A01

Antonio Caserio

Problemi di geometria di fine Ottocento

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3781-9

I edizione: marzo 2021

A Pasquale e Lucia,
miei genitori

Il colonnello Rumford all'attendente Miller che ha qualche difficoltà in geometria: «Studiate di più Miller. La geometria è logica e con la logica si vincono le battaglie della vita».

Il tenente Colombo (Universal, 1971)
Alle prime luci dell'alba

Indice

Premessa

Nel corso degli studi superiori e universitari il futuro docente di matematica, oltre a imparare i contenuti e le tecniche proprie della disciplina, fa la conoscenza dei grandi scienziati, autori dei fondamentali teoremi del sapere matematico (Euclide, Archimede, Galileo, Fermat, Cartesio, Newton, Eulero, Gauss, Lagrange etc.) e più raramente di altri noti solo agli specialisti, agli storici o ai ricercatori.

A chi scrive è accaduto di interessarsi negli anni di insegnamento ad alcuni matematici della propria piccola regione. Si tratta dei molisani Nicola Trudi, Achille Sànnia, Enrico D'Ovidio e Giulio Pittarelli al cui ricordo il comune di Campobasso ha dedicato quattro lapidi commemorative, apposte nel viale di ingresso del Convitto - Liceo classico "Mario Pagano", massima istituzione scolastica della Regione per quasi due secoli.

Nella seconda metà dell'Ottocento, pur in modo diverso, Sànnia, D'Ovidio e Pittarelli ebbero a cuore l'insegnamento della Geometria nei Licei e negli Istituti Tecnici.

Sànnia e D'Ovidio come autori del libro *Elementi di Geometria* per i Licei, un testo molto popolare che, dal 1869 al 1918, ebbe quattordici edizioni. Pittarelli, invece, prima come insegnante e poi come professore universitario, è autore di *lavori d'esame* per le sezioni fisico-matematiche degli Istituti Tecnici che egli preparava d'estate, nel suo paese natio, Campochiaro (CB), e che il Ministero gli chiedeva, a volte, con una certa urgenza.

Il libro si compone di diciannove problemi tratti dai lavori d'esame di Pittarelli, di fine Ottocento, e di ventuno problemi, tratti dal Volume II degli *Elementi di Geometria* di Sànnia e D'Ovidio per i Licei e Istituti Tecnici nella dodicesima edizione del 1908, ma presenti anche nelle edizioni antecedenti.

La curiosità di conoscere quali contenuti e abilità del sapere matematico si richiedevano agli studenti dell'epoca ha portato chi scrive a risolverli e a presentarli nella speranza che siano apprezzati dagli appassionati.

I problemi trattati sono la celebrazione della geometria euclidea come mezzo per esprimersi sinteticamente, correttamente e logicamente in ogni ambito, ma anche dell'utilizzo dell'algebra e della trigonometria necessari per risolverli.

Capitolo I

Sessione estiva: esami di licenza 1881 - 82

Sezione fisico - matematica

1.1. Prova 1 – Somma di angoli e formule di prostaferesi

Trovare il valore delle formule

$$\frac{cotg\ A + cotg\ B + cotg\ C}{cotg\ A \cdot cotg\ B \cdot cotg\ C}, \qquad \frac{sen\ 2A + sen\ 2B + sen\ 2C}{cos\ A \cdot cos\ B \cdot cos\ C}$$

quando $A + B + C = 90°$, e il valore delle formule

$$\frac{tg\ A + tg\ B + tg\ C}{tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C}, \qquad \frac{sen\ 2A + sen\ 2B + sen\ 2C}{sen\ A \cdot sen\ B \cdot sen\ C}$$

quando $A + B + C = 180°$.

1.1.1. *Risoluzione*

La prima formula si può anche scrivere così:

$$\frac{cotg\ A + cotg\ B}{cotg\ A \cdot cotg\ B \cdot cotg\ C} + \frac{1}{cotg\ A \cdot cotg\ B}. \qquad (1.1)$$

Dalla formula di prostaferesi della cotangente

$$cotg\ A + cotg\ B = \frac{sen\ (A + B)}{sen\ A \cdot sen\ B}$$

sostituendo nella (1.1) si ha:

$$\frac{sen\,(A+B)}{sen\,A \cdot sen\,B} \cdot \frac{sen\,A \cdot sen\,B \cdot sen\,C}{cos\,A \cdot cos\,B \cdot cos\,C} + \frac{sen\,A \cdot sen\,B}{cos\,A \cdot cos\,B}.$$

E da questa, semplificando, si ottiene

$$\frac{sen\,(A+B) \cdot senC}{cos\,A \cdot cos\,B \cdot cos\,C} + \frac{sen\,A \cdot sen\,B}{cos\,A \cdot cos\,B}. \qquad (1.2)$$

Da $A + B = 90 - C$, segue

$$sen\,(A+B) = sen\,(90 - C) = \cos C$$

che sostituita nella (1.2), dopo aver semplificato, fornisce

$$\frac{sen\,C + sen\,A \cdot sen\,B}{cos\,A \cdot cos\,B}. \qquad (1.3)$$

Da $C = 90 - (A + B)$, segue $sen\,C = cos(A + B)$, che sostituita nella (1.3), dà

$$\frac{cos(A+B) + sen\,A \cdot sen\,B}{cos\,A \cdot cos\,B}.$$

E, da cui, infine, per la formula di addizione del coseno si ha:

$$\frac{cos\,A \cdot cos\,B - sen\,A \cdot senB + sen\,A \cdot senB}{cos\,A \cdot cos\,B} = 1.$$

Si risolve, ora, la seconda formula

$$\frac{sen\,2A + sen\,2B + sen\,2C}{cos\,A \cdot cos\,B \cdot \cos C}. \qquad (1.4)$$

Dalla formula di prostaferesi del seno

$$sen\, p + sen\, q = 2sen\frac{p+q}{2} \cdot cos\frac{p-q}{2},$$

posto $p = 2A$ e $q = 2B$, si ha

$$sen\, 2A + sen\, 2B = 2\, sen(A+B) \cdot cos(A-B).$$

Sostituendo questa nella (1.4), poiché è anche $sen\, 2C = 2sen\, C \cos C$, si ottiene

$$\frac{2\, sen(A+B) \cdot cos(A-B) + 2sen\, C\, cos\, C}{cos\, A \cdot cos\, B \cdot \cos C} =$$

$$= 2\left[\frac{sen(A+B) \cdot cos(A-B)}{cos\, A \cdot cos\, B \cdot \cos C} + \frac{sen\, C}{cos\, A \cdot cos\, B}\right]. \qquad (1.5)$$

Poiché $C = 90° - (A+B)$, si ha:

$$\cos C = cos[90° - (A+B)] = sen\,(A+B),$$

$$sen\, C = sen\,[90° - (A+B)] = cos\,(A+B).$$

Sostituendo queste due uguaglianze nella (1.5), si ricava

$$2\left[\frac{sen(A+B) \cdot cos(A-B)}{cos\, A \cdot cos\, B \cdot sen(A+B)} + \frac{cos(A+B)}{cos\, A \cdot cos\, B}\right].$$

Da questa semplificando, si trae:

$$2\left[\frac{cos(A-B) + cos(A+B)}{cos\, A \cdot cos\, B}\right]. \qquad (1.6)$$

Infine, sviluppando il numeratore della (1.6) mediante le formule di addizione e sottrazione del coseno, si ottiene il risultato:

$$2\left[\frac{2\ \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B}\right] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Con procedimenti analoghi ai precedenti si risolvono anche la terza e la quarta formula. La terza ha per risultato 1, la quarta 4.

1.2. Prova 2 – Angolo delle tangenti a due cerchi tangenti

Dati i raggi *a*, *b* di due cerchi che si toccano esternamente, trovare il valore dell'angolo compreso tra le loro tangenti comuni.

1.2.1. *Risoluzione trigonometrica*

Supposto $a > b$, il problema è rappresentato nella Fig. 1.1. Dato che i triangoli *AEC* e *DFC* sono simili, essendo rettangoli in E ed F e avendo l'angolo di vertice *C* in comune, si ha la proporzione $AC: DC = AE: DF$. Da questa, per la proprietà dello scomporre risulta $(AC - DC): DC = (AE - DF): DF$. Da essa, poiché $AE = AB = a$, $DF = BD = b$ e $AC - DC = AD = a + b$, si ha:

$$(a + b): DC = (a - b): b.$$

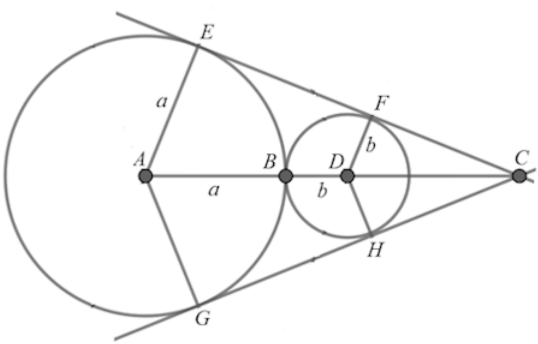

Figura 1.1. I cerchi tangenti del problema.

Da questa proporzione si ricava:

$$DC = \frac{b(a+b)}{a-b}.$$

Dal triangolo rettangolo *DFC* segue:

$$sen\, D\hat{C}F = \frac{DF}{DC} = \frac{b}{\frac{b(a+b)}{a-b}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Infine, poiché l'angolo formato dalle due tangenti è $F\hat{C}H = 2D\hat{C}F$, per la simmetria rispetto alla retta *AC*, e $D\hat{C}F = arcsen\frac{a-b}{a+b}$, si ha, per l'angolo richiesto, il valore:

$$F\hat{C}H = 2\, arcsen\frac{a-b}{a+b}.$$