)=\frac{1}{\left(1-\left|f\left(a\right)\right|^2\right)}f'\left(a\right)\left(1-|a|^2\right).$$

e dunque:

$$|g'(0)|=\frac{1}{\left(1-\left|f\left(a\right)\right|^2\right)}\left|f'\left(a\right)\right|\left(1-|a|^2\right).$$

*Se osserviamo che $g(0)=0$ possiamo applicare a g il **Lemma di Schwarz** che in particolare ci dice $|g'(0)|\leq 1$. Ne segue che:*

$$\frac{1}{\left(1-\left|f\left(a\right)\right|^2\right)}\left|f'\left(a\right)\right|\left(1-|a|^2\right)\leqslant 1.$$

e dunque:

$$\frac{\left|f'\left(a\right)\right|}{1-\left|f\left(a\right)\right|^2}\leqslant\frac{1}{1-|a|^2}.$$

Siccome a è stato scelto arbitrariamente in D, possiamo anche scrivere che per ogni $z\in D$ si ha:

$$\frac{\left|f'\left(z\right)\right|}{1-\left|f\left(z\right)\right|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

che è quanto richiesto.

9.7 Principio di riflessione di Schwarz

Esercizio 9.7.1. *Sia f una funzione* ***analitica e limitata*** *in:*

$$\Omega = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}.$$

dove:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Dimostrare che f è ***costante****.*

Soluzione 9.7.1. *Si consideri:*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & se\, z \in \Omega \\ f(\overline{z}) & = \overline{f(z)} \end{cases}$$

Per il ***principio di riflessione di Schwarz****, la funzione g è* ***analitica*** *ed inoltre, essendo f* ***limitata*** *in Ω si avrà che g è* ***limitata*** *in $\mathbb{C}$. Per il* ***Teorema di Liouville*** *g è* ***costante*** *e dunque anche f è* ***costante****.*

Esercizio 9.7.2. *Sia f una funzione intera tale per cui esiste un intervallo (a, b) dell'****asse reale*** *per il quale $x \in (a, b) \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ si ha $f(z) \in \mathbb{R}$.*

Soluzione 9.7.2. *Sia:*

$$\Omega = \mathbb{H} \cup (a, b) \cup \mathbb{H}_-$$

dove:

- *$\mathbb{H}$ è lo stesso dell'esercizio precedente.*
- *$(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < Re\ z < b\}$.*
- *$(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < Re\ z < b\}$ e $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z < 0\}$.*

Consideriamo la funzione:

$$F(z) = \begin{cases} f(z)\, se \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \overline{f(\overline{z})} \ se \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Per il ***Principio di riflessione di Schwarz*** *essa è analitica in* Ω*. Ovviamente* f *è essa stessa analitica in* Ω *ed inoltre* $F(z) = f(z)$ *per ogni* $z \in \mathbb{H}$*. Allora* f *coincide con* F *su tutto* Ω *e quindi, in particolare:*

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

se $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{H}_-$*. Infatti se se* $\operatorname{Im} z < 0$ *la cosa è vera per definizione, mentre se* z *è tale per cui im* $z > 0$ *allora posto* $w = \overline{z}$ *si ha che* $\operatorname{Im} w < 0$ *e quindi:*

$$\overline{f(\overline{w})} = f(w).$$

ovvero:

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}).$$

da cui:

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Poichè f *è continua in tutto* $\mathbb{C}$ *si ha:*

$$f(x) = \lim_{y \to 0} f(x+iy) = \lim_{y \to 0} \overline{f(x-iy)} = \overline{f(x)}.$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ *e dunque la tesi è provata.*

Capitolo 10

Applicazioni conformi

Esercizio 10.0.3. *Studiare la conformalità delle seguenti applicazioni:*

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tale che* $f(z) = z^2$.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tale che* $f(z) = e^z$.

Soluzione 10.0.3. *Per quanto riguarda la* ***prima applicazione*** *si ha che:*

$$f'(z) = 2z.$$

e quindi $f'(z) \neq 0$ *se e solo se* $z \neq 0$. *Questo significa che l'applicazione è conforme per ogni* $z \neq 0$. *Per quanto riguarda* ***la seconda applicazione*** *si ha che* $f'(z) = e^z \neq 0 \, \forall z \in \mathbb{C}$.

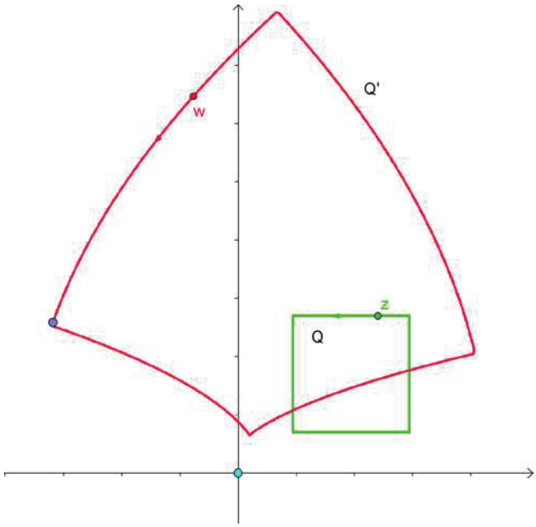

Figura 10.1: Se il quadrato Q non contiene l'origine, non essendo la trasformazione conforme in ogni suo punto si ottiene come figura trasformata Q' il cui bordo è costituito da archi di curve ortogonali. Se il punto z descrive il bordo del quadrato una volta in senso antiorario il punto w descrive il bordo di Q' una volta.

Esercizio 10.0.4. *Studiare l'applicazione:*

$$f(z) = az + b.$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$.

Soluzione 10.0.4. *Osserviamo che si può scrivere:*

$$f(z) = |a|\, e^{i\theta} z + b.$$

dove $\theta = \arg z$. *Allora possiamo definire le seguenti funzioni:*

$$g(z) = |a|\, z$$

$$h(z) = e^{i\theta} z$$

$$t(z) = z + b$$

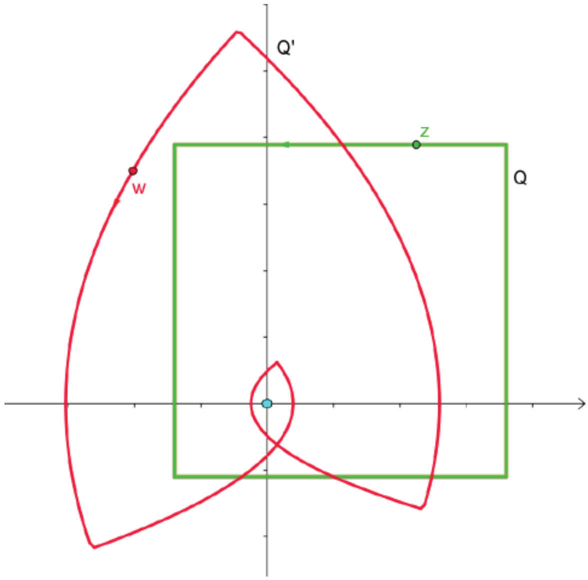

Figura 10.2: Se il quadrato Q contiene l'origine, essendo la trasformazione non conforme nell'origine, si ottiene come figura trasformata Q' il cui contorno non è più costituito da archi ortogonali. Se il punto z descrive il bordo del quadrato una volta in senso antiorario il punto w descrive il bordo di Q' una volta. si noti però che il punto w "fa due giri" intorno all'origine.

e osservare che:

$$f(z) = (t \circ h \circ g)(z).$$

Pertanto si può pensare ad f come al risultato della composizione di ***tre trasformazioni geometriche****:*

1. *g che è una* ***dilatazione di modulo*** *$|a|$.*

2. *h che è una* ***rotazione di angolo*** *θ.*

3. *t che è una* ***traslazione di vettore*** *b.*

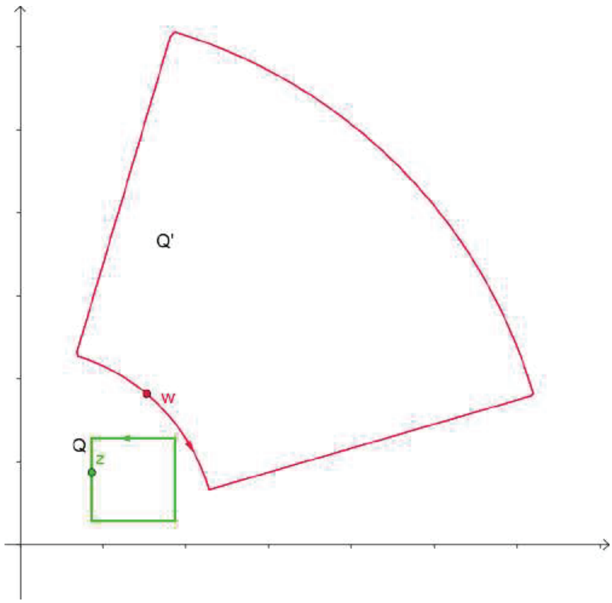

Figura 10.3: L'applicazione e^z è conforme per ogni z

Esercizio 10.0.5. *Si consideri l'applicazione:*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *e tali che* $ad - bc \neq 0$. *Si dimostri che:*

1. f *è* ***iniettiva***.

2. f *è* ***conforme***.

Soluzione 10.0.5. *Lavoreremo nell'ipotesi in cui* $c \neq 0$ *e quindi supporremo* $z \neq -c/d$. *Se così* ***non è*** *la trasformazione si riduce alla forma* $f(z) = a'z + b'$ *e le tesi sono* ***molto facili*** *da provare. Per quanto riguarda l'iniettività dimostriamo che:*

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Infatti se:

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}.$$

si ha:
$$(az_1 + b)\,(cz_2 + d) = (az_2 + b)\,(cz_1 + d)\,.$$
da cui segue:
$$(ad - bc)\,(z_1 - z_2) = 0.$$
e siccome per ipotesi $ad - bc \neq 0$ *si dovrà avere* $z_1 - z_2 = 0$ *da cui* $z_1 = z_2$*. Per quanto riguarda la conformalità si ha:*
$$f'(z) = \frac{a\,(cz + d) - (az + b)\,c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$
e quindi, sempre in base all'ipotesi $ad - bc \neq 0$*, si ha che* $f'(z) \neq 0$ *per ogni* $z \neq -c/d$ *da cui la tesi.*

Capitolo 11

Prolungamento analitico

Esercizio 11.0.6. *Data la funzione:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n = z - z^2 + z^3 \cdots .$$

dimostrare che essa è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$. Trovarne poi il ***prolungamento analitico*** *per $|z| \geq 1$.*

Soluzione 11.0.6. *Siccome:*

$$\left|(-1)^{n+1} z^n\right| \leq |z^n| = |z|^n .$$

e siccome:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^n| < +\infty .$$

per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| < 1$, la ***prima parte*** *dell'esercizio è conclusa. Poichè, per $|z| < 1$, si ha:*

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n) = \frac{z}{1+z}.$$

il prolungamento analitico di $f(z)$ a tutto $\mathbb{C} - \{-1\}$ è:

$$F(z) = \frac{z}{1+z}.$$

Esercizio 11.0.7. *Data la funzione:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) z^n.$$

dimostrare che essa è definita per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| < 1$. Trovarne poi il ***prolungamento analitico*** *per $|z| \geq 1$*

Soluzione 11.0.7. *Sia:*

$$|z| \leq \rho < 1.$$

Allora la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\rho^n.$$

converge come si vede immediatamente mediante il ***criterio del rapporto****. Ne segue che:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) z^n.$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < \rho < 1$. Per l'arbitrarietà di ρ si ha che la serie data converge per ogni $|z| < 1$. Sia $z = w^2$ con $|w| < 1$. Allora si ha:

$$f(w^2) = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) w^{2n}.$$

Sia:

$$G(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n+1}.$$

Osserviamo che:

$$\frac{d}{dw} G(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) w^{2n}.$$

per $|w| < 1$. *Quindi*

$$G(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n+1} = w - w^3 + w^5 - \cdots =$$

$$= w\left(1 - w^2 + w^4 + \cdots\right) = \tfrac{w}{1+w^2}$$

Ne segue che:

$$\frac{d}{dw}G(w) = \frac{1\left(1+w^2\right) - 2w^2}{\left(1+w^2\right)^2} = \frac{1-w^2}{\left(1+w^2\right)^2} = g(w).$$

e dunque:

$$F(z) = \frac{1-z}{\left(1+z\right)^2}.$$

è il ***prolungamento analitico*** *a tutto* $\mathbb{C} - \{-1\}$ *di* $f(z)$.

Esercizio 11.0.8. *Data la funzione:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\left(2n-1\right)} z^{2n}.$$

dimostrare che essa è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $|z| \leq 1$. *Trovare poi il suo* ***prolungamento analitico***.

Soluzione 11.0.8. *Siccome, per* $|z| \leq 1$ *si ha:*

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n\left(2n-1\right)} z^{2n} \right| \leqslant \frac{1}{n\left(2n-1\right)}.$$

e siccome la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(2n-1\right)}.$$

è convergente la prima parte dell'esercizio è risolta. consideriamo ora un qualsiasi intervallo reale:

$$I = [-a, a] \subset (-1, 1)$$

e la restrizione di f a I. In tale intervallo la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\,(2n-1)} x^{2n}.$$

è derivabile termine a termine e si ha:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{(2n-1)} x^{2n-1}.$$

Anche tale serie è derivabile termine a termine in I e si ha:

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} x^{2m}$$

Quindi, in I, si ha:

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

e tenuto conto del fatto che $f'(0) = 0$ si avrà:

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt.$$

ovvero:

$$f'(x) = 2 \arctan x.$$

Una nuova integrazione (per parti) , tenuto conto del fatto che $f(0) = 0$, fornisce:

$$f(x) = 2 \arctan x - \log(1 + x^2).$$

che vale in I. Per ***prolungamento analitico*** *possiamo ottenere allora:*

$$f(z) = 2 \arctan z - \log(1 + z^2).$$

dove però bisogna escludere gli $z \in \mathbb{C}$ tali per cui [1].

$$1 + z^2 \in R_0^-$$

[1] Si ricordi che $\log z$ è analitica per $-pi < \arg z < \pi$

Posto allora $z = re^{i\theta}$, osserviamo che:

$$1 + r^2 e^{2i\theta} \in R_0^- \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

In tal caso dovremo avere $1 - r^2 \leq 0$ e quindi $r \geq 1$. Pertanto il ***sottoinsieme massimale*** *nel quale vale il* ***prolungamento analitico*** *trovato è:*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq bi,\ |b| \geqslant 1\}.$$

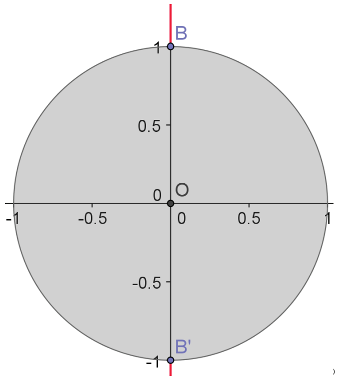

Figura 11.1: L'insieme massimale nel quale vale il prolungamento analitico. La circonferenza è quella unitaria nel cui interno e sulla quale converge la serie data.

Capitolo 12

Analisi Complessa Visiva

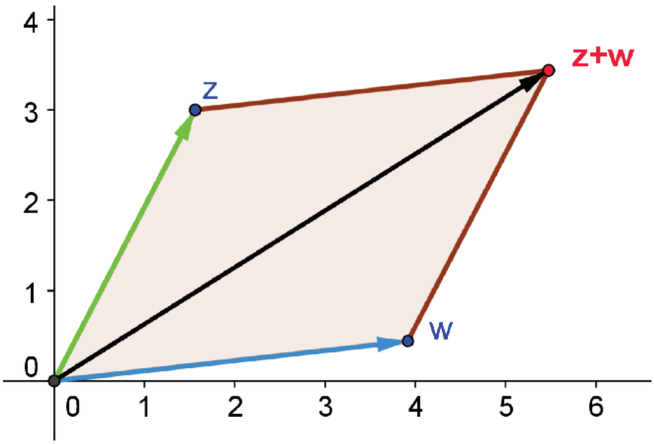

Figura 12.1: La somma di due numeri complessi

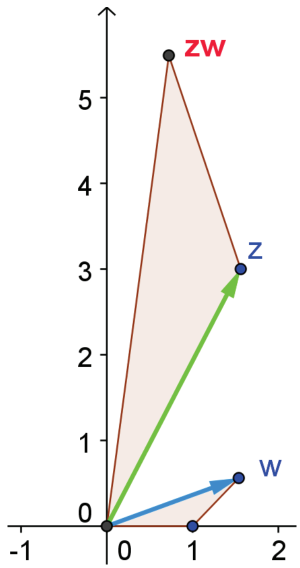

Figura 12.2: Il prodotto di due numeri complessi: si noti la similitudine dei due triangoli

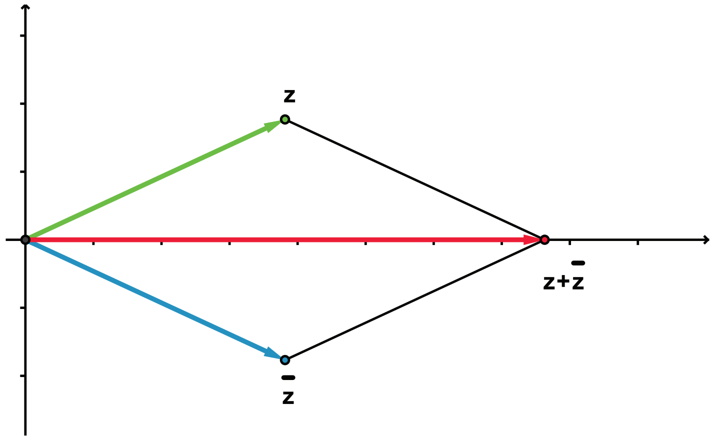

Figura 12.3: La somma di due numeri complessi coniugati è sempre reale

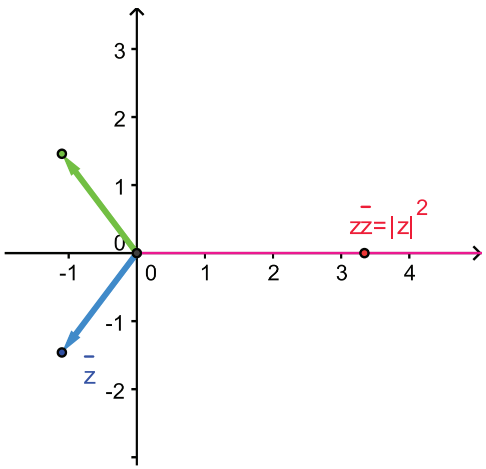

Figura 12.4: Il prodotto di due numeri complessi coniugati è sempre un numero reale non negativo

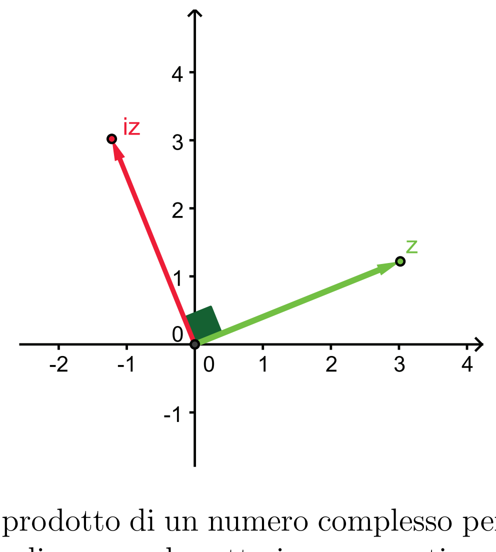

Figura 12.5: Il prodotto di un numero complesso per i: corrisponde a una rotazione di un angolo retto in senso antiorario

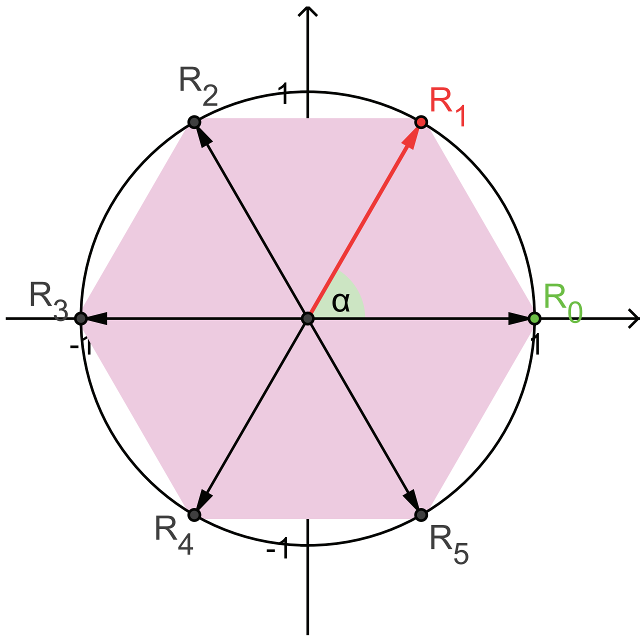

Figura 12.6: Le radici seste dell'unità costituiscono un gruppo ciclico finito di ordine 6 nel quale R_1 è un generatore

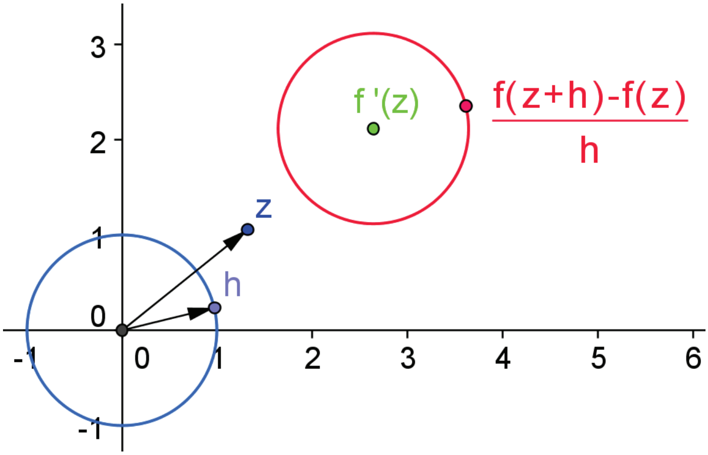

Figura 12.7: Per una funzione **olomorfa**, se h descrive una circonferenza di raggio"piccolo" intorno a 0 si ha che $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ descrive una circonferenza di centro $f'(z)$ e se $h \to 0$ anche il raggio di tale circonferenza tende a zero. In figura è stata utilizzata $f(z) = z^2$.

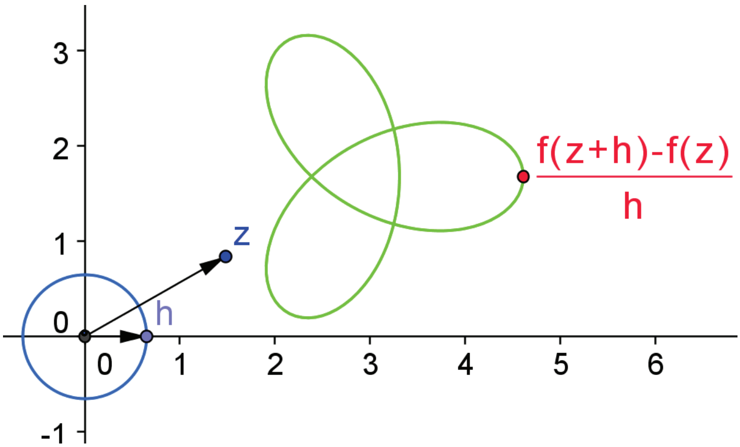

Figura 12.8: Per una funzione **non olomorfa**, se h descrive una circonferenza di raggio"piccolo" intorno a 0 non è più vero che $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ descrive una circonferenza. In figura è stata utilizzata $f(z) = z^2 + \overline{z}$.

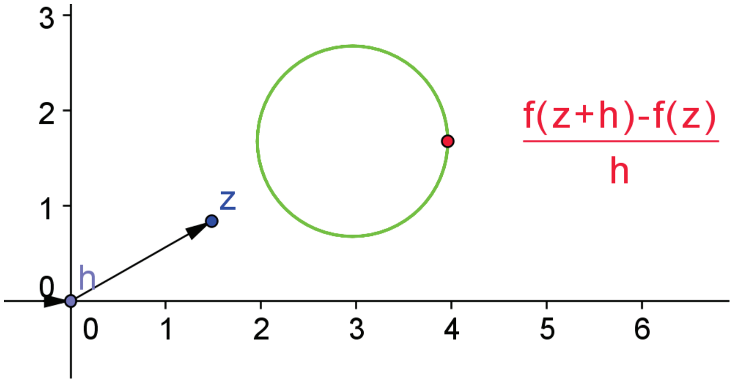

Figura 12.9: Per una funzione **non olomorfa**, se $h \to 0$ $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ non tende ad alcun limite e i suoi valori corrispondono ai punti di una circonferenza. In figura è stata utilizzata $f(z) = z^2 + \overline{z}$.

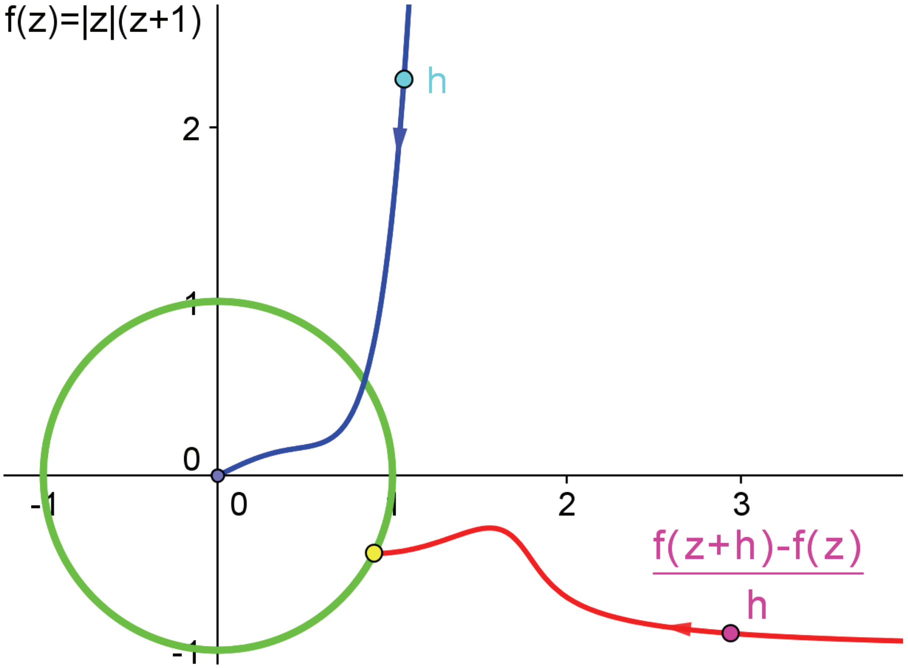

Figura 12.10: Per una funzione **non olomorfa**, il modo in cui $h \to 0$ determina il valore del limite di $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Tali valori limite costituiscono i punti di una circonferenza che è determinata dalla funzione e dal punto z tale circonferenza si chiama circonferenza di **Kasner**. Se denotiamo come al solito con $f = u + iv$ e con u_x u_y v_x v_y le derivate parziali, in un generico punto z il centro di tale circonferenza è dato da $z_0 = \frac{1}{2}\left[(u_x + v_y) + i\,(v_x - u_y)\right]$ mentre il raggio è dato da $r = \frac{1}{2}\sqrt{(u_x - v_y)^2 + (v_x + u_y)^2}$ dove tutte le derivate si intendono calcolate in z. Si osservi che se valgono le equazioni di Cauchy-Riemann si ha che $z_0 = u_x + iv_x$ mentre il raggio $r = 0$

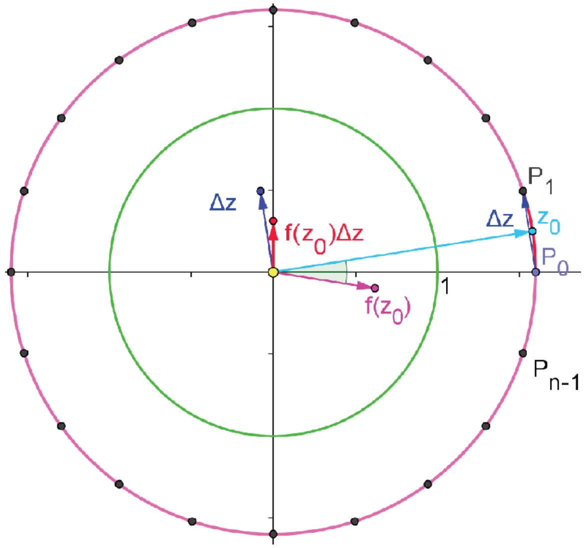

Figura 12.11: Spiegazione visiva del teorema di Cauchy per la funzione $1/z$ integrata su una circonferenza di centro $z = 0$ e raggio r: se si immagina di dividere la circonferenza in n piccoli archi uguali e si sceglie per ciascuno di essi il punto medio z_k si ha che $f\left(z_k\right) \Delta z \simeq \frac{2\pi}{n} i$ e quindi $\int\limits_{|z|=r} f\left(z\right) dz \simeq \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(z_k\right) \Delta z = n \frac{2\pi}{n} i = 2\pi i$ con $\simeq$ che diventa $=$ per $n \to +\infty$

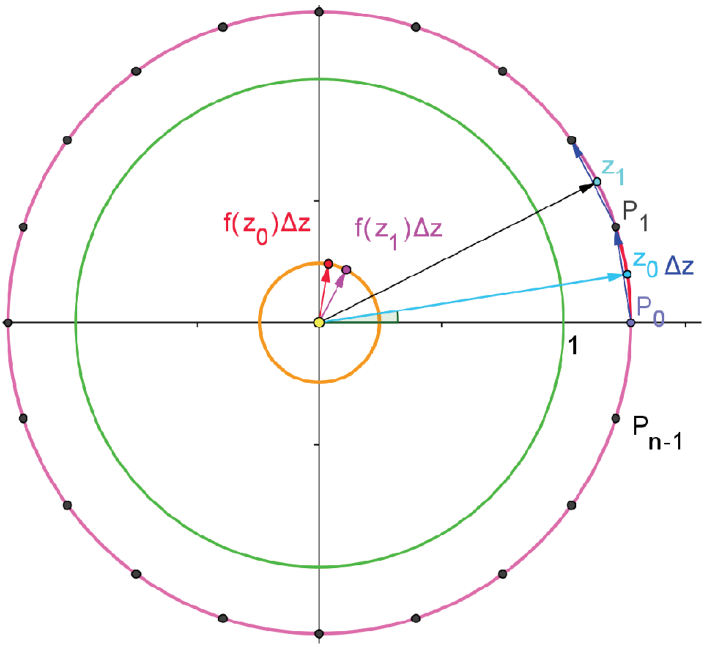

Figura 12.12: Spiegazione visiva del teorema di Cauchy per la funzione $1/z^2$ integrata su una circonferenza di centro $z = 0$ e raggio r: se si immagina di dividere la circonferenza in n piccoli archi uguali e si sceglie per ciascuno di essi il punto medio z_k si ha che questa volta $f(z_k)\,\Delta z = u_k$ dove i numeri complessi u_k hanno tutti lo stesso modulo ma ognuno di essi è ruotato rispetto al precedente di un angolo $2\pi/n$ in senso orario. Ne segue allora che $\int\limits_{|z|=r} f(z)\,dz \simeq \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta z = 0$. Una cosa simile succede per $f(z) = 1/z^n$ con $n \in \mathbb{N}$ ed $n \neq 1$ e per le funzioni $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Vedi anche figura successiva per maggiori dettagli.

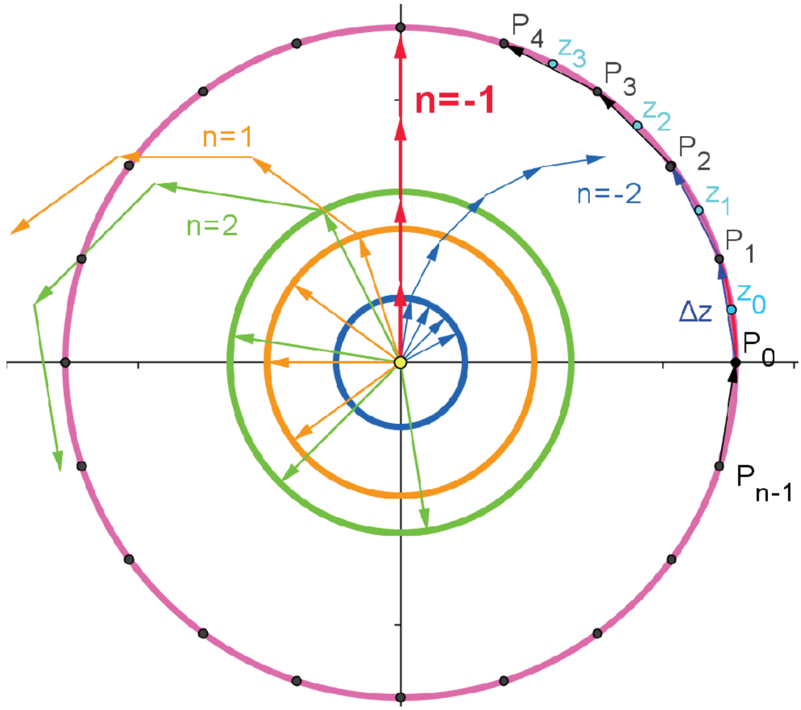

Figura 12.13: Sono state considerate le seguenti funzioni z^m per $m = -2, -1, 1, 2$. Per ognuna di esse sono stati calcolati $u_k = f(z_k)\Delta z$ per $k = 0, 1, 2, 3$. I vettori uscenti dall'origine di un dato colore si riferiscono alla stessa funzione. Le spezzate uscenti dall'origine rappresentano le somme $\sum_{k=0}^{3} f(z_k)\Delta z$. Se $m \neq -1$ tali spezzate terminano sempre nell'origine, qual'ora si immagini di considerare tutti i punti della suddivisione P_k. Ovviamente, a causa dei diversi valori di m,i vettori u_k hanno lunghezze diverse e anche gli angoli tra due di essi consecutivi sono diversi:per la precisione, se prendiamo gli u_k di una delle precedenti funzioni con $m \neq -1$ allora l'angolo fra u_k e u_{k+1} vale $\alpha_k = \frac{2\pi}{n}(m+1)$ e sarà descritto in senso orario se $m < 0$ e in senso antiorario se $m > 0$. Per $m = -1$ i vettori u_k, come abbiamo già visto sono rappresentati da un numero immaginario puro e quindi la loro somma non è 0 ma $2i\pi$.

Capitolo 13

Appendici

13.1 Premessa

Di seguito vengono riportati alcuni risultati e/o approfondimenti che si ritiene siano utili allo studente. Non sempre **sono fornite** tutte le dimostrazioni.

13.2 Il concetto di massimo e minimo limite

La definizione di **limite finito** per una successione limitata $(a_n)_n$ di **numeri reali** è la seguente:

Definizione 13.2.1. *Si dice che la successione data ha* ***limite*** $l \in \mathbb{R}$ *se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in N : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon.$$

Come è ben noto **non tutte** le successioni limitate hanno **limite finito**. Se però **indeboliamo** la definizione, possiamo ottenere qualcosa che **generalizza** il concetto di limite. Per l'esattezza:

Definizione 13.2.2. *Data una successione* ***superiormente limitata*** *diciamo che* $L \in \mathbb{R}$ *è il* ***massimo limite*** *della successione e scriviamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = L.$$

se e solo se:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow a_n \leq l + \varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\Rightarrow l - \varepsilon \leq a_n$ *per* ***infiniti*** $n > n_\varepsilon$.

In modo analogo si definisce il **minimo limite** della successione:

Definizione 13.2.3. *Data una successione* ***inferiormente limitata*** *diciamo che* $l \in \mathbb{R}$ *è il* ***minimo limite*** *della successione e scriviamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = l.$$

se e solo se:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow\ l - \varepsilon \leq a_n$

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq l + \varepsilon$

Se la successione **non è superiormente limitata** poniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = +\infty.$$

Se la successione **non è inferiormente limitata** poniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -\infty.$$

Si dimostrano le seguenti proprietà:

1. Ogni **successione superiormente limitata** ammette **sempre** un **unico massimo limite**.

2. Ogni **successione inferiormente limitata** ammette **sempre** un **unico minimo limite**.

3. Per ogni successione:
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n.$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n.$$
se e solo se **esiste** $\lim_{n\to\infty} a_n$. e in tal caso:
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

I concetti di **massimo e minimo limite** generalizzano quello di limite perchè:

1. Essi **esistono sempre**.

2. Nel caso in cui la successione abbia limite sono uguali ad esso.

Il prezzo da pagare per tutto ciò è che vengono meno certe proprietà del limite. Per esempio:
$$\lim_{n\to\infty} \sup (a_n + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n.$$
cioè il massimo limite di una somma non è, in generale, uguale alla somma dei massimi limiti. Disuguaglianze simili valgono negli altri casi possibili. **ATTENZIONE**: i concetti di **massimo e minimo limite** di una successione **differiscono** da quello di $\sup a_n$ e di $\inf a_n$ come mostra il seguente esempio:

Esempio 13.2.1. *Sia:*
$$a_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n}$$
Allora è facile verificare che:
$$\sup a_n = \frac{5}{2}.$$
$$\inf a_n = -1.$$
ma:
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = 2.$$
e
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0.$$

13.3 Un procedimento particolare per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze

Teorema 13.3.1. *Sia:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

nella quale $a_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Supponiamo che:*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Allora il raggio di convergenza r *della serie vale 1.*

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$ con $0 < |z| < 1$ e si consideri la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \tag{13.1}$$

Poichè:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|\,.$$

si avrà che:

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = |z| < 1.$$

e quindi, per il criterio del rapporto la serie (13.1) converge. Allora la serie data essendo assolutamente convergente è convergente in ogni cerchio di raggio $\rho(z) \leq |z|$. Siccome:

$$\sup_{|z|<1} \rho(z) = 1.$$

avremo che $r \geq 1$. Se fosse però $r > 1$ allora la serie (13.1) dovrebbe convergere per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale per cui $1 < |z| < r$ e ciò è assurdo in quanto in tal caso si avrebbe:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = |z| > 1.$$

e dunque la serie (13.1) sarebbe divergente per il criterio del rapporto. □

13.4 Un teorema di Picard sulle serie di potenze

Teorema 13.4.1. *Sia:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie di potenze per la quale $a_n \in \mathbb{R}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e tale per cui:*

1. $a_n > a_{n+1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Allora la serie data converge in tutti i punti tali per cui $|z| = 1$ *eccetto al più* $z = 1$.

Per la dimostrazione del teorema occorre premettere un:

Lemma 13.4.1. *Se* $(a_n)_n$ *è una successione di numeri reali positivi monotona decrescente e se* $(b_n)_n$ *è una successione di numeri reali limitata allora la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})\, b_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Studieremo la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\mathrm{a_n} - a_{n+1})\, \mathrm{b_n}| = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{a_n} - a_{n+1})\, |\mathrm{b_n}|.$$

in quanto com'è ben noto l'assoluta convergenza implica sempre la convergenza. Poichè la successione dei b_n è limitata, esiste $M > 0$ tale per cui $|b_n| < M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned}
&s_0 = (\mathrm{a}_0 - a_1)\,|\mathrm{b}_0| \leqslant (\mathrm{a}_0 - a_1)\,M \\
&s_1 = s_0 + (\mathrm{a}_1 - a_2)\,|\mathrm{b}_0| \leqslant (\mathrm{a}_0 - a_1)\,M + (\mathrm{a}_1 - a_2)\,M = (\mathrm{a}_0 - a_2)\,M \\
&\vdots \\
&s_n = s_{n-1} + (\mathrm{a_n} - a_{n+1})\,|\mathrm{b_n}| \leqslant (\mathrm{a}_0 - a_{n+1})\,M \leqslant \mathrm{a}_0 M
\end{aligned}$$

e dunque la successione delle somme parziali è limitata superiormente. Dunque, essendo la serie dei moduli, a termini non negativi essa converge. □

Premesso questo lemma passiamo alla dimostrazione del **Teorema di Picard**: sia

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

con $0 < \theta < 2\pi$. Poichè

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

il teorema sarà provato se dimostreremo che le due serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

sono convergenti. Consideriamo dapprima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

e poniamo:

$$\sigma_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \cos n\theta.$$

Per le ipotesi su θ si ha che $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$. Si ha allora

$$\sin\frac{\theta}{2}\sigma_k = a_0 \sin\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta$$

Ricordando che:

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right) - \sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

si ha:

$$\cos n\theta \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right)\right]$$

e dunque:

$$\sin\frac{\theta}{2}\sigma_k = \sin\frac{\theta}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} a_n \left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right)\right]$$

ovvero:

$$\sin\frac{\theta}{2}\sigma_k = \sin\frac{\theta}{2}a_0 + S_k.$$

essendo:

$$S_k = \tfrac{1}{2}a_1\left[\sin\left(\tfrac{3}{2}\theta\right) - \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right] + \cdots$$

$$+ \cdots \tfrac{1}{2}a_k\left[\sin\left(\tfrac{2k+1}{2}\theta\right) - \sin\left(\tfrac{2k-1}{2}\theta\right)\right]$$

Osserviamo che si può scrivere:

$$S_k = \tfrac{1}{2}\left(a_1 - a_2\right)\sin\left(\tfrac{3}{2}\theta\right) + \cdots$$

$$+ \cdots \left(a_{k-1} - a_k\right)\sin\left(\tfrac{2k-1}{2}\theta\right) + \tfrac{1}{2}a_k \sin\left(\tfrac{2k+1}{2}\theta\right)$$

e siccome:

$$\lim_{k\to+\infty} a_k \sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right) = 0.$$

mentre:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2}\left\{(a_1-a_2)\sin\left(\frac{3}{2}\theta\right)+\cdots(a_{k-1}-a_k)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\theta\right)\right\}\in\mathbb{R}$$

avremo che, per il lemma dimostrato precedentemente:

$$\exists\lim_{k\to+\infty}S_k=l\in\mathbb{R}.$$

Quindi:

$$\lim_{k\to+\infty}\sin\frac{\theta}{2}\sigma_k=\sin\frac{\theta}{2}a_0+l.$$

e dunque:

$$\exists\lim_{k\to+\infty}\sigma_k=a_0+\frac{l}{\sin\frac{\theta}{2}}\in\mathbb{R}.$$

e pertanto la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\theta.$$

è convergente. In modo analogo si prova la convergenza dell'altra serie e quindi il teorema è provato.

13.5 Il concetto di serie di Dirichlet

Definizione 13.5.1. *Si definisce* ***serie di Dirichlet ordinaria*** *una serie del tipo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}.$$

dove $a_n\in\mathbb{C}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e nella quale si intende che:

$$n^z=e^{z\log n}.$$

Teorema 13.5.1. *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}.$$

una ***serie di Dirichlet*** *e si supponga che:*

$$\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{\log|a_n|}{\log n}.$$

sia finito. Allora si ha che la serie data ***converge assolutamente*** *per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che:*

$$\text{Re } z > \sigma + 1.$$

e ***converge assolutamente ed uniformemente*** *per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale per cui:*

$$\text{Re } z \geqslant k > \sigma + 1.$$

Dimostrazione. Se

$$\text{Re } z > \sigma + 1.$$

possiamo trovare k ed h tali per cui:

$$\text{Re } z \geqslant k > h > \sigma + 1.$$

In base alla definizione di massimo limite, si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n(\varepsilon) : \forall n > n(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\log|a_n|}{\log n} < \sigma + \varepsilon.$$

Siccome $h - 1 > \sigma$ avremo che $h - 1 = \sigma + \varepsilon'$ con $\varepsilon' > 0$. Basterà allora scegliere $\varepsilon < \varepsilon'$ per avere che:

$$h - 1 = \sigma + \varepsilon' > \sigma + \varepsilon > \frac{\log|a_n|}{\log n}\ \ \forall n > n(h, \varepsilon) = N.$$

e dunque:

$$\log|a_n| < (h-1)\log n\ \ \forall n > N.$$

da cui:

$$|a_n| < n^{h-1}.$$

Se $z = x + iy$ si ha:

$$n^z = e^{z\log n} = e^{(x+iy)\log n} = e^{x\log n} e^{iy\log n}.$$

e quindi:

$$|n^z| = \left|e^{x \log n}\right| \left|e^{iy \log n}\right| = e^{x \log n} = n^x = n^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Allora:

$$\left|\frac{a_n}{n^z}\right| \leqslant \frac{n^{h-1}}{n^{\mathrm{Re}\, z}} \leqslant \frac{1}{n^{k-h+1}} = \frac{1}{n^{1+\eta}}.$$

dove $\eta = k - h > 0$. Poichè la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\eta}}.$$

è convergente abbiamo che la serie data è **assolutamente e uniformemente** convergente per $\mathrm{Re}\, z \geqslant k > \sigma + 1$. □

Nota 13.5.1. *Nelle ipotesi assunte,* ***la serie di Dirichlet*** *converge* ***assolutamente*** *in ogni semipiano del tipo:*

$$\{z \in C : \mathrm{Re}\, z \geqslant k > \sigma_a = \sigma + 1\}.$$

Il numero $\sigma_a = \sigma+1$ è chiamato ***ascissa di assoluta convergenza****. Si può dimostrare che* ***esiste*** *anche un altro numero $\sigma_c \leq \sigma_a$ tale per cui:*

1. *La serie diverge per ogni z tale per cui $Rez < \sigma_c$.*
2. *La serie converge condizionatamente per $\sigma_c < Rez < \sigma_a$.*
3. *$\sigma_a - \sigma_c \leq 1$.*

Quindi, ***a differenza delle serie di potenze****, per le quali abbiamo un cerchio di convergenza e in ogni cerchio ad esso concentrico e di raggio minore si ha assoluta convergenza, nel caso delle* ***serie di Dirichlet*** *la situazione è* ***più complicata****: ci può essere* ***una striscia*** *nella quale c'è convergenza ma non* ***convergenza assoluta****. Ovviamente qui non abbiamo considerato i casi in cui $\sigma = \pm\infty$. Si può ad esempio dimostrare che la* ***serie di Dirichlet****:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

ha $\sigma_c = 0$ e $\sigma_a = 1$.

Nota 13.5.2. *Una **importantissima serie di Dirichlet** è la:*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

*per la quale $\sigma = 0$ e che pertanto risulta **assolutamente** e **uniformemente** convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale per cui $Rez \geq k > 1$. Tale funzione è chiamata **funzione zeta di Riemann** e può essere prolungata analiticamente a tutto $\mathbb{C} - \{1\}$. Nel punto $z = 1$ essa presenta un polo semplice. Essa riveste un'enorme importanza nello studio della **Teoria Analitica dei Numeri** cioè di quella parte della matematica che utilizzando tecniche analitiche, cerca di dedurre proprietà dei numeri interi.*

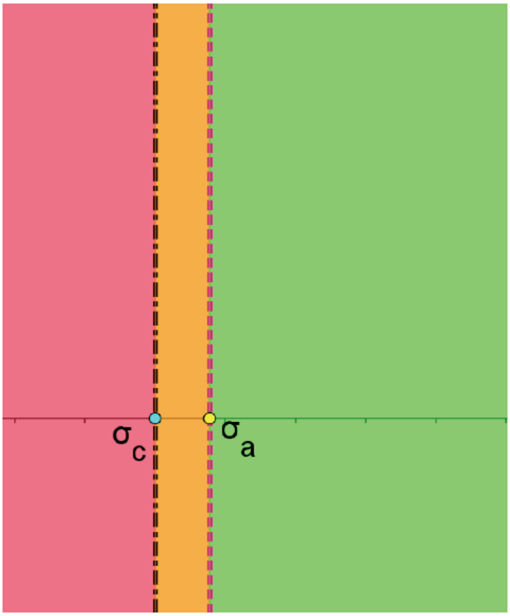

Figura 13.1: In ogni punto della zona rossa la serie di Dirichlet diverge; in ogni punto della striscia (aperta) arancione la serie converge condizionatamente, in ogni punto del semipiano (aperto) verde la serie converge assolutamente.

13.6 I prodotti infiniti

Il concetto di **prodotto infinito** è, in qualche modo, simile a quello di serie: si vuole introdurre un **processo infinito** che generalizzi l'ordinario prodotto di un numero finito di termini costituiti in genere da numeri complessi.

Definizione 13.6.1. *Sia $(u_n)_n$ una successione di* ***numeri complessi****. Diremo* ***prodotto infinito*** *la successione i cui termini sono costituiti da*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

$n \in \mathbb{N}$ e scriveremo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Definizione 13.6.2. *Si dice che il* ***prodotto infinito****:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

converge *se e solo se:*

1. *esiste un intero non negativo m tale che $\forall n \geq m.$ si ha $u_n \neq 0$*

2. *Esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=m}^{n} .u_n = c$ e tale limite è* ***finito*** *e* ***diverso da zero****.*

In tal caso si dice che:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = c \prod_{n=1}^{m-1} u_n.$$

Teorema 13.6.1. *Un* ***prodotto infinito convergente*** *è nullo se e solo se ha almeno uno dei suo fattori nullo.*

Dimostrazione. Se $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$ allora poichè esiste m intero non negativo tale che:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = c \prod_{n=1}^{m-1} u_n.$$

con $c \neq 0$ si ha che deve essere:

$$\prod_{n=1}^{m-1} u_n = 0.$$

ed essendo quest'ultimo un prodotto finito, ne segue che $u_k = 0$ per qualche k tale che $1 \leqslant k \leqslant m-1$.
Il viceversa è ovvio. □

Teorema 13.6.2. *Se un prodotto infinito è convergente allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un intero non negativo tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=m}^{n} u_n = c.$$

con $c \neq 0$. Posto allora:

$$P_{n-1} = \prod_{k=m}^{n-1} u_n.$$

$$P_n = \prod_{k=m}^{n} u_n.$$

si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod\limits_{k=m}^{n} u_n}{\prod\limits_{k=m}^{n-1} u_n} = \frac{c}{c} = 1.$$

□

Nota 13.6.1. *Scriveremo d'ora in avanti* $u_n = 1 + a_n$ *e dunque avremo che:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n).$$

al posto di:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Corollario 13.6.1. *Condizione necessaria affinchè un prodotto infinito converga è che:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Definizione 13.6.3. *I numeri* a_n *si chiamano* ***termini*** *del prodotto.*

Così come nello studio delle serie numeriche di solito si inizia con il caso particolare di quelle a termini positivi (o non negativi) anche in questa sede partiremo proprio da prodotti a termini positivi.

Definizione 13.6.4. *Un prodotto si dice a* ***termini positivi*** *se* $a_n \in \mathbb{R}$ *per tutti gli n interi non negativi e se* $a_n > 0$ *per tutti gli n interi non negativi.*

Teorema 13.6.3. *Se:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n).$$

è un ***prodotto a termini positivi*** *allora esso è convergente se e solo se è convergente la serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che il prodotto:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n).$$

sia convergente. Poichè:

$$\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)=$$

$$=1+(a_1+a_2+\cdots a_m)+(a_1a_2+\cdots a_{m-1}a_m)\cdots(a_1a_2\cdots a_m)\geqslant$$

$$\geqslant a_1+a_2+\cdots a_m=s_m$$

quindi:

$$0\leqslant s_m\leqslant\prod_{n=1}^{m}(1+a_n).$$

e dunque:

$$0\leqslant\lim_{m\to+\infty}s_m\leqslant\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)=P<+\infty.$$

pertanto la serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

è convergente. Viceversa, supponiamo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n<+\infty.$$

Osserviamo innanzitutto che posto:

$$p_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n).$$

si ha che p_m **monotona crescente** e quindi ammette limite in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Dobbiamo provare che tale successione è limitata superiormente al fine di garantire la convergenza del prodotto. Scriviamo:

$$\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)=\exp\left(\sum_{n=1}^{m}\log(1+a_n)\right).$$

e poichè:

$$x\geqslant 0\Rightarrow \log(1+x)\leqslant x.$$

si ha:

$$\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)\leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right).$$

e quindi:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)\leqslant \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{m}a_n\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}a_n\right)=e^s<+\infty.$$

essendo:

$$s=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

□

Teorema 13.6.4. *Se un prodotto del tipo:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-a_n).$$

è tale per cui $a_n\geqslant 0$ per ogni n allora esso converge: se e solo se converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

1. a_n **non tende** a zero.

2. a_n **tende** a zero.

Supponiamo dunque che a_n tenda a zero. Dimostriamo dapprima che se il prodotto converge anche la serie converge. Poichè:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

si ha che esiste un **intero positivo** m tale che:

$$a_n \leqslant \frac{1}{2} \quad \forall n \geqslant m.$$

Allora si ha:

$$1 - a_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

per ogni $n \geqslant m$ e quindi il prodotto ha tutti fattori non nulli eccetto al più un numero finito di essi. Quindi:

$$\lim_{k \to +\infty} \prod_{n=m}^{k} (1 - a_k) = P_m > 0.$$

Posto:

$$P_k = \prod_{n=m}^{k} (1 - a_n).$$

si ha che, essendo $(0 < 1 - a_n) < 1$, si avrà:

$$P_k > P_{k+1}.$$

quindi:

$$\prod_{n=m}^{k} (1 - a_n) = (1 - a_m)(1 - a_{m+1}) \cdots (1 - a_k) \geqslant P_m > 0.$$

Poichè, se $0 < x < 1$, allora:

$$1 + x < \frac{1}{1 - x}.$$

si avrà che:

$$(1+a_m)\,(1+a_{m+1})\cdots(1+a_k) <$$

$$< \tfrac{1}{(1-a_m)}\tfrac{1}{(1-a_{m+1})}\cdots\tfrac{1}{(1-a_k)} \leq \tfrac{1}{P_m}.$$

e quindi:

$$\lim_{k\to+\infty}\prod_{n=m}^{k}(1+a_n) \leqslant \frac{1}{P_m}.$$

Ma allora:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n) < +\infty.$$

e questo implica che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

per il teorema precedente. **Viceversa**, supponiamo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n < +\infty$$

e quindi per il teorema precedente il prodotto:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+2a_n) = P \geqslant 0.$$

ed inoltre esiste un intero positivo m tale che:

$$\prod_{n=m}^{+\infty}(1+2a_n) = P_m > 0.$$

Siccome a_n **tende a zero**, non si perde di generalità supponendo che sia:

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}.$$

per $n \geqslant m$. Siccome, se $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, si ha:

$$1 - x \geqslant \frac{1}{1+2x}.$$

si avrà:

$$P_k = \prod_{n=1}^{k} (1 - a_n) \geqslant \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1+2a_n} \geqslant \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + 2a_n) > \frac{1}{P} > 0.$$

e poichè P_k è monotona decrescente, si ha che esiste:

$$\lim_{k \to +\infty} \prod_{n=m}^{k} (1 - a_n) \geqslant \frac{1}{P} > 0.$$

e quindi il prodotto:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - a_n).$$

è convergente. □

Il passo successivo è quello di considerare il caso in cui **i numeri reali** a_n siano di **segno qualsiasi**.

Teorema 13.6.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

converga è che $\forall \varepsilon > 0$ *esista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n > n_0$ *e per ogni intero positivo* k*, sia:*

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \leqslant \varepsilon.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che il prodotto converga. Ciò significa che esiste un intero non negativo m tale che per ogni $n \geqslant m$ si ha $(1 + a_n) \neq 0$ e che considerato il prodotto

$$P_n = \prod_{r=m}^{n} (1 + a_r).$$

si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = p \neq 0.$$

In base al **Teorema della Permanenza del Segno**, si avrà che esiste un numero positivo L tale che $\forall n \geqslant m$ si ha:

$$|P_n| \geqslant L > 0.$$

Inoltre, essendo la successione $(P_n)_n$ convergente, essa è di Cauchy e quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $n_0 > 0$ tale che: $\forall k \geqslant 1$ si ha:

$$|P_{n+k} - P_n| \leqslant \varepsilon L. \tag{13.2}$$

Si potrà allora riscrivere la (13.2) come:

$$|P_n| \left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon L. \tag{13.3}$$

Ma:

$$\frac{P_{n+k}}{P_n} = \frac{\prod\limits_{r=m}^{n+k} (1 + a_r)}{\prod\limits_{r=m}^{n} (1 + a_r)} =$$

$$= (1 + a_{n+1}) (1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) \, .$$

e quindi, dalla (13.3) si avrà:

$$|P_n| \left| (1 + a_{n+1}) (1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1 \right| \leqslant \varepsilon L.$$

cioè:

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1| \leqslant \frac{\varepsilon L}{|P_n|} \leqslant \varepsilon.$$

Viceversa Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $n_0 > 0$ tale che per ogni $n > n_0$ e per ogni $k \geqslant 1$ sia:

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1| \leqslant \varepsilon. \tag{13.4}$$

Dimostriamo dapprima che tutti i fattori del prodotto sono **non nulli** eccetto, al più, un numero finito di essi. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e poniamo $n_0(\frac{1}{2}) = m$. Avremo che per ogni $n \geqslant m$ si ha:

$$|P_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}.$$

e quindi:

$$\frac{1}{2} \leqslant P_n \leqslant \frac{3}{2}.$$

Dunque, per ogni $n \geqslant m$, si ha $1 + a_n \neq 0$ e pertanto, i fattori nulli possono essere, al più, in numero finito.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} P_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

e quindi **se esiste**:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

Quindi il prodotto è di quelli che noi consideriamo. Ora dimostriamo che effettivamente tale limite **esiste**. Consideriamo $\varepsilon > 0$ e troviamo $n_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n > n_0(\varepsilon)$ sia

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Siccome:

$$(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k}) = \frac{P_{n+k}}{P_n}.$$

Avremo:

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

e dunque:

$$|P_n|\,|P_{n+k} - P_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

$$|P_{n+k} - P_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|P_n|} \leqslant \varepsilon.$$

Allora, la successione $(P_n)_n$ è di Cauchy e dunque ammette limite in $\mathbb{R}$. □

A questo punto passiamo alla definizione di **prodotto assolutamente convergente**.

Definizione 13.6.5. *Il prodotto:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n).$$

*nel quale $a_n \in \mathbb{C}$, si dice **assolutamente convergente** se e solo se è convergente il il prodotto:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + |a_n|).$$

Teorema 13.6.6. *Se il prodotto:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n).$$

*è **assolutamente convergente** allora esso è **convergente**.*

Dimostrazione. Poichè il prodotto è **assolutamente convergente** si ha che pero ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0(\varepsilon)$ intero non negativo tale che per ogni $n > n_0(\varepsilon)$ e per ogni intero $k \geqslant 1$ si ha:

$$|(1 + |a_{n+1}|)\,(1 + |a_{n+2}|)\cdots(1 + |a_{n+k}|) - 1| \leqslant \varepsilon.$$

cioè

$$(1+|a_{n+1}|)\,(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1\leqslant\varepsilon. \tag{13.5}$$

Siccome il prodotto:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+|a_n|)$$

è convergente, allora:

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$$

e quindi anche:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

pertanto si può supporre, senza perdita di generalità, che per $n>n_0(\varepsilon)$ sia $|(1+a_n)|>0$. Ne segue che:

$$\begin{aligned}
&0<|\,(1+a_{n+1})\,|\leqslant(1+|a_{n+1}|)\\
&\vdots\\
&0<|\,(1+a_{n+k})\,|\leqslant(1+|a_{n+k}|)
\end{aligned}$$

e quindi:

$$|\,(1+a_{n+1})\cdots(1+a_{n+k})\,|\leq(1+|a_{n+1}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)\,.$$

dalla quale:

$$|(1+a_{n+1})\cdots(1+a_{n+k})-1|\leq(1+|a_{n+1}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1.$$

Per la (13.5) si ha:

$$|(1+a_{n+1})\,(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1|\leqslant\varepsilon.$$

Quindi essendo verificata la **condizione necessaria e sufficiente** per la convergenza dei prodotti infiniti, abbiamo la tesi. □

Teorema 13.6.7. *Il prodotto:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n).$$

è ***assolutamente convergente*** *se e solo se lo è la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. Il prodotto dato è assolutamente convergente se e solo se è convergente:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+|a_n|).$$

e quest'ultimo è convergente se e solo se lo è la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Da ciò segue la tesi. □

13.7 Alcuni complementi sulle funzioni intere

Ricordiamo che una **funzione intera** è una funzione analitica f in tutto $\mathbb{C}$ e quindi se:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

la serie al secondo membro ha raggio di convergenza **infinito**. E' abbastanza naturale pensare alle funzioni intere come a una **generalizzazione dei polinomi** immaginandole come polinomi di **"grado infinito"**. E' naturale quindi porsi alcune domande fra le quali le più semplici sono le seguenti:

1. Se è data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ come riconoscere se si tratta di una **funzione intera**?

2. Se $p(z)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$, dal teorema fondamentale dell'Algebra, sappiamo che esiste sempre $z_0 \in \mathbb{C}$ tale per cui $p(z_0) = 0$. Sarà vera la stessa cosa per le **funzioni intere**?

3. Nel caso dei polinomi il loro grado è una **"misura"** del numero dei loro zeri, nel senso che contandoli con la loro molteplicità, si ha che tale numero è sempre uguale al grado. Quale concetto introdurre per le **funzioni intere**?

4. Nel caso dei polinomi, se vogliamo trovare un polinomio che abbia come zeri i numeri complessi $\alpha_1 \; ...\alpha_n$ è sufficiente considerare
$$p(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j).$$
Come si deve procedere se si vuole trovare una **funzione intera** per la quale sia assegnata una generica successione $(\alpha_j)_j$ di numeri complessi che devono essere tutti e soli i suoi zeri?

Per quanto riguarda la **prima** domanda la risposta è fornita dal seguente:

Teorema 13.7.1. ***Condizione necessaria e sufficiente*** *affinchè*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
sia una ***funzione intera*** *è che:*
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione sia **intera**. Allora, dalla formula del raggio di convergenza di una generica serie di potenze, si ha:
$$\lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Ma:

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \inf \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

e quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} \inf \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

da cui:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Viceversa, supponiamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Allora, in particolare:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

e dunque $r = +\infty$. $\square$

E' facile dimostrare, per mezzo del criterio del rapporto, che una **condizione sufficiente** affinchè:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

sia intera è che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0.$$

Alla **seconda** di tali domande si risponde subito in negativo: basta considerare la funzione intera:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{.} n!.$$

per osservare che essa non ha zeri in $\mathbb{C}$. Infatti per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $e^z e^{-z} = 1$ e quindi per nessun valore z si può avere $e^z = 0$. Nonostante ciò l'idea originale dei **"polinomi di grado infinito"** non è poi così lontana dal vero. Se a è un qualsiasi numero complesso e $p(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$, in base al **Teorema Fondamentale dell'Algebra**, considerata l'equazione: $p(z) = a$, si ha che essa ha sempre n soluzioni. (ciascuna contata con la propria molteplicità). **Un famoso teorema di Picard**, chiamato anche "**piccolo teorema di Picard**" stabilisce che se $f(z)$ è una funzione intera non costante e $a \in \mathbb{C}$, l'insieme dei valori di a per i quali l'equazione $f(z) = a$ **non ha soluzioni** oppure ne ha un **numero finito** o è **vuoto o consiste di un solo elemento**. Per quanto riguarda la **terza** di tali domande, iniziamo con la seguente osservazione: sia $p(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$; chiamiamo:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |p(z)| \, .$$

Si avrà che:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n| \leqslant \max_{|z|=r} \{|a_0| + |a_1| \, |z| + \cdots |a_1| \, |z|^n\} \, .$$

e dunque:

$$M(r) \leqslant A \, (n+1) \, r^n$$

essendo $A = \max \{|a_0| \, , |a_1| \cdots |a_n|\}$. Allora:

$$\log M(r) = \log \{A \, (n+1) \, r^n\} = \log A + \log (n+1) + n \log r.$$

e quindi:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\log A + \log (n+1) + n \log r}{\log r} = n.$$

In termini **non formali**,possiamo quindi pensare a:

$$\frac{\log M(r)}{\log r}.$$

come ad una espressione **"analitica"** della **rapidità di crescita** del polinomio su **circonferenze di raggio crescente**. Quello che vorremmo fare ora è un ulteriore passo: vorremmo trovare una espressione **"analitica"** che ci consentisse di distinguere fra rapidità di crescita **"nettamente"** diverse. Per chiarire: a tutti è noto dall'**Analisi Reale** che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi spesso si dice che la funzione e^x "cresce **più rapidamente** di qualsiasi potenza di x quando x tende a $+\infty$". E' una quantificazione di questo concetto che ci interessa. Le seguenti considerazioni **euristiche** ci aiuteranno ad ottenere ciò che vogliamo. Osserviamo che, sempre considerando un polinomio di grado $n \geq 1$, quando r è **"grande"** si ha:

$$\log M(r) \approx n \log r.$$

e dunque:

$$\log \log M(r) \approx \log n + \log \log r.$$

per cui:

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = 0.$$

e questo vale per **ogni polinomio** di **qualsiasi grado**. Possiamo quindi pensare allo 0 come ad una **"misura"** della rapidità di crescita della classe di tutti i polinomi. Se ora consideriamo $f(z) = e^z$ si ha:

$$|e^z| = \left| 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right| \leq 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots .$$

e quindi:

$$M(r) = \underset{|z|=r}{Max} |e^z| \leq \underset{|z|=r}{Max} \left(1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots \right) = e^r.$$

D'altra parte:

$$|f(r)| = |e^r| = e^r.$$

e quindi:

$$M(r) = e^r.$$

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{\log r}{\log r}.$$

da cui:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = 1.$$

Se consideriamo poi $f(z) = e^{az+b}$ con $a, b \in \mathbb{C}$ ed $a \neq 0$ si ha che, procedendo come prima, si ottiene:

$$M(r) = |A|\, e^{|a|r}.$$

da cui:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{\log\left(\log|A| + |a|\log r\right)}{\log r}.$$

e quindi:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{\log|a| + \log r + \log\left(1 + \frac{\log|A|}{|a|\log r}\right)}{\log r}.$$

e pertanto:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log|a| + \log r + \log\left(1 + \frac{\log|A|}{|a|\log r}\right)}{\log r} = 1.$$

Ancora, se prendiamo:

$$f(z) = e^{z^2}.$$

troviamo:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = 2.$$

Se poi consideriamo:

$$f(z) = e^{e^z} :$$

allora si ha che:

$$|f(z)| = \left|e^{e^z}\right|.$$

e siccome per ogni $w \in \mathbb{C}$ abbiamo:

$$|e^w| \leqslant e^{|w|}.$$

avremo:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| e^{e^z} \right| \leqslant \max_{|z|=r} \left| e^{|e^z|} \right| \leqslant e^{e^r}.$$

Poichè per $z =$ si ha:

$$f(r) = e^{e^r}.$$

segue che:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\log r} = +\infty.$$

Gli ultimi tre esempi ci mostrano che, non solo la quantità:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

è in grado di operare una distinzione **quantitativa** fra la crescita **polinomiale** e quella **esponenziale** ma di distinguere le **diverse crescite esponenziali** fra di loro. Tale quantità sembra dunque lo strumento adatto per lo studio della rapidità della crescita di una **funzione intera**. Siccome però **non è sempre detto** che:

$$\exists \lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

porremo la seguente:

Definizione 13.7.1. *Si dice **ordine** di una funzione intera il*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \rho.$$

dove $0 \leq \rho \leq +\infty$.

Sono di facile dimostrazione i seguenti teoremi:

Teorema 13.7.2. *La funzione$M(r)$ è **monotona strettamente crescente**.*

Teorema 13.7.3. *La funzione $M(r)$ è una **funzione continua**.*

Fino ad ora abbiamo visto esempi di **funzioni intere** il cui ordine o era costituito da **numeri interi non negativi** oppure era **infinito**. Può essere interessante fornire un esempio esplicito di una funzione intera il cui **ordine** è **finito ma non è intero**.

Esempio 13.7.1. *Sia:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}.$$

E' immediato verificare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)\,(2n+1)} = 0.$$

e che pertanto si tratta di una funzione intera. Poichè:

$$|f(z)| \leqslant 1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z^2|}{4!} + \frac{|z^3|}{6!} + \cdots .$$

avremo che:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant 1 + \frac{r}{2!} + \frac{r^2}{4!} + \frac{r^3}{6!} + \cdots .$$

D'altra parte, se scegliamo $z = r$, si ha:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n)!}.$$

e quindi:

$$M(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n)!}.$$

Osserviamo ora che:

$$e^{\sqrt{r}} = 1 + \frac{\sqrt{r}}{1!} + \frac{r}{2!} + \frac{\sqrt{r^3}}{3!} + \frac{r^2}{4!} + \cdots .$$

e che:

$$e^{-\sqrt{r}} = 1 - \frac{\sqrt{r}}{1!} + \frac{r}{2!} - \frac{\sqrt{r^3}}{3!} + \frac{r^2}{4!} + \cdots .$$

e pertanto:

$$M(r) = \frac{e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}}{2}.$$

Allora, si ha:

$$\log M(r) = \log\left(\frac{e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}}{2}\right) = \log\left(e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}\right) - \log 2.$$

e dunque:

$$\log M(r) = \log\left[e^{\sqrt{r}}\left(1 + e^{-2\sqrt{r}}\right)\right] - \log 2.$$

ovvero:

$$\log M(r) = \log e^{\sqrt{r}} + \log\left[1 + e^{-2\sqrt{r}}\right] - \log 2.$$

e perciò:

$$\log M(r) = \sqrt{r} + \log\left(1 + e^{-2\sqrt{r}}\right) - \log 2.$$

Ne segue che:

$$\log M(r) = \sqrt{r}\left\{1 + \frac{\log\left[1 + e^{-2\sqrt{r}}\right]}{\sqrt{r}} - \frac{\log 2}{\sqrt{r}}\right\}.$$

e dunque:

$$\log\log M(r) = \log\sqrt{r} + \log\left\{1 + \frac{\log\left[1 + e^{-2\sqrt{r}}\right]}{\sqrt{r}} - \frac{\log 2}{\sqrt{r}}\right\}.$$

e pertanto:
$$\log\log M(r) = \frac{1}{2}\log r + o(r).$$
dove:
$$o(r) = \log\left[1 + \frac{\log\left(1+e^{-2\sqrt{r}}\right)}{\sqrt{r}} - \frac{\log 2}{\sqrt{r}}\right].$$
tende a zero per $r \to +\infty$*. Allora:*
$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{1}{2} + o(r).$$

e quindi:
$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{1}{2} = \rho.$$
cioè la funzione intera f *è di ordine* $1/2$.

E' possibile **calcolare** l'ordine di una funzione intera in quanto vale il seguente:

Teorema 13.7.4. *Se:*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

è una ***funzione intera*** *allora:*
$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sup\frac{n\log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

dove si intende che se $a_n = 0$ *da un certo indice in poi.*

Esempio 13.7.2.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2^4} + \frac{z^3}{3^3} + \frac{z^4}{4^8} +$$

nella quale

$$a_n = \begin{cases} 1 & \textit{se } \ n = 0 \\ \dfrac{1}{n^n} & \textit{se } n \textit{ dispari} \\ \dfrac{1}{n^{2n}} & \textit{se } n \geqslant 2 \ n \textit{ pari} \end{cases}$$

è tale per cui:

$$\frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = \frac{n \log n}{\log\left(n^n\right)} = \frac{n \log n}{n \log\left(n\right)} = 1.$$

mentre:

$$\frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = \frac{n \log n}{\log\left(n^{2n}\right)} = \frac{n \log n}{2n \log\left(n\right)} = \frac{1}{2}.$$

se n è pari. Ne segue che:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 1.$$

perciò tale funzione intera di ordine $\rho = 1$.

Un immediato corollario di questo teorema è il seguente:

Corollario 13.7.1. *Una funzione intera è di* ***ordine zero*** *se e solo se*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo infatti che f abbia ordine $\rho = 0$ allora:

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

e quindi:

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \inf \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} \leqslant \lim_{n \to +\infty} \sup \frac{n \log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 0.$$

da cui:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 0.$$
Viceversa, se:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 0.$$
allora:
$$\lim_{n\to+\infty} \sup \frac{n\log n}{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)} = 0.$$
e quindi $\rho = 0$. □

Da questo teorema segue che, in particolare, tutte le funzioni
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
per le quali:
$$|a_n| = \frac{1}{n^{n/\varepsilon_n}}.$$
essendo $(\varepsilon_n)_n$ una qualsiasi successione di numeri reali positivi tale per cui $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ sono funzioni intere di ordine 0 Ad esempio, se prendiamo $\varepsilon_n = n^{-\delta}$ con $\delta > 0$ otteniamo che la funzione
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n^{1+\delta}}}.$$
è di ordine 0.

Nota 13.7.1. *Il concetto di **ordine** di una **funzione intera**, pur essendo capace di distinguere abbastanza bene tra i vari tipi di crescita non è ,per così dire, uno **strumento perfetto**. Ad esempio, mentre è vero che ogni polinomio ha ordine $\rho = 0$ **non è vero il viceversa**. Esistono delle funzioni che potremmo definire "**a crescita intermedia**" per le quali se calcoliamo l'ordine troviamo* *che esso vale* 0 *ma che non sono polinomi. Un esempio è fornito appunto dall'ultima funzione che abbiamo visto. Per le funzioni di* ***ordine finito e positivo*** *si può introdurre un altro numero chiamato* ***tipo*** τ *che consente di studiare con maggior precisione la crescita di una funzione intera. Esso è definito come segue:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \frac{\log M(r)}{r^\rho} = \tau.$$

con $0 \leq \tau \leq +\infty$. *In questa sede non entreremo in dettagli maggiori. Vogliamo solo fare una considerazione di carattere* ***euristico*** *che permetta almeno di capire perchè* τ *è un parametro di maggior "****finezza****" rispetto a* ρ. *Supponiamo di avere due* ***funzioni intere*** *che hanno lo stesso* ρ *ma tali per cui per una di esse si ha, per ogni* r

$$\frac{\log M(r)}{r^\rho} = \tau_1.$$

e per l'altra:

$$\frac{\log M(r)}{r^\rho} = \tau_2.$$

Le due funzioni devono avere crescita diversa perchè il quoziente:

$$\frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

è diverso e ***"misura"*** *la* ***"velocità"*** *con cui cresce il* $\log M(r)$ *in rapporto a* r^ρ. *Tuttavia, siccome:*

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \rho + \frac{\log \tau}{\log r}.$$

si ha che:

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

*per così dire "****non si accorge****" della differenza, in quanto ovviamente:*

$$\lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \lim_{r\to+\infty} \rho + \frac{\log \tau}{\log r} = \rho.$$

Dopo questi pochi cenni agli strumenti per lo studio della crescita delle funzioni intere, che ricordiamo, hanno lo scopo di "**sostituire**" in qualche modo il concetto di grado di un polinomio, citiamo un paio di teoremi che legano tali concetti alla **densità degli zeri** di una **funzione intera**.

Teorema 13.7.5. *Sia data una funzione intera f di* ***ordine finito*** *$\rho \geq 0$ e sia $n(r)$ il numero* [1] *dei suoi zeri appartenenti a*

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leqslant r\} .$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che:

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{n(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e\,(\rho+\varepsilon) .$$

Teorema 13.7.6. *Sia data una* ***funzione intera*** *f di* ***ordine finito*** *$\rho > 0$ e* ***tipo finito*** *$\tau \geq 0$ e sia $n(r)$ il numero dei suoi zeri appartenenti a*

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leqslant r\} .$$

allora:

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{n(r)}{r^{\rho}} \leqslant e\rho\tau.$$

Nota 13.7.2. *Entrambi questi teoremi, stabiliscono dunque* ***limitazioni superiori*** *al numero $n(r)$ degli zeri di f che non si trovano nell'origine. Parlando rozzamente, più è grande l'ordine e più la densità degli zeri può essere grande, e qual'ora l'ordine sia finito la limitazione superiore tiene conto anche del* ***tipo*** *della funzione.*

Nota 13.7.3. *Si noti ancora che nel primo di tali teoremi, non si può prendere $\varepsilon = 0$. Infatti, se si considera la funzione:*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\cdot} 2^n\right)$$

[1] Ovviamente si potrà avere $n(r) = 0$

è possibile dimostrare che essa è una ***funzione intera*** *di ordine* $\rho = 0$ *che ha come zeri i numeri* $z_n = 2^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *e dunque essa ha:*

$$n(r) = \left\lfloor \frac{\log r}{\log 2} \right\rfloor .$$

in $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leqslant r\}$. *e dunque:*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} = \lim_{r\to\infty} n(r) = \infty.$$

Se fosse possibile porre $\varepsilon = 0$ *si otterrebbe invece*

$$\limsup_{r\to\infty} n(r) = 0.$$

Per quanto riguarda la **quarta** domanda la **prima osservazione** che facciamo è che se la successione $(\alpha_n)_n)$ ha un **punto di accumulazione** al finito, il problema è banale in quanto la funzione cercata coincide con la **funzione nulla** per il **Teorema di Unicità**. Dunque si può supporre che:

$$0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots |\alpha_n| \cdots .$$

e che:

$$\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n| = +\infty.$$

La **seconda osservazione** che facciamo è che **non può** certo andare bene una soluzione del tipo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - \alpha_n).$$

perchè questo prodotto **in generale diverge**. Supponendo, per il momento, che nessuno degli α_n sia 0 potrebbe sembrare più ragionevole una soluzione del tipo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

In questo caso, se fissiamo uno z qualsiasi almeno avremo che:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)=1.$$

che è condizione necessaria per la convergenza del prodotto. Tuttavia tale condizione **non è** in generale sufficiente! [2]. Il problema è risolto dal seguente:

Teorema 13.7.7. *Sia $(\alpha_n)_n$ una successione qualsiasi di numeri complessi **non nulli** tale per cui*

$$0<|\alpha_1|\leq|\alpha_2|\leq\cdots|\alpha_n|\cdots.$$

Sia:

$$E_n(z)=\begin{cases}(1-z) & se\ n=0\\ (1-z)\,e^{\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots\frac{z^n}{n}} & se\ \ n\geq 1\end{cases}$$

e sia $(\lambda_n)_n$ una successione di interi non negativi per la quale [3]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|\alpha_n|}\right)^{1+\lambda_n}<+\infty.$$

per ogni $r>0$. Allora la funzione:

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

è intera che ha come zeri esattamente gli α_n $n\geq 1$.

Corollario 13.7.2. *Sia $(\alpha_n)_n$ una successione di numeri complessi tale per cui:*

$$|\alpha_1|=|\alpha_2|=\cdots|\alpha_m|=0.$$

---

[2]La situazione è analoga a quella delle serie: data $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ condizione necessaria per la convergenza è che $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ ma tale condizione non è sufficiente come ben sappiamo dall'esempio della serie armonica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

[3]Almeno una successione di questo tipo esiste: basta prendere $\lambda_n=n$

$m \geq 1$ e

$$0 < |\alpha_{m+1}| \leq |\alpha_{m+2}| \leq \cdots |\alpha_{m+k}| \cdots .$$

per ogni $k \geq 1$. Siano $E_n(z)$ e $(\lambda_n)_n$ come nel teorema precedente. Allora la funzione

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_{\lambda_{m+k}} \left(\frac{z}{\alpha_{m+k}} \right).$$

è intera, ha uno zero in $z = 0$ di molteplicità m e ha come restanti zeri tutti e soli gli α_{m+k} con $k \geq 1$.

Nota 13.7.4. *Se si osservano gli $E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$ si potrà notare che essi consistono di due fattori: uno è*

$$\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

che si annulla per $z = \alpha_n$ e l'altro che è:

$$e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{z^2}{2\alpha_n^2} + \cdots \frac{z^{\lambda_n}}{\lambda_n \alpha_n^{\lambda_n}}}.$$

Quest'ultimo, essendo un esponenziale non introduce nuovi zeri ma serve a far si che il ***prodotto converga****.*

Nota 13.7.5. *Il teorema e il corollario risolvono il problema di costruire una* ***funzione intera*** *con* ***infiniti zeri assegnati****. Cosa accade invece se abbiamo una funzione intera della quale conosciamo gli zeri? Il problema è risolto dal seguente:*

Teorema 13.7.8. *(Weierstrass) Sia f una funzione intera avente uno zero di* ***molteplicità*** *m in $z = 0$ e avente come restanti zeri i termini della successione di numeri complessi $(\alpha_n)_n$)*

$$0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots |\alpha_n| \cdots .$$

e per la quale:

$$\lim_{n \to +\infty} |\alpha_n| = +\infty.$$

Allora esiste una funzione intera $g(z)$ ed un'opportuna successione di interi non negativi $(\lambda_n)_n$ per la quale:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Se, rispetto alle ipotesi del **Teorema di Weierstrass** sappiamo che la funzione f è di **ordine finito** ρ allora vale il seguente:

Teorema 13.7.9. *(Hadamard) Sia f una funzione intera di* ***ordine finito*** *ρ avente uno zero di molteplicità m in $z = 0$ e avente come restanti zeri i termini della successione di numeri complessi $(\alpha_n)_n$)*

$$0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots |\alpha_n| \cdots .$$

e per la quale:

$$\lim_{n \to +\infty} |\alpha_n| = +\infty.$$

allora esiste un ***polinomio*** *$g(z)$ di* ***grado non superiore*** *a ρ per il quale:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

13.8 Analisi complessa e serie trigonometriche

Supponiamo che $F(z)$ sia una funzione analitica per $|z| \leq 1$ e sia:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Supponiamo che si abbia $c_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se poniamo $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ si ha:

$$F(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin n\theta.$$

e dunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta = \operatorname{Re}\left(F(e^{i\theta})\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin n\theta = \operatorname{Im}\left(F(e^{i\theta})\right)$$

Questo fatto può essere utilizzato per sommare **certe serie trigonometriche**.

Esercizio 13.8.1. *Determinare la somma della serie:*

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!}$$

per $0 \leq \theta < 2\pi$.

Soluzione 13.8.1. *Siccome si ha:*

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$, *avremo:*

$$F(e^{i\theta}) = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!}\right) + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!}$$

Ma:

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta} e^{i\sin\theta} =$$

$$= e^{\cos\theta} \left[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right]$$

.

e quindi:

$$\operatorname{Re}\left(F(e^{i\theta})\right) = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta).$$

da cui:

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!} = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta).$$

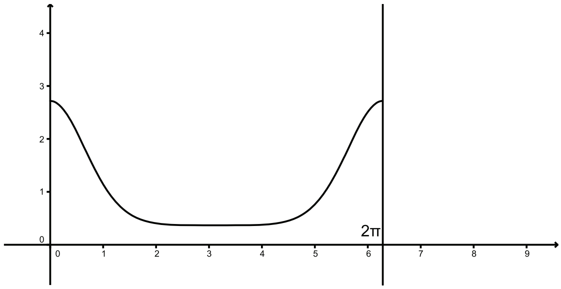

Figura 13.2: Il grafico della somma della serie data.

Esercizio 13.8.2. *Determinare la somma della serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!}$$

Soluzione 13.8.2. *Dall'esercizio precedente si ha:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!} = e^{\cos\theta} \sin(\sin\theta).$$

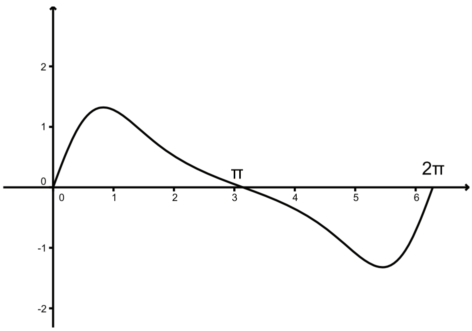

Figura 13.3: Il grafico della somma della serie data.

Esercizio 13.8.3. *Sia* $q \in \mathbb{R}$ *con* $|q| > 1$*. Calcolare la somma della serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos q\theta}{q^n}$$

Soluzione 13.8.3. *Si consideri la funzione:*

$$F(z) = \frac{1}{1 - z/q}.$$

essendo $|z| < |q|$. In questo caso si ha:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{q^n}.$$

Posto allora $z = e^{i\theta}$, essendo $|z| = 1$ si ha che $|z| < |q|$. Quindi:

$$F\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{1 - e^{i\theta}/q}.$$

e dunque:

$$F\left(e^{i\theta}\right) = \frac{q}{q - e^{i\theta}} = \frac{q}{(q - \cos\theta) - i\sin\theta}.$$

e cioè:

$$F\left(e^{i\theta}\right) = q\frac{(q - \cos\theta) + i\sin\theta}{(q - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}.$$

Allora:

$$\mathrm{Re}\left(F\left(e^{i\theta}\right)\right) = q\frac{(q - \cos\theta)}{(q - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}.$$

e quindi:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos q\theta}{q^n} = q\frac{(q - \cos\theta)}{(q - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}.$$

Nota 13.8.1. *Nelle stesse ipotesi dell'esercizio precedente, si ottiene che:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin q\theta}{q^n} = \frac{q\sin\theta}{(q - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}.$$

13.9 Il Teorema di Darboux

Il seguente teorema precisa il **tipo** di discontinuità di una funzione che sia la derivata di un'altra funzione su un intervallo.

Teorema 13.9.1. *(Darboux) Sia: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $[a, b]$ e sia $f'(x)$ è la sua derivata. Sia poi $[c, d] \subset [a, b]$ tale che:*

1. $f'(c) = \lambda_1$
2. $f'(d) = \lambda_2$

con $\lambda_1 < \lambda_2$. Allora, per ogni $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ esiste $x(\lambda) \in [c, d]$ tale che $f'(x(\lambda)) = \lambda$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - \lambda x$$

Essa è derivabile in $[a, b]$ ed inoltre:

- $g(c) = \lambda_1 - \lambda < 0$
- $g(d) = \lambda_2 - \lambda > 0$

Ne segue che, in un intorno destro di c la funzione è localmente decrescente, mentre in un intorno sinistro di d essa è localmente crescente. Poichè $g(x)$ è in particolare continua, ne segue che in $[c, d]$ essa ammette minimo che però non può essere raggiunto nè in c nè in d, per quanto visto sopra. Ne segue che tale minimo è raggiunto in un punto x_0 di (c, d) e quindi in esso si deve avere $g'(x_0) = 0$. Allora:

$$f'(x_0) - \lambda = 0.$$

e dunque il teorema è provato scegliendo $x(\lambda) = x_0$. □

Nota 13.9.1. *La derivata di una funzione derivabile su un intervallo* ***può dunque essere discontinua*** *ma non può avere* ***discontinuità di tipo salto****. In altre parole, esistono funzioni derivabili su un intervallo ma non $\mathcal{C}_1$ su tale intervallo, tuttavia le loro discontinuità sono piuttosto "patologiche".*

Esempio 13.9.1. *Si consideri la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Essa è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ *e si ha:*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

La funzione f' non è continua in $x = 0$ e si tratta di una discontinuità di ***seconda specie****.*

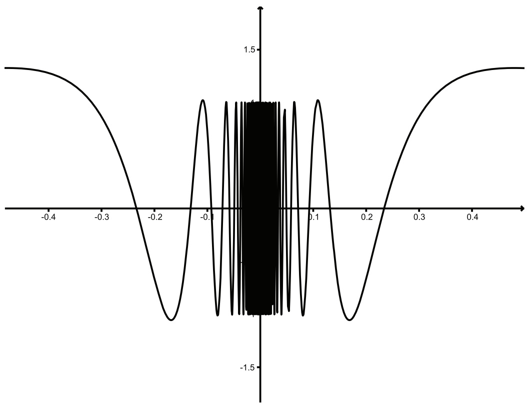

Figura 13.4: Il grafico della funzione f' in un intorno dell'origine.

13.10 Il criterio M di Weierstrass

Il seguente criterio permette di stabilire, in molte situazioni, la convergenza uniforme di una serie di funzioni.

Teorema 13.10.1. *(Weierstrass) Sia $(f_n(z))_n$ una successione di funzioni definite su $A \subseteq \mathbb{C}$ e sia $(M_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale per cui:*

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \quad \forall z \in A, \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 1$$

Se la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty. \tag{13.6}$$

allora la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z). \tag{13.7}$$

converge ***assolutamente*** *e* ***uniformemente*** *su A.*

Dimostrazione. Siccome, per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ si ha:

$$|f_n(z)| \leqslant M_n$$

per ogni $z \in A$, dal **criterio del confronto** segue subito che la serie (13.7) converge **puntualmente** ad una funzione $f(z)$ definita su tutto A. Evidentemente tale convergenza è assoluta. Sia ora $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Poichè la serie (13.6) è convergente si ha che esiste $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tale che:

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} M_n < \varepsilon.$$

Allora, per ogni $z \in A$ si ha che:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) - \sum_{n=1}^{n_0} f_n(z)\right| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |f_n(z)| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} M_n < \varepsilon$$

e quindi la serie (13.7) converge **uniformemente** su A. □

AREE SCIENTIFICO–DISCIPLINARI

AREA 01 – **Scienze matematiche e informatiche**

AREA 02 – Scienze fisiche

AREA 03 – Scienze chimiche

AREA 04 – Scienze della terra

AREA 05 – Scienze biologiche

AREA 06 – Scienze mediche

AREA 07 – Scienze agrarie e veterinarie

AREA 08 – Ingegneria civile e Architettura

AREA 09 – Ingegneria industriale e dell'informazione

AREA 10 – Scienze dell'antichità, filologico–letterarie e storico–artistiche

AREA 11 – Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche

AREA 12 – Scienze giuridiche

AREA 13 – Scienze economiche e statistiche

AREA 14 – Scienze politiche e sociali

Il catalogo delle pubblicazioni di Aracne editrice è su

www.aracneeditrice.it

Finito di stampare nel mese di maggio del 2012
dalla «ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.»
00040 Ariccia (RM) – via Quarto Negroni, 15
per conto della «Aracne editrice S.r.l.» di Roma