

A01

Antonio Caserio

**Problemi di geometria
di fine Ottocento**





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it

info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXXI

Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it

info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20

00020 Canterano (RM)

(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3781-9

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 2021

*A Pasquale e Lucia,
miei genitori*

Il colonnello Rumford all'attendente Miller che ha qualche difficoltà in geometria: «Studiate di più Miller. La geometria è logica e con la logica si vincono le battaglie della vita».

Il tenente Colombo (Universal, 1971)

Alle prime luci dell'alba

Indice

15 *Premessa*

17 Capitolo I

Sessione estiva: esame di licenza 1881-82

1.1. Prova 1, Somma di angoli e formule di prostaferesi, 17 – 1.1.1. *Risoluzione*, 17 – 1.2. Prova 2, Angolo delle tangenti a due cerchi tangenti, 20 – 1.2.1. *Risoluzione trigonometrica*, 20.

23 Capitolo II

Lavori d'esame: estate 1884

2.1. Circonferenza dei nove punti di un triangolo, 23 – 2.1.1. *Costruzione geometrica*, 23 – 2.1.2. *Risoluzione algebrica*, 25 – 2.2. Cono regolare e angolo dell'asse, 29 – 2.2.1. *Risoluzione algebrica*, 29 – 2.3. Area di un piccolo fabbricato, 30 – 2.3.1. *Risoluzione algebrica*, 30 – 2.4. Mediane, lati e area di un triangolo, 32 – 2.4.1 *Risoluzione algebrica e trigonometrica*, 32.

37 **Capitolo III**

Lavori d'esame: estate 1885

3.1. Spigoli di un parallelepipedo, 37 – 3.1.1. *Risoluzione algebrica*, 37 – 3.1.2. *Esempi di risoluzione con dati numerici*, 40 – 3.2. Determinare due angoli, 42 – 3.2.1. *Risoluzione trigonometrica*, 42 – 3.3. Risoluzione di un triangolo dati α , r e $2p$, 44 – 3.3.1. *Risoluzione trigonometrica*, 44 – 3.4. Lati, mediana e angoli di un triangolo, 48 – 3.4.1. *Risoluzione trigonometrica*, 48.

51 **Capitolo IV**

Lavori d'esame: Pasqua 1886

4.1. Cilindro retto vuoto con tronco di cono, 51 – 4.1.1. *Risoluzione algebrica*, 51 – 4.2. Piramide quadrangolare con sfera inscritta, 54 – 4.2.1. *Risoluzione algebrica*, 54 – 4.3. Giardino rettangolare con prato, 56 – 4.3.1. *Risoluzione algebrica*, 56 – 4.4. Lati di un triangolo noti α , r e il rapporto di due segmenti superiori delle altezze, 57 – 4.4.1. *Risoluzione algebrica e trigonometrica*, 57.

61 **Capitolo V**

Lavori d'esame: estate 1886

5.1. Triangolo equilatero con due vertici su rette parallele, 61 – 5.1.1. *Risoluzione trigonometrica*, 61 – 5.1.2. *Costruzione con riga e compasso del triangolo*, 66 – 5.2. Somma delle aree di cerchi tangenti, 68 – 5.2.1. *Risoluzione algebrica*, 68 – 5.3. Risoluzione di un triangolo dati A , r , a , 70 – 5.3.1. *Risoluzione algebrica e trigonometrica*, 70 – 5.4. Segmento sferico e cono inscritto, 75 – 5.4.1. *Risoluzione algebrica*, 75.

81 Capitolo VI

Lavoro d'esame: Roma giugno 1907

6.1. Quadrilatero convesso inscritto in un circolo, 81 – 6.1.1. *Prima risoluzione algebrica*, 81 – 6.1.2. *Seconda risoluzione algebrica*, 85 – 6.1.3. *Limiti del problema*, 85.

89 Capitolo VII

Sànnia – D'Ovidio – Problemi di Planimetria I

7.1. Costruzione di un triangolo dai dati, 89 – 7.1.1. *Costruzione geometrica del triangolo*, 89 – 7.1.2. *Risoluzione trigonometrica*, 90 – 7.2. Cerchio inscritto ed ex-inscritto a un triangolo, 93 – 7.2.1. *Risoluzione trigonometrica*, 93 – 7.2.2. *Una costruzione geometrica del triangolo*, 96 – 7.3. Percorso di una palla d'avorio, 98 – 7.3.1 *Risoluzione trigonometrica*, 98 – 7.4. Trapezio isoscele circoscritto a un cerchio, 102 – 7.4.1. *Risoluzione trigonometrica*, 102.

105 Capitolo VIII

Sànnia – D'Ovidio – Problemi di Planimetria II

8.1. Trapezio isoscele inscritto in un circolo, 105 – 8.1.1. *Risoluzione algebrica*, 105 – 8.2. Circonferenza tagliata da una retta, 108 – 8.2.1 *Risoluzione algebrica*, 108 – 8.2.2. *Massimo e minimo del problema*, 111 – 8.2.3. *Alcuni esempi numerici*, 113 – 8.2.4. *Massimo e minimo del problema sul piano cartesiano*, 115 – 8.3. Triangolo equilatero inscritto in un quadrato, 117 – 8.3.1 *Risoluzione trigonometrica*, 117. 8.4. Parallelogramma inscritto in un triangolo, 119 – 8.4.1. – *Risoluzione algebrica*, 119.

123 Capitolo IX

Sànnia – D'Ovidio – Problemi di Planimetria III

9.1. Costruzione di un trapezio isoscele dai dati, 123 – 9.1.1. *Risoluzione algebrica*, 123 – 9.2. Trapezio isoscele inscritto in un cerchio,

125 – 9.2.1. *Risoluzione trigonometrica*, 125 – 9.2.2. *Primo metodo di risoluzione dell'equazione*, 127 – 9.2.3. *Secondo metodo di risoluzione dell'equazione*, 128 – 9.2.4. *Un esempio concreto del problema*, 128 – 9.3. *Quadrato inscritto in un pentagono regolare*, 131 – 9.3.1. *Risoluzione trigonometrica*, 131 – 9.3.2. *Approfondimento sul lato del pentagono regolare*, 133 – 9.4. *Circonferenze tangenti esternamente*, 135 – 9.4.1. *Risoluzione algebrica*, 135.

139 **Capitolo X***Sànnia – D'Ovidio – Problemi di Stereometria I*

10.1. *Superficie laterale massima di un cilindro*, 139 – 10.1.1. *Risoluzione algebrica*, 139 – 10.2. *Cilindro inscritto in una sfera*, 141 – 10.2.1. *Risoluzione algebrica* – 141 – 10.3. *Massimo volume di un cono retto*, 144 – 10.3.1. *Risoluzione algebrica (parte prima)*, 144 – 10.3.2. *Risoluzione algebrica (parte seconda)*, 147 – 10.4. *Triangolo rettangolo rotante*, 148 – 10.4.1. *Risoluzione trigonometrica*, 148 – 10.4.2. *Un esempio concreto*, 152 – 10.4.3. *Risoluzione dell'equazione sul piano cartesiano*, 154 – 10.4.4. – *Un approfondimento sull'equazione di terzo grado*, 156.

161 **Capitolo XI***Sànnia – D'Ovidio – Problemi di Stereometria II*

11.1. *Volume di una lente biconvessa*, 161 – 11.1.1. *Risoluzione algebrica*, 161 – 11.2. *Cono retto tagliato da un piano*, 163 – 11.2.1. *Risoluzione algebrica* – 163 – 11.3. *Sfera tagliata da un piano*, 166 – 11.3.1. *Risoluzione algebrica*, 166 – 11.3.2. *Casi particolari*, 168 – 11.4. *Cono retto di massimo volume*, 171 – 11.4.1. *Risoluzione algebrica (parte prima)*, 171 – 11.4.2. *Risoluzione algebrica (parte seconda)*, 173 – 11.5. *Sfera secata da due piani paralleli*, 175 – 11.5.1. *Risoluzione algebrica*, 175.

177 *Giulio Pittarelli*195 *Nicola Trudi e Achille Sànnia*

- 205 *Enrico D'Ovidio*
- 229 *Equazione di terzo grado*
- 237 *Bibliografia*

Premessa

Nel corso degli studi superiori e universitari il futuro docente di matematica, oltre a imparare i contenuti e le tecniche proprie della disciplina, fa la conoscenza dei grandi scienziati, autori dei fondamentali teoremi del sapere matematico (Euclide, Archimede, Galileo, Fermat, Cartesio, Newton, Eulero, Gauss, Lagrange etc.) e più raramente di altri noti solo agli specialisti, agli storici o ai ricercatori.

A chi scrive è accaduto di interessarsi negli anni di insegnamento ad alcuni matematici della propria piccola regione. Si tratta dei molisani Nicola Trudi, Achille Sànnia, Enrico D'Ovidio e Giulio Pittarelli al cui ricordo il comune di Campobasso ha dedicato quattro lapidi commemorative, apposte nel viale di ingresso del Convitto - Liceo classico "Mario Pagano", massima istituzione scolastica della Regione per quasi due secoli.

Nella seconda metà dell'Ottocento, pur in modo diverso, Sànnia, D'Ovidio e Pittarelli ebbero a cuore l'insegnamento della Geometria nei Licei e negli Istituti Tecnici.

Sànnia e D'Ovidio come autori del libro *Elementi di Geometria* per i Licei, un testo molto popolare che, dal 1869 al 1918, ebbe quattordici edizioni. Pittarelli, invece, prima come insegnante e poi come professore universitario, è autore di *lavori d'esame* per le sezioni fisico-matematiche degli Istituti Tecnici che egli preparava d'estate, nel suo paese natio, Campochiaro (CB), e che il Ministero gli chiedeva, a volte, con una certa urgenza.

Il libro si compone di diciannove problemi tratti dai lavori d'esame di Pittarelli, di fine Ottocento, e di ventuno problemi,

tratti dal Volume II degli *Elementi di Geometria* di Sànnia e D'Ovidio per i Licei e Istituti Tecnici nella dodicesima edizione del 1908, ma presenti anche nelle edizioni antecedenti.

La curiosità di conoscere quali contenuti e abilità del sapere matematico si richiedevano agli studenti dell'epoca ha portato chi scrive a risolverli e a presentarli nella speranza che siano apprezzati dagli appassionati.

I problemi trattati sono la celebrazione della geometria euclidea come mezzo per esprimersi sinteticamente, correttamente e logicamente in ogni ambito, ma anche dell'utilizzo dell'algebra e della trigonometria necessari per risolverli.

Sessione estiva: esami di licenza 1881 - 82

Sezione fisico - matematica

1.1. Prova 1 – Somma di angoli e formule di prostaferesi

Trovare il valore delle formule

$$\frac{\cotg A + \cotg B + \cotg C}{\cotg A \cdot \cotg B \cdot \cotg C}, \quad \frac{\sen 2A + \sen 2B + \sen 2C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

quando $A + B + C = 90^\circ$, e il valore delle formule

$$\frac{\tg A + \tg B + \tg C}{\tg A \cdot \tg B \cdot \tg C}, \quad \frac{\sen 2A + \sen 2B + \sen 2C}{\sen A \cdot \sen B \cdot \sen C}$$

quando $A + B + C = 180^\circ$.

1.1.1. *Risoluzione*

La prima formula si può anche scrivere così:

$$\frac{\cotg A + \cotg B}{\cotg A \cdot \cotg B \cdot \cotg C} + \frac{1}{\cotg A \cdot \cotg B}. \quad (1.1)$$

Dalla formula di prostaferesi della cotangente

$$\cotg A + \cotg B = \frac{\sen(A+B)}{\sen A \cdot \sen B}$$

sostituendo nella (1.1) si ha:

$$\frac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen} A \cdot \text{sen} B} \cdot \frac{\text{sen} A \cdot \text{sen} B \cdot \text{sen} C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} + \frac{\text{sen} A \cdot \text{sen} B}{\cos A \cdot \cos B}.$$

E da questa, semplificando, si ottiene

$$\frac{\text{sen}(A+B) \cdot \text{sen} C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} + \frac{\text{sen} A \cdot \text{sen} B}{\cos A \cdot \cos B}. \quad (1.2)$$

Da $A + B = 90 - C$, segue

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}(90 - C) = \cos C$$

che sostituita nella (1.2), dopo aver semplificato, fornisce

$$\frac{\text{sen} C + \text{sen} A \cdot \text{sen} B}{\cos A \cdot \cos B}. \quad (1.3)$$

Da $C = 90 - (A + B)$, segue $\text{sen} C = \cos(A + B)$, che sostituita nella (1.3), dà

$$\frac{\cos(A+B) + \text{sen} A \cdot \text{sen} B}{\cos A \cdot \cos B}.$$

E, da cui, infine, per la formula di addizione del coseno si ha:

$$\frac{\cos A \cdot \cos B - \text{sen} A \cdot \text{sen} B + \text{sen} A \cdot \text{sen} B}{\cos A \cdot \cos B} = 1.$$

Si risolve, ora, la seconda formula

$$\frac{\text{sen} 2A + \text{sen} 2B + \text{sen} 2C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}. \quad (1.4)$$

Dalla formula di prostaferesi del seno

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2},$$

posto $p = 2A$ e $q = 2B$, si ha

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B = 2 \operatorname{sen}(A+B) \cdot \cos(A-B).$$

Sostituendo questa nella (1.4), poiché è anche $\operatorname{sen} 2C = 2 \operatorname{sen} C \cos C$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{2 \operatorname{sen}(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \operatorname{sen} C \cos C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} = \\ & = 2 \left[\frac{\operatorname{sen}(A+B) \cdot \cos(A-B)}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} + \frac{\operatorname{sen} C}{\cos A \cdot \cos B} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Poiché $C = 90^\circ - (A+B)$, si ha:

$$\cos C = \cos[90^\circ - (A+B)] = \operatorname{sen}(A+B),$$

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}[90^\circ - (A+B)] = \cos(A+B).$$

Sostituendo queste due uguaglianze nella (1.5), si ricava

$$2 \left[\frac{\operatorname{sen}(A+B) \cdot \cos(A-B)}{\cos A \cdot \cos B \cdot \operatorname{sen}(A+B)} + \frac{\cos(A+B)}{\cos A \cdot \cos B} \right].$$

Da questa semplificando, si trae:

$$2 \left[\frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{\cos A \cdot \cos B} \right]. \quad (1.6)$$

Infine, sviluppando il numeratore della (1.6) mediante le formule di addizione e sottrazione del coseno, si ottiene il risultato:

$$2 \left[\frac{2 \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} \right] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Con procedimenti analoghi ai precedenti si risolvono anche la terza e la quarta formula. La terza ha per risultato 1, la quarta 4.

1.2. Prova 2 – Angolo delle tangenti a due cerchi tangenti

Dati i raggi a , b di due cerchi che si toccano esternamente, trovare il valore dell'angolo compreso tra le loro tangenti comuni.

1.2.1. Risoluzione trigonometrica

Supposto $a > b$, il problema è rappresentato nella Fig. 1.1. Dato che i triangoli AEC e DFC sono simili, essendo rettangoli in E ed F e avendo l'angolo di vertice C in comune, si ha la proporzione $AC:DC = AE:DF$. Da questa, per la proprietà dello scomporre risulta $(AC - DC):DC = (AE - DF):DF$. Da essa, poiché $AE = AB = a$, $DF = BD = b$ e $AC - DC = AD = a + b$, si ha:

$$(a + b):DC = (a - b):b.$$

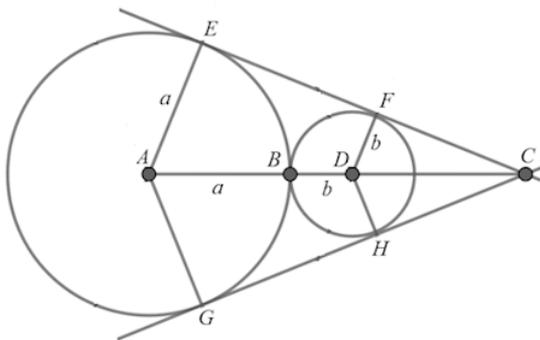


Figura 1.1. I cerchi tangenti del problema.

Da questa proporzione si ricava:

$$DC = \frac{b(a+b)}{a-b}.$$

Dal triangolo rettangolo DFC segue:

$$\operatorname{sen} D\hat{C}F = \frac{DF}{DC} = \frac{b}{\frac{b(a+b)}{a-b}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Infine, poiché l'angolo formato dalle due tangenti è $F\hat{C}H = 2D\hat{C}F$, per la simmetria rispetto alla retta AC , e $D\hat{C}F = \operatorname{arcsen} \frac{a-b}{a+b}$, si ha, per l'angolo richiesto, il valore:

$$F\hat{C}H = 2 \operatorname{arcsen} \frac{a-b}{a+b}.$$