

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

*Direttore*

**Luigi MAIERÙ**

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università della Calabria

*Comitato scientifico*

**Aldo BRIGAGLIA**

Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Palermo

**Bruno D'AMORE**

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)  
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

**Luca DELL'AGLIO**

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università della Calabria

**Martha Isabel FANDIÑO PINILLA**

NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)  
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

**Emilia FLORIO**

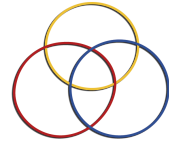
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università della Calabria

**Massimo GALUZZI**

Dipartimento di Matematica  
Università degli studi di Milano

# MATEMATICHE COMPLEMENTARI

## FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA



La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan BROUWER

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegatissime espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

- studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
- ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc. . . );
- proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
- scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
- riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
- proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
- proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.



Luigi Maierù

**A proposito di didattica della matematica**

Un punto di vista





Aracne editrice

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)

Copyright © MMXX  
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

[www.gioacchinoonoratieditore.it](http://www.gioacchinoonoratieditore.it)  
[info@gioacchinoonoratieditore.it](mailto:info@gioacchinoonoratieditore.it)

via Vittorio Veneto, 20  
00020 Canterano (RM)  
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3881-6

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: novembre 2020

*A Palmino,  
stroncato da un male travolgente,  
tutto il nostro affetto*





# Indice

- 11 *Introduzione*
- 15 **Capitolo I**  
*Il contesto della didattica della matematica*  
1.1. Introduzione, 15 – 1.2. La *persona*, soggetto di operazioni proprie, di diritti e di doveri, 21 – 1.3. Dall’oggetto al concetto e alle idee, 27 – 1.4. Le premesse all’attività di insegnamento e di apprendimento, 30 – 1.5. L’attività di insegnamento e di apprendimento, 32 – 1.6. La didattica della matematica, 40 – 1.7. Conclusioni, 43
- 45 **Capitolo II**  
*Alcune pagine storiche offrono spunti all’approccio didattico*  
2.1. Introduzione, 45 – 2.2. Attorno agli insiemi numerici, 48 – 2.3. Attorno alla natura dello zero, 55 – 2.4. La geometria elementare, 58 – 2.5. Il punto, la retta, il piano e lo spazio, 70 – 2.6. Attorno alle rette parallele, 75 – 2.7. Le costruzioni geometriche, 82 – 2.8. Dalla costruzione alla dimostrazione in geometria, 90 – 2.9. L’approccio all’algebra, 95 – 2.10. Le costruzioni geometriche tradotte in linguaggio algebrico, 105 – 2.11. Le costruzioni geometriche nel metodo analitico, 109 – 2.12. Conclusioni, 118
- 121 *Conclusioni*



## Introduzione

Nel corso delle ricerche in storia della matematica mi sono imbattuto in molte pagine che hanno un valore didattico significativo. Il linguaggio in cui è espresso il loro contenuto non è lo stesso di quello adottato oggi negli articoli o libri di ricerca didattica e nei libri finalizzati all'uso didattico.

Ciò avviene per ovvi motivi che si possono sintetizzare nei cambiamenti dei contesti o degli ambienti in cui si sviluppano le idee e si esprime il linguaggio matematico. Le une e le altre sostanziano le istanze didattiche specifiche per ogni contesto nelle diverse epoche storiche. È facile constatare che ogni idea nasce in uno specifico ambiente culturale che condiziona la sua espressione nell'atto di darne comunicazione. Le idee, poi, passano da un secolo all'altro e da un contesto all'altro, assumendo talvolta altre forme ed essendo espresse con altri accenti linguistici.

Nel corso degli anni spesso ho invitato qualche collega impegnato nella ricerca didattica e qualche collega matematico sensibile a questioni didattiche a rileggere con i loro occhi e con la loro sensibilità alcune di queste pagine.

Qualcuno ha seguito la mia sollecitazione.

Così, ad esempio, la lettura di alcune proposizioni della *Quadratura della parabola* di Archimede è avvenuta tenendo conto dell'enunciato delle proposizioni, dando di queste una dimostrazione moderna, cioè redatta nel linguaggio proprio dei cultori di geometria e di analisi matematica. Questa è una lettura strettamente matematica, differente da quella che si dà se si prende in mano lo scritto archimedeo, dando rilievo alle espressioni ivi contenute, ma non è una lettura antistorica o astorica, se si tiene conto che nella sostanza la formulazione delle proposizioni prese in esame non è stata modificata nel corso dei secoli.

Sarebbe certamente arricchente per il mondo matematico se ciò avvenisse per tante altre pagine di storia. Sono convinto che una lettura di questo genere, se diffusa, renderebbe più vario e più vasto l'attuale contesto matematico e darebbe molti stimoli a coloro che sono impegnati quotidianamente sul fronte dell'insegnamento e dello apprendimento.

A conclusione di un lungo percorso di ricerca, che mi ha portato a leggere alcuni scritti del mondo greco antico ed ellenistico, a documentarmi sullo sviluppo della matematica nei paesi di cultura araba, a studiare la trasmissione della matematica lungo il Medioevo, a prendere atto di tante elaborazioni dei matematici del Cinquecento, del Seicento e del Settecento europei, sento il bisogno di guardare all'indietro e riflettere sull'incidenza che lo studio della storia ha avuto sull'attività didattica da me svolta per circa quaranta anni.

Lo studio, l'approfondimento e la riflessione sulle pagine storiche ha messo fortemente e quotidianamente in discussione il modo in cui mi sono collocato rispetto a una classe di scuola secondaria di primo e di secondo grado e universitaria.

Tante di queste pagine mi hanno messo in discussione per la loro attualità, sollecitato a una loro sostanziale riproposizione nel corso delle attività previste dal percorso didattico in cui, in quel momento, sono impegnato.

Questa riproposizione non è avvenuta limitandomi a presentare le notizie attorno alla vita, all'educazione e alla formazione dei personaggi più importanti che segnano questa storia, quanto prefiggendomi di considerare lo sviluppo e la formulazione delle idee e inserendo il tutto nel vivo dell'attività che in quel momento sto svolgendo in classe.

Questa verifica personale, facilmente sperimentabile anche da parte di altri, testimonia la validità e l'efficacia che alcune scelte pagine del passato possono avere nella didattica della matematica anche oggi, qualunque sia il contesto geografico. Questa azione costringe a tradurre, interpretare, riformulare, ..., il contenuto e il metodo nella presentazione di una tematica matematica.

Riflettendo sulla mia attività di ricerca e didattica, ho ripercorso molti momenti in cui, tenendo insieme l'una e l'altra, mi sono docu-

mentato sullo stato dell'arte dell'attuale ricerca in didattica della matematica.

Nel corso degli anni questa istanza mi ha portato a riprendere gli studi di natura filosofica, psicologica e pedagogica che hanno segnato la mia formazione, al fine di comprendere pienamente le proposte formulate dai ricercatori in didattica e prendendo in esame l'attività che l'insegnante e gli allievi svolgono in una classe, al fine di essere consapevole di alcune problematiche nodali, prospettando una eventuale soluzione.

Ciò ha messo e mette in luce il mio punto di vista sulla didattica.

In questo breve scritto raccolgo pensieri e riflessioni, espressi in una forma molto sintetica, pienamente cosciente della grande delicatezza che dovrebbe accompagnare il parlare di insegnamento e di apprendimento.

Ringrazio vivamente le prof.sse G. Fenaroli (Università di Genova) e E. Florio (Università della Calabria) per il tempo dedicatomi e per la pazienza avuta nell'aver messo a confronto punti di vista differenti.



## Il contesto della didattica della matematica

### 1.1. Introduzione

Negli ultimi 40 anni la ricerca in didattica della matematica ha segnato passi consistenti, centrando l'attenzione su problematiche fondamentali, a cominciare da un'attenta riflessione sulla formazione delle idee e sul processo che porta da un *oggetto* di conoscenza alla sua espressione comunicativa, per ipotizzarne la ricaduta nella didattica generale, nella didattica disciplinare e, specificamente, nella didattica della matematica.

Nella loro attività i ricercatori hanno dovuto, prima di tutto, accreditare il loro lavoro, specificando che la Didattica della matematica è da annoverare tra le scienze, possedendo gli elementi che fanno in modo che l'ambito del sapere e delle conoscenze di questa disciplina rispondano ai canoni che la classificano tra le discipline scientifiche.

Il passo successivo è consistito nel fermare l'attenzione sui caratteri che specificano il passaggio dalla considerazione di un *oggetto* del pensiero umano alla sua espressione segnico-linguistica. Ciò ha indotto a specificare come si passa da un *oggetto* al suo *concetto* e alla sua *idea*.

Il terzo passo è stato centrato sull'insegnamento e sullo apprendimento, considerandone prima i caratteri generali (didattica generale), per passare, poi, alla loro specificità (didattica disciplinare) e per riflettere sui caratteri peculiari della didattica della matematica.

Pochi ricercatori hanno affrontato il primo passo. Coloro che lo hanno fatto hanno manifestato una solida cultura generale di base.

Molti hanno preferito concentrarsi sul secondo e sul terzo passo. La maggior parte di questi si sono messi alla sequela di coloro che per primi e in modo competente e esaustivo hanno dato corpo a linee di

ricerca attorno alle quali ancora oggi si lavora. Costoro possono essere considerati come capiscuola, avente ognuno un lungo seguito.

Avendo sotto gli occhi la numerosa produzione espressa dai ricercatori che lavorano in differenti parti del mondo, ho cercato di leggere i diversi studi in forma sinottica, non essendomi stato possibile sintetizzarli in un quadro unitario.

Mi sembra di avere individuato, principalmente, due consistenti filoni di ricerca. Mi sembra che ognuno di questi prenda avvio da un preciso dato ideologico, che costituisce il contesto in cui sono articolati i punti fondamentali della ricerca, alla luce dei quali considerare le possibili conseguenze e implicanze sul fronte della didattica.

In modo molto semplificato, da una parte, l'attenzione è concentrata sul rapporto uno a uno di insegnante e di alunno, studiato nella sua struttura noetica e nelle sue espressioni e situazioni. È riconosciuto un ruolo autonomo all'insegnante e all'alunno, creando, così, un binomio che caratterizza il rapporto didattico, in cui reciprocamente si accettano nei propri ruoli e nella propria individualità. In ragione di ciò il rapporto tra i due assume la forma di un contratto.

Dall'altra, lo studio dei problemi didattici avviene centrando la attenzione sul gruppo-classe come realtà sociale e politica e sulla interazione tra i membri (tra cui vi è l'insegnante) che lo compongono. L'autonomia dell'insegnante sembra essere compromessa nel rapporto alla pari che deve realizzarsi nel gruppo-classe.

In entrambi i filoni di ricerca sono molti gli elementi che vanno opportunamente specificati, anche se non è facile raccoglierli in un unico quadro organico, poiché ambedue risentono di ideologie tra loro inconciliabili, anche non immediatamente palesi agli occhi di un osservatore.

Così, sullo sfondo del primo filone è facile leggere la storia di alcuni secoli del mondo occidentale, in particolare quella che segna i passi del lento formarsi della borghesia e del capitalismo, all'interno dei quali un ruolo centrale ha l'*individuo* (non tutti gli individui nella loro globalità), la cui formazione deve essere curata perché, per la azione di costui la società, lo Stato, le strutture politiche, la famiglia progrediscono e si affermano.



Per secoli presso le famiglie benestanti la formazione è stata curata da un istitutore o da una figura simile, la cui azione era generalmente indirizzata a un figlio, in tanti casi unico o considerato tale.

Da un punto di vista culturale si può parlare di un capitalismo vecchio o nuovo, oggi variamente espresso in forme molte volte dichiarate morenti e costantemente risorgenti.

Il secondo filone è strettamente ancorato al marxismo nelle sue molteplici interpretazioni storico-politiche e culturali e al materialismo dialettico. In un secolo si è assistito a differenti realizzazioni storiche e a variegata istanze di natura culturale, in ognuna delle quali è posto l'accento su uno specifico aspetto, assumendo una particolare connotazione. Ciò ha toccato o tocca tutte le latitudini.

Negli ultimi decenni queste ideologie, soprattutto nella loro espressione storica, entrano in crisi in tutti gli emisferi con differenti accentuazioni, facendo ipotizzare un tempo in cui non avrebbe dovuto trovare posto l'ideologia, di qualunque carattere.

Non sembra, però, che ciò si sia realizzato, registrandosi prassi e convinzioni, facilmente collegabili all'una o all'altra ideologia, che trovano la loro ragione d'essere in scelte personali e culturali in tutti gli emisferi.

In verità, non è ragionevolmente ipotizzabile un tempo senza ideologie né un tempo in cui le vecchie ideologie rimotivino la storia di uno specifico popolo da oggi in avanti.

È opportuno, perciò, domandarsi quale senso continui ad avere una ricerca che segua uno dei due filoni sopra nominati, se in un caso e nell'altro comincia a mancare il supporto ideologico che motiva le scelte e le espressioni culturali.

Se la storia di un popolo è anche la storia di coloro che incarnano i valori di questo popolo, la messa in discussione dei valori che reggono questa storia si riflette nelle storie dei suoi membri, avendo presente che nel termine *storia* racchiudiamo la vita quotidiana che si realizza al di là della cronaca di ogni giorno.

Nel groviglio della messa in discussione di valori e di punti di riferimento che possano indicare la direzione verso cui andare, in diverse parti del mondo cominciano ad emergere convinzioni ed esperienze che, facendo tesoro delle idee maturate ed espresse in tempi precedenti, focalizzano l'attenzione sull'*essere umano* come soggetto di diritti

e di doveri, che prende consapevolezza del proprio essere, del proprio esprimersi e delle proprie relazioni sociali e politiche.

Questo processo, che sembra appena muovere i primi passi, non esprime ancora elementi unificanti le differenti espressioni. È un primo segnale di una speranza e di una convinzione, che passano attraverso l'impegno di fare di tutto, pur nella diversità delle incarnazioni storiche, affinché ogni essere umano viva e si realizzi pienamente in un intreccio profondamente solidale con i suoi simili.

Alcuni segnali sono cristallizzati nella *Dichiarazione dei diritti umani*, approvata dall'Assemblea generale delle Nazioni unite il 10 dicembre 1948, di cui richiamo alcuni elementi.

Dal *Preambolo*:

- il riconoscimento della dignità inerente a tutti i membri della famiglia umana e dei loro diritti eguali e inalienabili costituisce il fondamento della libertà, della pace e della giustizia nel mondo;
- nella Carta dei popoli le Nazioni Unite hanno proclamato di nuovo la loro fede nei diritti fondamentali dell'uomo, nella dignità e nel valore della persona umana, nell'uguaglianza dei diritti degli uomini e delle donne. Si sono dichiarati decisi a favorire il progresso sociale e a instaurare le migliori condizioni di vita nella libertà più grande;
- gli Stati—Membri si sono impegnati ad assicurare, in cooperazione con l'Organizzazione delle Nazioni Unite, il rispetto universale ed effettivo dei diritti dell'uomo e delle libertà fondamentali;
- una concezione comune di questi diritti di libertà è della massima importanza per assolvere pienamente a tale impegno;
- l'Assemblea generale proclama la presente Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo come l'ideale comune da raggiungere da tutti i popoli e da tutte le nazioni, affinché tutti gli individui e tutti gli organi della società, tenendo sempre presente allo spirito questa dichiarazione, si sforzino, attraverso l'insegnamento e l'educazione, di sviluppare il rispetto di tali diritti e libertà e di assicurarne, attraverso misure progressive di ordine nazionale e internazionale, il riconoscimento e l'applicazione universale ed effettiva, sia fra le popolazioni degli Stati—Membri stessi, sia fra quelle dei territori riposti sotto la loro giurisdizione.

*Articolo 1.* Tutti gli esseri umani nascono liberi e uguali in dignità e diritti. Sono dotati di ragione e di coscienza e devono agire in uno spirito di fraternità vicendevole.

*Articolo 2.* Ognuno può valersi di tutti i diritti e di tutte le libertà proclamate nella presente dichiarazione, senza alcuna distinzione di razza, di colore, di sesso, di lingua, di religione, di opinione politica e di qualsiasi altra opinione, di origine nazionale o sociale, che derivi da fortuna, nascita o da qualsiasi altra situazione. Inoltre non si farà alcuna distinzione basata sullo statuto politico, amministrativo o internazionale del paese o del territorio a cui una persona appartiene, sia detto territorio indipendente, sotto tutela o non autonomo, o subisca qualunque altra limitazione di sovranità.

*Articolo 22.* Ogni persona, in quanto membro della società, ha diritto alla sicurezza sociale; ha la facoltà di ottenere soddisfazioni dei diritti economici, sociali e culturali indispensabili alla sua dignità e al libero sviluppo della sua personalità, grazie allo sforzo nazionale e alla cooperazione internazionale, tenuto conto dell'organizzazione e delle risorse dei singoli paesi.

*Articolo 26.* (1) Ogni persona ha diritto all'educazione. Essa dev'essere gratuita, almeno per quanto riguarda l'insegnamento elementare e fondamentale. L'insegnamento elementare è obbligatorio. L'insegnamento tecnico e professionale deve essere diffuso. L'accesso agli studi superiori deve essere aperto a tutti, in piena uguaglianza, in base ai meriti;

(2) l'educazione deve mirare al pieno sviluppo della personalità umana e al rafforzamento del rispetto dei diritti dell'uomo e delle libertà fondamentali. Essa deve favorire la comprensione, la tolleranza e l'amicizia tra tutte le Nazioni e tutti i gruppi razziali o religiosi, come pure lo sviluppo delle attività delle Nazioni Unite per il mantenimento della pace;

(3) i genitori hanno in primo luogo il diritto di scegliere il genere di educazione da impartire ai loro figli.

*Articolo 27.* (1) Ogni persona ha il diritto di partecipare liberamente alla vita culturale della comunità, di godere delle arti e di partecipare al progresso scientifico e ai benefici che ne risultano;

(2) ognuno ha diritto alla protezione degli interessi morali e materiali derivanti da ogni produzione scientifica, letteraria o artistica di cui è autore.

*Articolo 29.* (1) L'individuo ha dei doveri nei confronti della comunità, nella quale è possibile il libero e pieno sviluppo della sua personalità;

(2) nell'esercizio dei suoi diritti e nel godimento delle sue libertà ognuno è soggetto unicamente alle limitazioni stabilite dalla legge, esclusivamente allo scopo di assicurare il riconoscimento e il rispetto dei diritti e delle libertà altrui e di soddisfare alle giuste esigenze della morale, dell'ordine pubblico e del benessere generale in una società democratica;

(3) tali diritti e libertà non potranno in alcun caso esercitarsi in opposizione agli scopi e ai principi delle Nazioni Unite.

Questi punti sono focalizzati sui termini *persona* e *personalità*, su cui dovrebbe essere concentrata l'attenzione di tutti i popoli e di ogni

cittadino. Essi specificano i caratteri propri di ogni *individuo-essere umano*, sottolineando che, in quanto soggetto di diritti e di doveri (individuali e sociali), cioè *persona*, è impegnato primariamente a operare in modo che ognuno sia consapevole del proprio essere ed esprima al meglio la propria *personalità*.

È evidente che la *Dichiarazione* del 1948 non fotografa una situazione di fatto già realizzata nei diversi continenti, quanto una tensione ideale verso cui la politica, pur così diversificata tra i popoli, deve tendere, mettendo in opera quanto necessario per realizzarla.

Constato che, dopo 70 anni, alcuni punti di questo documento non sono ancora pienamente realizzati in molte parti del mondo, poiché sono certo che

- non tutti attribuiscono lo stesso significato ai termini *persona* e *personalità*, pur usando questi termini con grande facilità e, forse, superficialità;
- non tutti hanno riflettuto abbastanza sulle implicanze derivanti dal ritenere e trattare ogni individuo come una *persona*, soprattutto in relazione alla consapevolezza della forza propulsiva della libertà nelle sue variegate espressioni individuali e sociali;
- non a tutti è data la possibilità di ricevere quella *educazione* alla libertà, che fa di noi l'essere *cittadini attivi* di uno stato.

L'elenco può allungarsi con altri punti che toccano la vita, l'attività e la formazione di ogni cittadino.

In ragione di queste constatazioni, anche se personali, la *Dichiarazione* rimane una meta ideale verso cui indirizzare l'impegno culturale e operativo dei cittadini e degli stati.

I dettati di questa *Dichiarazione* sono presi da me come *pretesto* per mettere in chiaro i punti iniziale e finale che dovrebbero motivare una riflessione sulla didattica generale e sulla didattica della matematica. Questa riflessione è espressa dopo avere letto e riletto alcune pagine di storia della matematica, nelle quali, come ho costantemente verificato, la ricerca della matematica è unita alla sua didattica.