

A02

Roberto Caimmi

**Il triangolo pitagorico e l'interpretazione
geometrica dei numeri primi**





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it

info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXX

Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it

info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20

00020 Canterano (RM)

(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3726-0

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: ottobre 2020

I risultati qui presentati sono stati ottenuti indipendentemente dall'autore, in assenza di citazioni. L'autore è consapevole di poter aver scalato cime non inviolate, e ringrazia fin d'ora gli esperti in materia che vorranno segnalare i riferimenti bibliografici involontariamente trascurati.

Indice

- 9 *Introduzione*
- 11 *Capitolo I*
Tavola pitagorica
1.1. 2-tavola pitagorica, 11 – 1.2. 3-tavola pitagorica, 14 – 1.3. n -tavola pitagorica, 15.
- 19 *Capitolo II*
Triangolo pitagorico
2.1. 2-triangolo pitagorico, 19 – 2.2. 3-triangolo pitagorico, 27 – 2.3. 4-triangolo pitagorico, 38 – 2.4. n -triangolo pitagorico, 53.
- 63 *Capitolo III*
Politopo pitagorico
3.1. Caso $n = 0$, 65 – 3.2. Caso $n = 1$, 66 – 3.3. Caso $n = 2$, 67 – 3.4. Caso $n = 3$, 68 – 3.5. Caso $n = 4$, 70 – 3.6. Caso generale, 73 – 3.7. Applicazione: scala musicale temperata a 12 note, 76 – 3.8. Applicazione: m -edro regolare inclinato in \mathfrak{R}^{m-1} , 77.
- 81 *Capitolo IV*
Numeri primi
- 87 *Conclusioni*
- 91 *Appendice*
A. Formule di maggiore utilizzo, 91 – B. Proprietà algebriche e geometriche, 92 – C. Determinazione dei numeri primi, 99.
- 101 *Bibliografia*

Introduzione

La geometria euclidea, in quanto idealizzazione dello spazio fisico reale, è forse la più intuitiva tra le scienze matematiche e intimamente connessa alle scienze fisiche, basti pensare alla cristallografia, alla fisica atomica, alla relatività generale. Per tale motivo, l'interpretazione geometrica di un problema potrebbe contribuire alla soluzione, atteso il fatto che le scoperte scientifiche sono dettate dalla sola intuizione, mentre il metodo si utilizza successivamente per la formulazione di una teoria.

In particolare, i numeri primi presentano un elevato numero di questioni ancora irrisolte a dispetto della loro semplicità concettuale, vedasi ad esempio l'ipotesi di Riemann, la congettura di Goldbach, la congettura dei primi gemelli, per cui potrebbe rivelarsi interessante approfondirne l'interpretazione geometrica. Di qui ha preso lo spunto la trattazione esposta nel seguito, ma la via da percorrere si è rivelata particolarmente ardua e per tale motivo ampio spazio è stato dedicato al triangolo pitagorico. Il testo si articola attraverso i seguenti passaggi.

- i. Si ridefinisce la tavola pitagorica come corrispondenza tra codominio e dominio della funzione prodotto, quindi lo si estende dal piano euclideo ordinario, \mathfrak{R}^2 , all'iperpiano euclideo a n dimensioni, \mathfrak{R}^n .
- ii. Si definisce il triangolo pitagorico a partire dalla tavola pitagorica, se ne derivano le proprietà, quindi lo si estende dal piano euclideo ordinario, \mathfrak{R}^2 , all'iperpiano euclideo a n dimensioni, \mathfrak{R}^n .
- iii. Si considera l'estensione del triangolo pitagorico all'iperpiano euclideo a n dimensioni, e la relativa base, come casi particolari di politopi (politopi pitagorici), se ne stabiliscono le proprietà, e si conteggiano i punti a coordinate intere positive, alloggiati in regioni particolari del politopo, con applicazione alla scala musicale temperata a 12 note (estesa a

M note) e al tetraedro regolare inclinato a $(m - 1)$ dimensioni in \mathfrak{R}^m .

- iv. Si presenta un'interpretazione geometrica dei numeri primi in relazione al triangolo pitagorico, con generalizzazione ai numeri $[1/(n - 1)]$ -primi in \mathfrak{R}^n , mostrando chiaramente la ragione per cui l'unità non è un numero primo, e si fornisce un algoritmo, poi tradotto in programma GWBASIC, per la determinazione dei numeri primi in successione a partire da 7.
- v. Si elabora una rappresentazione ridotta del triangolo pitagorico, che intrappola l'infinito dei numeri naturali in una regione limitata del piano.
- vi. Si riformula la congettura di Goldbach in tre differenti versioni: due, in relazione al triangolo pitagorico; una terza, in relazione al semiasse recante i numeri naturali e alla sua controparte orientata in senso opposto; e nella prima alternativa si mostra che il postulato di Bertrand (teorema di Chebyshev) costituisce una condizione necessaria per la validità della congettura di Goldbach.

Gli argomenti sopra elencati sono suddivisi nel testo successivo come segue: tavola pitagorica (i); triangolo pitagorico (ii); politopo pitagorico (iii); numeri primi (iv, v, vi).

Tavola pitagorica

Ci si propone di generalizzare la tavola pitagorica usuale, relativa al prodotto di due fattori e giacente su un piano, alla tavola pitagorica, relativa al prodotto di n fattori e giacente su un iperpiano a n dimensioni. Al fine di una maggiore compattezza della notazione, le quantità definite nel piano saranno precedute dal prefisso, 2 -, e le loro controparti definite nel n -piano saranno precedute dal prefisso, n -. Così ad esempio, si parlerà di 2 -settrice in luogo di bisettrice, e di n -settrice; di 2^2 -ante in luogo di quadrante, e di 2^n -ante; di 2^{-1} -perimetro in luogo di semiperimetro, e di $2^{-(n-1)}$ -perimetro. Nel caso in cui il termine in argomento sia preceduto dall'articolo determinativo, si conviene di utilizzare lo stesso articolo in assenza del prefisso. Così ad esempio, si scriverà il n -piano, i n -triangoli, la n -settrice.

Per prima cosa, ridefiniamo la 2 -tavola pitagorica.

1.1. 2 -tavola pitagorica

In relazione a un sistema di assi cartesiani ortogonali in \mathfrak{R}^3 , sia $(Ox_1x_2x_3)$, si consideri la funzione a 2 variabili, $x_3 = |x_1x_2|$, definita su tutto il dominio costituito dal 2 -piano principale, (Ox_1x_2) . In tali condizioni, il valore minimo si ottiene in corrispondenza agli assi coordinati, $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$, e a parità di $(|x_1| + |x_2|)$ il valore massimo si ottiene in corrispondenza a $|x_1| = |x_2|$, conformemente al fatto che la 2 -area di un 2 -quadrato è maggiore della 2 -area di ogni 2 -rettangolo con pari 2^{-1} -perimetro, $p_2 = |x_1| + |x_2|$, che a sua volta è una funzione monotona della quadratura, $q_2 = \min(x_1, x_2) / \max(x_1, x_2)$, e si annulla quando il 2 -rettangolo degenera in un 1 -rettangolo, $\min(x_1, x_2) = 0$. Conformemente a quanto detto, i punti del 2 -piano principale, (Ox_1x_2) , di coordinate intere, (i_1, i_2) , costituiscono un sottodominio discreto della funzione in esame, cui si associa il sottocodominio discreto, $|i_1i_2|$.

Premesso questo, limitiamo l'attenzione al 2^2 -ante positivo del 2-piano principale, (Ox_1x_2) , dove al punto, (i_1, i_2) , viene associato il numero naturale, i_1i_2 , conformemente alla rappresentazione di Fig. 1.

La generica semiretta orizzontale, $x_1 = i_1$, e la generica semiretta verticale, $x_2 = i_2$, altro non sono che le tabelline del i_1 e del i_2 , rispettivamente. La 2-settrice del 2^2 -ante positivo, $x_1 = x_2$, reca in successione i 2-quadrati perfetti a partire dallo 0.

Il 1-triangolo di vertici, $[0, (k + 1)]$, $[(k + 1), 0]$, normale alla 2-settrice del 2^2 -ante positivo, reca in sé le 2-aree dei 2-rettangoli perfetti con 2^{-1} -perimetro, $p_2 = k + 1$, che sono nulle sugli assi coordinati e quindi crescono, simmetricamente rispetto a detta 2-settrice, fino a raggiungere il valore massimo, corrispondente a un 2-quadrato perfetto sulla 2-settrice stessa, oppure al 2-rettangolo perfetto di 2-area immediatamente inferiore, in prossimità di essa da ambo le parti. La simmetria deriva dal fatto che i 2-rettangoli perfetti con la lunghezza della base e dell'altezza scambiate hanno la stessa 2-area.

Le semirette parallele alla 2-settrice del 2^2 -ante positivo, $x_2 = x_1 \mp \ell$, recano in sé le 2-aree dei 2-rettangoli perfetti con 2^{-1} -perimetro, $2i_1 \mp \ell$.

Le considerazioni esposte si possono visualizzare in Fig. 2 dove i prodotti, costituenti le coordinate dei punti del codominio, sono proiettati sui punti del dominio, le cui coordinate sono date da ciascun fattore, in altri termini la 2-tavola pitagorica.

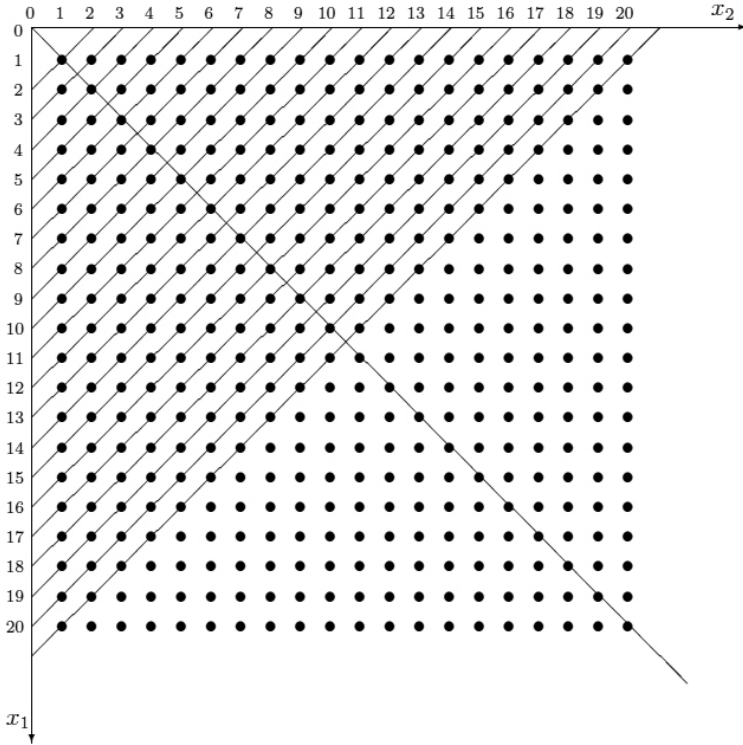


Figura 1.1. Rappresentazione della 2-tavola pitagorica come una corrispondenza tra i punti del codominio della funzione, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = i_1 i_2$, e i punti del dominio, $(x_1, x_2) = (i_1, i_2)$, dove l'orientazione degli assi si conforma alla notazione usuale della tavola pitagorica. I 1-triangoli di vertici, $[0, (k+1)], [(k+1), 0], 2 \leq k+1 \leq 21$, normali alla 2-settrice del 2^2 -ante positivo, denotano il luogo dei punti, dove il 2^{-1} -perimetro del 2-rettangolo perfetto, con lunghezza dei lati data da ciascun fattore del prodotto, è costante. I 1-triangoli del tipo considerato, contenenti elementi non contemplati dalla figura, non sono stati tracciati. La 2-settrice del 2^2 -ante positivo reca la successione dei 2-quadrati perfetti.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	x_2	
0																						
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40		
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60		
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80		
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100		
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120		
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140		
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160		
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180		
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200		
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220		
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240		
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260		
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280		
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300		
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320		
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340		
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360		
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380		
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400		

Figura 1.2. Rappresentazione della 2-tavola pitagorica come corrispondenza tra i punti del codominio della funzione a dominio discreto, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = i_1 i_2$, e i punti del dominio, $(x_1, x_2) = (i_1, i_2)$, dove i_1, i_2 , sono numeri naturali e l'orientazione degli assi si conforma alla notazione usuale della 2-tavola pitagorica. I r -triangoli di vertici, $(0, k+1)$, $(k+1, 0)$, $2 \leq k+1 \leq 2\text{r}$, normali alla 2-settrice del 2^2 -ante positivo, denotano il luogo dei punti, dove il 2^{-1} -perimetro del 2-rettangolo perfetto, di cui la lunghezza dei lati è data da ciascun fattore del prodotto, è costante. La 2-settrice del 2^2 -ante positivo reca la successione dei 2-quadrati perfetti (in grassetto).

1.2. 3-tavola pitagorica

In relazione a un sistema di assi cartesiani ortogonali in \mathfrak{R}^4 , sia $(Ox_1 x_2 x_3, x_4)$, si consideri la funzione a 3 variabili, $x_4 = |x_1 x_2 x_3|$, definita su tutto il dominio costituito dal 3-piano principale, $(Ox_1 x_2 x_3)$. In tali condizioni, il valore minimo si ottiene in corrispondenza agli assi coordinati, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$,

e a parità di $(|x_1| + |x_2| + |x_3|)$ il valore massimo si ottiene in corrispondenza a $|x_1| = |x_2| = |x_3|$, conformemente al fatto che la 3-area di un 3-quadrato è maggiore della 3-area di ogni 3-rettangolo di pari 2^{-2} -perimetro, $p_3 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, che a sua volta è una funzione monotona della quadratura, $q_3 = \min(x_1, x_2, x_3) / \max(x_1, x_2, x_3)$, e si annulla quando il 3-rettangolo degenera in un 2-rettangolo e a maggior ragione in un 1-rettangolo, $\min(x_1, x_2, x_3) = 0$. Conformemente a quanto detto, i punti del 3-piano principale, $(Ox_1x_2x_3)$, di coordinate intere, (i_1, i_2, i_3) , costituiscono un sottodominio discreto della funzione in esame, cui si associa il sottocodominio discreto, $|i_1i_2i_3|$.

Premesso questo, limitiamo l'attenzione al 2^3 -ante positivo del 3-piano principale, $(Ox_1x_2x_3)$, dove al punto, (i_1, i_2, i_3) , viene associato il numero naturale, $i_1i_2i_3$, e la rappresentazione che ne risulta può considerarsi alla stregua di una tavola pitagorica a 3 dimensioni, o 3-tavola pitagorica. I piani principali, $x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_1 = x_4 = 0$, alloggiano ciascuno una 2-tavola pitagorica. La 3-settrice del 2^3 -ante positivo, $x_1 = x_2 = x_3$, reca in successione i 3-quadrati perfetti a partire dallo 0.

Il 2-triangolo equilatero di vertici, $[0, 0, (k + 1)]$, $[0, (k + 1), 0]$, $[(k + 1), 0, 0]$, giacente sul 2-piano, $x_1 + x_2 + x_3 = k + 2$, normale alla 3-settrice del 2^3 -ante positivo, reca in sé le 3-aree dei 3-rettangoli perfetti con 2^{-2} -perimetro, $p_3 = k + 2$, che sono nulle sugli assi coordinati e sui 2-piani principali, quindi crescono simmetricamente rispetto a detta 3-settrice fino a raggiungere il valore massimo, in corrispondenza a un 3-quadrato perfetto sulla 3-settrice stessa oppure al 3-rettangolo perfetto di 3-area immediatamente inferiore in prossimità di essa da ogni parte. La simmetria deriva dal fatto che i 3-rettangoli perfetti con la lunghezza delle basi e dell'altezza scambiate hanno la stessa 3-area.

Le semirette parallele alla 3-settrice del 2^3 -ante positivo, $x_3 = x_2 \mp \ell_2 = x_1 \mp \ell_1$, recano in sé le 3-aree dei 3-rettangoli perfetti con 2^{-2} -perimetro pari a $3i_1 \mp \ell_1 \mp \ell_2$.

1.3. n-tavola pitagorica

In relazione a un sistema di assi cartesiani ortogonali in \mathfrak{R}^{n+1} , sia $(Ox_1x_2...x_{n+1})$, si consideri la funzione a n variabili, $x_{n+1} = |x_1x_2...x_n|$, definita su tutto il dominio costituito dal n -piano principale, $(Ox_1x_2...x_n)$. In tali condizioni, il valore minimo si ottiene in corrispondenza agli assi coordinati, $x_2 = x_3 = \dots = x_{n+1} = 0$, $x_1 = x_3 = \dots = x_{n+1} = 0, \dots$,

$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0$, e a parità di $(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)$ il valore massimo si ottiene in corrispondenza a $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, conformemente al fatto che la n -area di un n -quadrato è maggiore della n -area di ogni n -rettangolo di pari $2^{-(n-1)}$ -perimetro, $p_n = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, che a sua volta è una funzione monotona della quadratura, $q_n = \min(x_1, x_2, \dots, x_n) / \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e si annulla quando il n -rettangolo degenera in un $(n-1)$ -rettangolo e a maggior ragione in un $(n-2)$ -rettangolo, ..., in un 1 -rettangolo, $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Conformemente a quanto detto, i punti del n -piano principale, $(Ox_1x_2\dots x_n)$, di coordinate intere, (i_1, i_2, \dots, i_n) , costituiscono un sottodominio discreto della funzione in esame, cui si associa il sottocodominio discreto, $|i_1i_2\dots i_n|$.

Premesso questo, limitiamo l'attenzione al 2^n -ante positivo del n -piano principale, $(Ox_1x_2\dots x_n)$, dove al punto, (i_1, i_2, \dots, i_n) , viene associato il numero naturale, $i_1i_2\dots i_n$, e la rappresentazione che ne risulta può considerarsi alla stregua di una tavola pitagorica a n dimensioni, o n -tavola pitagorica. I piani principali, (Ox_jx_k) , $1 \leq j < k \leq n$, alloggiano ciascuno una 2 -tavola pitagorica. La n -settrice del 2^n -ante positivo, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, reca in successione i n -quadrati perfetti a partire dallo 0.

Il $(n-1)$ -triangolo equilatero di vertici, $[0, 0, \dots, (k+1)]$, $[0, \dots, (k+1), 0]$, ..., $[(k+1), 0, \dots, 0]$, giacente sul $(n-1)$ -piano, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k + (n-1)$, normale alla n -settrice del 2^n -ante positivo, reca in sé le n -aree dei n -rettangoli perfetti con $2^{-(n-1)}$ -perimetro, $p_n = k + (n-1)$, che sono nulle sugli assi coordinati, sui 2 -piani principali, ..., sui $(n-1)$ -piani principali, quindi crescono simmetricamente rispetto a detta n -settrice fino a raggiungere il valore massimo in corrispondenza a un n -quadrato perfetto sulla n -settrice stessa oppure al n -rettangolo perfetto di n -area immediatamente inferiore in prossimità di essa da ogni parte. La simmetria deriva dal fatto che i n -rettangoli perfetti con la lunghezza delle basi e dell'altezza scambiate hanno la stessa n -area.

Le semirette parallele alla n -settrice del 2^n -ante positivo, $x_n = x_{n-1} \mp \ell_{n-1} = \dots = x_2 \mp \ell_2 = x_1 \mp \ell_1$, recano in sé le n -aree dei n -rettangoli perfetti con $2^{-(n-1)}$ -perimetro pari a $ni_1 \mp \ell_1 \mp \ell_2 \mp \dots \mp \ell_{n-1}$.

Ciascun bordo della 2 -tavola pitagorica può considerarsi come 1 -tavola pitagorica, in quanto tale recante i prodotti costituiti da un solo fattore, che coincide con la tabellina dell'uno. Lo zero (inteso come insieme vuoto) può considerarsi come 0 -tavola pitagorica, in

quanto tale recante i prodotti costituiti da nessun fattore.

In definitiva, la tavola pitagorica può generalizzarsi da 2 fattori a n fattori, $n \geq 0$, denominandosi n -tavola pitagorica. L'interpretazione geometrica si effettua in un n -piano, dove si proiettano i valori della funzione a dominio discreto, $f(i_1, i_2, \dots, i_n) = i_1 i_2 \dots i_n$, limitatamente al 2^n -ante positivo. La 0-tavola pitagorica è costituita dallo 0 (inteso come insieme vuoto). La 1-tavola pitagorica è costituita dalla successione dei numeri naturali.

Triangolo pitagorico

Ci si propone di generalizzare il triangolo pitagorico, deducibile dalla tavola pitagorica usuale e giacente su un piano, al n -triangolo pitagorico, deducibile dalla n -tavola pitagorica e giacente su un n -piano. Per definizione, la n -tavola pitagorica alloggia le n -aree dei n -rettangoli perfetti di base e altezza arbitrarie ma prefissate, che possono considerarsi come n -uple ordinate di fattori costituiti da numeri naturali, denominate nel seguito n -prodotti. In primo luogo, definiamo il 2-triangolo pitagorico e ne evidenziamo le principali caratteristiche.

2.1. 2-triangolo pitagorico

In relazione alla 2-tavola pitagorica rappresentata in Fig. 2, si effettui una rotazione rigida del sistema di assi cartesiani ortogonali, (Ox_1x_2) , in modo tale da allineare la 2-settrice del 2^2 -ante positivo con la verticale e configurare i semiassi coordinati positivi a tetto spiovente. La 2-tavola pitagorica si dispone pertanto su una struttura a 2-triangolo, delimitata ai lati e con la base indeterminata.

Si definisce (2-)triangolo pitagorico di ordine, k , il (2-)triangolo rettangolo isoscele con il numero naturale, 1 , in corrispondenza al vertice retto e il numero naturale, k , in corrispondenza ai restanti vertici, dove la base è costituita dall'ipotenusa e i lati obliqui sono costituiti dai cateti.

La base del 2-triangolo pitagorico di ordine, ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, costituisce una sottobase del 2-triangolo pitagorico di ordine, k . La sottobase, ℓ , reca le 2-aree dei 2-rettangoli perfetti con 2^{-1} -perimetro pari a $(\ell + 1)$, disposte simmetricamente rispetto all'altezza, che a sua volta reca la successione dei 2-quadrati perfetti.

Le sottoaltezze, (j_1, j_2) , disposte simmetricamente e parallelamente rispetto all'altezza, recano la successione dei 2-rettangoli perfetti

con il 2^{-1} -perimetro incrementato di due unità procedendo dall'alto verso il basso. I sottolati, simmetrici rispetto all'altezza e intersecantisi su di essa, recano le tabelline del numero iniziale, alloggiato su ciascun lato. Il 2-triangolo pitagorico di ordine, $k = 16$, è riprodotto in Fig.3.

Il 2-triangolo pitagorico di ordine, k , presenta le seguenti proprietà.

- i. Il numero totale di sottobasi è pari a k .
- ii. Il numero totale di sottoaltezze è pari al numero di 2-prodotti alloggiati sulle 1-facce laterali (lati obliqui).
- iii. La sottobase, ℓ , alloggia ℓ 2-aree, che corrisponde al numero di coppie di numeri naturali non nulli, la cui somma è pari a $(\ell + 1)$.
- iv. Le sottoaltezze, (j_1, j_2) , che si dipartono dalla frontiera della sottobase, $j = j_1 + j_2 - 1$, alloggiano $\{1 + \text{Int}[(\ell - j)/2]\}$ 2-aree ciascuna, in corrispondenza della sottobase, ℓ .
- v. Le sottoaltezze si intersecano (nel senso che hanno una 2-area in comune) con le sottobasi a 2 a 2, a partire dalla sottobase donde si origina la sottoaltezza. Ne discende che sottoaltezze dispari si intersecano con sottobasi dispari e sottoaltezze pari si intersecano con sottobasi pari.
- vi. La generica 2-area è definita dall'intersezione della generica sottobase, ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, e della generica sottoaltezza, (j_1, j_2) , $\min(j_1, j_2) = 1$, $\max(j_1, j_2) = j \leq \ell$, o equivalentemente dalle coordinate, (ℓ, j_1, j_2) .
- vii. La generica 2-area, (ℓ, j_1, j_2) , si trova frapposto, in relazione alla 1-faccia laterale più vicina, lo stesso numero di 2-aree lungo la sottobase, ℓ , e la sottoaltezza, (j_1, j_2) .