

LE MATRICI

Si definisce matrice di tipo m, n una tabella ordinata di $m \cdot n$ elementi ordinati in m righe e n colonne:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Gli elementi di una matrice si denotano con due indici, il primo indica la riga a cui appartiene l'elemento, il secondo la colonna.

ESEMPIO

La matrice $A_{5,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice di tipo 5,4. L'elemento $a_{1,2}$, cioè l'elemento della prima riga e della seconda colonna è 0; l'elemento $a_{2,1}$, cioè l'elemento della seconda riga e della prima colonna, è 3, e così via.

Una matrice di tipo $A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ si indica anche con $A_{m,n} = (a_{i,j})$, con

$i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Matrici di tipo $m, 1$, cioè formate da una sola colonna, si chiamano matrici colonna o vettori colonna (o, più semplicemente, vettori), il numero m si chiama dimensione del vettore; quelle di tipo $1, n$, cioè formate da una sola riga, si chiamano matrici riga o vettori riga (o, più semplicemente, vettori).

Il numero n si chiama dimensione del vettore. Si ha:

$$A_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \text{ è una matrice colonna (vettore),}$$
$$A_{1,n} = (a_{1,1} \quad \dots \quad a_{1,n}) \text{ è una matrice riga (vettore).}$$

1. Operazioni tra matrici

Quando non sarà necessario esplicitare il tipo di matrice, indicheremo la matrice $A_{m,n}$ semplicemente con A .

a) Somma tra matrici

Siano $A_{m,n} = (a_{i,j})$ e $B_{m,n} = (b_{i,j})$ due matrici dello stesso tipo, si definisce somma tra le due la matrice $C_{m,n} = (c_{i,j})$ con $(c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j})$ dello stesso tipo i cui elementi si ottengono sommando gli elementi di stesso posto delle due matrici.

ESEMPIO

Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

La matrice $A + B = C$ è $C = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & -1+1 \\ 3+2 & 4-2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

mentre $A - B = D = \begin{pmatrix} 1-0 & 0-0 & -1-1 \\ 3-2 & 4+2 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice $0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ è detta matrice nulla.

Valgono le seguenti proprietà:

- a₁) $A + B = B + A$ proprietà commutativa;
- a₂) $(A + B) + C = A + (B + C)$ proprietà associativa;
- a₃) $A + 0 = 0 + A = A$ esiste l'elemento neutro
- a₄) per ogni matrice A esiste la matrice $-A$ tale che $A - A = 0$ esiste l'opposto

b) *Prodotto di uno scalare per una matrice*

Data la matrice $A_{m,n} = (a_{i,j})$ e il numero reale k , si definisce prodotto dello scalare k per la matrice $A_{m,n} = (a_{i,j})$ la matrice $B_{m,n} = kA_{m,n} = (ka_{i,j})$ cioè la matrice che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi per lo scalare.

ESEMPIO

Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $k=2$, $B = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

c) *Prodotto scalare tra vettori*

Dati i vettori $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, di stessa dimensione, si definisce prodotto scalare tra i due il numero $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i$.

ESEMPIO

Esempio: essendo $v = (1, 0, -1, 2)$ e $w = (0, -3, 1, 3)$, segue $v \cdot w = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 5$.

d) *Prodotto righe per colonne*

Siano $A_{m,n} = (a_{i,j})$ e $B_{n,t} = (b_{i,j})$ due matrici, la prima di tipo m, n e la seconda di tipo n, t , cioè il

numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.

Si definisce prodotto righe per colonne la matrice $C_{m,t} = (c_{i,j})$ i cui elementi sono dati dai prodotti scalari tra i vettori riga della matrice $A_{m,n} = (a_{i,j})$ con i vettori colonna della matrice $B_{n,t} = (b_{i,j})$, più precisamente. Per ottenere l'elemento $c_{i,j}$ della matrice $C_{m,t} = (c_{i,j})$ si considera la riga i -esima della matrice $A_{m,n} = (a_{i,j})$, essa può essere vista come il seguente vettore (riga) $R_{i,n} = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$, la colonna j -esima della matrice $B_{n,t} = (b_{i,j})$, essa può essere vista come il seguente vettore (colonna) $C_{n,j} = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \dots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$, l'elemento

$c_{i,j}$ è uguale al prodotto scalare tra questi due vettori, quindi $c_{i,j} = R_{i,n} \cdot C_{n,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

ESEMPIO

Esempio $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, effettuiamo il prodotto $A_{2,3} \cdot B_{3,3} = C_{2,3}$:

$$c_{1,1} = R_{1,n} \cdot C_{n,1} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} b_{k,1} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4,$$

$$c_{1,2} = R_{1,n} \cdot C_{n,2} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} b_{k,2} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$c_{1,3} = R_{1,n} \cdot C_{n,3} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} b_{k,3} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 3, \quad \text{la matrice richiesta è } C_{2,3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_{2,1} = R_{2,n} \cdot C_{n,1} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} b_{k,1} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 9,$$

$$c_{2,2} = R_{2,n} \cdot C_{n,2} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} b_{k,2} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$c_{2,3} = R_{2,n} \cdot C_{n,3} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} b_{k,3} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 1.$$

Nel prodotto righe per colonne vale proprietà associativa, quindi $(AB)C = A(BC)$ ma non vale la proprietà commutativa. Infatti, se è possibile effettuare il prodotto AB (il numero di colonne della prima deve essere uguale al numero di righe della seconda), non è detto si possa fare anche il prodotto BA . Nell'esempio precedente il prodotto BA non è possibile perché il numero di colonne di B non è uguale al numero di righe di A . Vediamo, con un esempio, che anche se è possibile effettuare entrambi i prodotti, AB e BA , non è detto che $AB = BA$.

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Verificare che $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mentre $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Una matrice di tipo m, m , cioè tale che il numero di righe coincide col numero di colonne si dice matrice quadrata di ordine m .

LE SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

INTRODUZIONE

Ogni qualvolta tra l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ si stabilisce un'applicazione f , è comodo indicare con

$$a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

gli elementi di $\mathbb{R}$ che sono in f immagini rispettivamente di:

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (2)$$

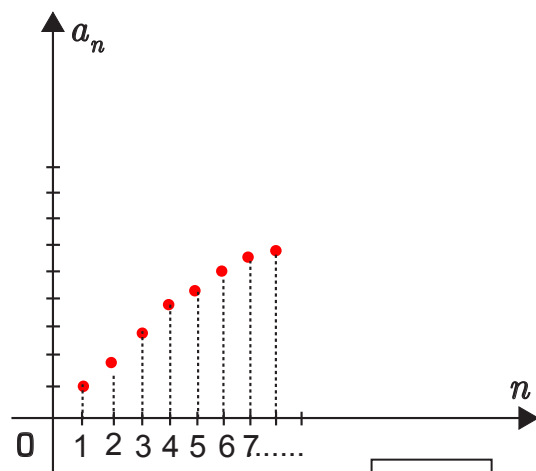


Figura 6

Quando gli elementi di $\mathbb{R}$ sono disposti come in [1] noi diremo che formano una successione di numeri reali e la indicheremo semplicemente a questo modo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (3)$$

Ovviamente la stessa [2] forma una successione, la quale diciamo, **successione fondamentale**.

Il valore $n \in \mathbb{N}$ dicesi **rango** della successione, mentre $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ si chiamano i **termini della successione**.

Spesso si usa rappresentare una successione come in figura 6.

Sull'asse delle ascisse troviamo i valori degli indici $n \in \mathbb{N}$, mentre sulle ordinate troviamo i corrispondenti valori $a_n \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO

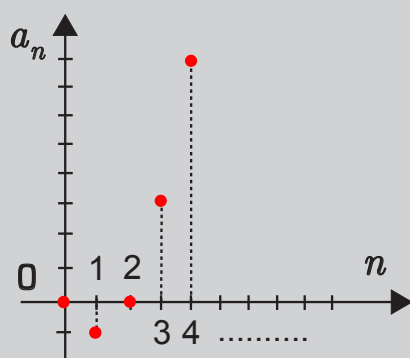


Figura 7

Volendo rappresentare graficamente la successione di termine generale: $(a_n = n^2 - 2n)$, essendo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0, -1, 0, 3, 8, \dots$$

si ottiene la figura 7 di facile interpretazione.

È bene osservare che un insieme arbitrario di numeri reali non è, in generale, una successione; una successione, invece, è sempre un insieme di numeri reali.

ESEMPIO

Il seguente insieme di numeri reali:

$$\mathfrak{I} = \left\{ \sqrt{3}, \log_2 5, 6, 9, 10, \sqrt{2+\sqrt{5}}, \log_5 \frac{1}{2+\sqrt{3}}, \dots \right\}$$

non è una successione nel senso da noi dato, in quanto non esiste alcuna applicazione che ponga in corrispondenza biunivoca l'insieme $\mathbb{N}$ con l'insieme $\mathfrak{I}$.

Dicesi **successione a termini costanti** o, semplicemente, **una successione costante** se $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = k = \dots \quad (4)$$

ESEMPIO

Posto, ad esempio, $a_n = (\sqrt{2} - 2) \in \mathbb{R}$, la successione:

$$a_0 = (\sqrt{2} - 2), a_1 = (\sqrt{2} - 2), a_2 = (\sqrt{2} - 2), \dots, a_n = (\sqrt{2} - 2), \dots$$

risulta essere a termini costanti.

Si definisce **successione estratta** dalla [1] una successione costituita da infiniti termini della [1], disposti nell'ordine in cui si presentano nella [1] stessa, cioè una successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo:

$$b_0 = a_{i_0}, b_1 = a_{i_1}, b_2 = a_{i_2}, \dots, b_n = a_{i_n}, \dots \quad (5)$$

ESEMPIO

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots$ una successione. Una successione estratta sarà del tipo:

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = 6, 12, 18, 24, \dots \text{ dove è: } b_n = a_{3n+3}.$$

Una successione di numeri reali si dirà **strettamente crescente** (oppure solo **crescente**) quando si ha:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots \quad (6)$$

Si dirà, invece, **strettamente decrescente** (oppure solo **decrescente**) se i suoi elementi verificano la seguente relazione:

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots \quad (7)$$

Una successione di numeri reali si dirà **non crescente** quando i suoi termini verificano la relazione:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad (8)$$

Si dirà, invece, **non decrescente** se i suoi termini verificano la seguente relazione:

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \quad (9)$$

La totalità delle successioni **strettamente crescenti**, **strettamente decrescenti**, **non crescenti** e **non decrescenti** si dirà l'insieme delle **successioni monotone**.

ESEMPI

- La successione $(a_n = n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}} = 1, 5, 10, 17, \dots, n^2 + 1, \dots$ è strettamente crescente.
- La successione $(a_n = -n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}} = 1, -3, -8, -15, \dots, 1 - n^2, \dots$ è strettamente decrescente.
- La successione $1, 2, 2, 5, 8, 8, 8, \dots, 10, \dots$ è non decrescente.

- La successione $18, 12, 12, 10, 8, 8, 8, \dots, -1, \dots$ è non crescente.
- La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ è una successione monotona decrescente limitata avente lo zero come punto di accumulazione.
- La successione fondamentale $[2]$, ovvero $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, è illimitata superiormente ed ammette come punto di accumulazione $+\infty$.
- L'insieme $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ è una successione limitata monotona strettamente crescente, con i termini tutti positivi e minori di 1. Nel prossimo paragrafo dimostreremo che tale punto è un punto di accumulazione, o punto limite, della successione.

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Consideriamo la successione $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ vista nell'esempio precedente. Essa ha tutti i termini minori di 1, e che differiscono da 1 di quantità sempre più piccole. Infatti, se sottraiamo l'ennesimo termine da 1, avremo:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

e, se sottraiamo l' $(n+1)^{\text{mo}}$ termine da 1, si ha:

$$1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

e questa differenza è più piccola della precedente, il che vuol dire che l' $(n+1)^{\text{mo}}$ termine è più vicino al valore 1 dell' n^{mo} . Lo stesso accade, com'è facile controllare, per i termini successivi all' $(n+1)^{\text{mo}}$ in modo che possiamo dire (benché in forma imprecisa e non rigorosa) che i termini della successione vanno avvicinandosi **indefinitamente** al valore 1, o più precisamente, **tendono al valore** 1.

Con linguaggio geometrico possiamo anche dire che, scelto un numero ε piccolissimo, esisteranno sempre punti della successione che cadranno nell'intorno $]1-\varepsilon, 1[$ e, quindi, per n opportunamente grande si avrà:

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < \varepsilon.$$

Tale fatto si esprime dicendo che la successione data **tende al limite** 1, od anche che 1 **è il limite della successione**⁴ di termine generale $a_n = \frac{n}{n+1}$.

DEFINIZIONE I

Dicesi che la successione:

$$a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

ha per limite ℓ se, **comunque** scelto un numero positivo ε , **piccolo a piacere**, si può determinare un indice k tale che, per esso e per tutti i termini $a_n \geq a_k$ si abbia sempre:

⁴ La notazione $\lim$ è stata usata sistematicamente da S. Lhuillier in "Exposition élémentaire des Principes des Calculs supérieurs, pour servir de réponse à la demande d'une Théorie claire et précise de l'infini mathématique" – Berlino, 1786.

$$|\ell - a_n| < \varepsilon \quad (10)$$

e viceversa. Se questo accade, si dice che ℓ è il limite della successione data e si scrive, in modo conciso:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad (11)$$

e si legge: ℓ è il limite di a_n per n tendente all'infinito.

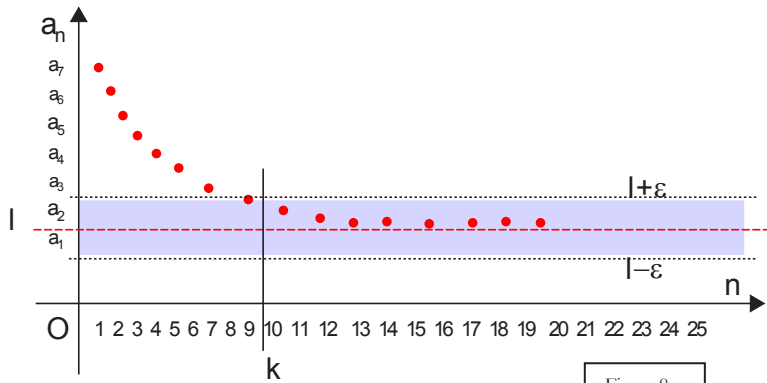


Figura 8

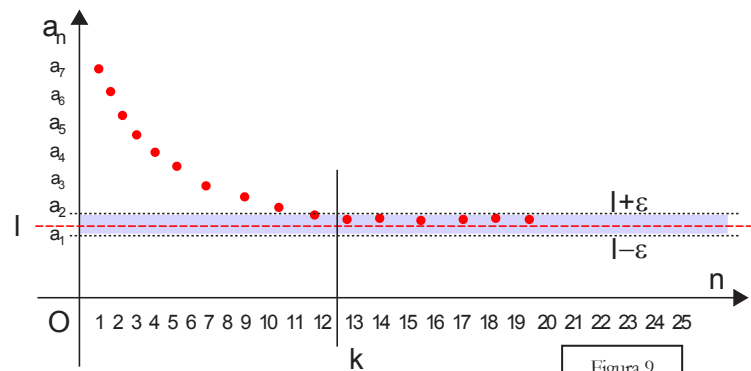


Figura 9

dal quale gli $a_n > a_k$ si trovano tutti situati in quelle fasce.

Spesso, e solo per le successioni, si utilizza una scrittura più snella di quella adottata nella [11]; si scrive, in modo più semplice:

$$\lim a_n = \ell \quad (12)$$

in cui viene sottintesa la scrittura $n \rightarrow +\infty$, in quanto sappiamo che l'unico punto di accumulazione della successione fondamentale [2] è solo $+\infty$.

Si noti che l' ε di questa definizione di limite deve potersi scegliere **comunque**, ossia ad ε si deve poter attribuire un **qualsiasi** valore **arbitrario positivo**, **anche piccolo** quanto si vuole ed in corrispondenza di questo deve potersi determinare quel numero k tale che per ogni $n > k$ **risulti sempre verificata la [10]**. Le figure 3 e 4 mettono in evidenza, appunto, tale proprietà, ossia, prendendo valori sempre più piccoli di ε , si vengono a definire delle fasce di piano (in colore nelle figure) sempre più piccole, i cui bordi sono $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$ e, quindi, un k , a partire

DEFINIZIONE II

Dicesi che la successione:

$$a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

ha per limite $\ell = 0$ se, **comunque** scelto un numero positivo ε *piccolo a piacere*, si può determinare un indice k tale che, per esso e per tutti i termini $a_n \geq a_k$ si abbia sempre:

$$|a_n| < \varepsilon \quad (13)$$

e viceversa. Se questo accade, si dice che $\ell = 0$ è il limite della successione data e si scrive, in modo conciso:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (14)$$

e si legge: $\ell = 0$ è il limite di a_n per n tendente all'infinito. In questo caso la successione [1] è detta **infinitesima**.

DEFINIZIONE III

Dicesi che la successione:

$$a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

ha per limite $\ell = +\infty$ se, **comunque** scelto un numero positivo K , *grande a piacere*, si può determinare un indice k tale che, per esso e per tutti i termini $a_n \geq a_k$ si abbia sempre:

UN LIMITE NOTEVOLE: il numero e di Nepero⁶

Consideriamo la successione di termine generale $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ che in forma estensiva è:

$$e_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}, \dots$$

vogliamo provare che è una successione **monotona crescente e limitata**.

Proviamo che è monotona crescente.

Utilizzando il binomio di Newton avremo:

$$\begin{aligned} e_n &= + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-n+1)}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il valore di e_{n+1} . Si ha:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \\ &= \binom{n+1}{0} \left(\frac{1}{n+1}\right)^0 + \binom{n+1}{1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^1 + \binom{n+1}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \binom{n+1}{3} \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \dots = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Confrontando lo sviluppo di e_n con quello di e_{n+1} è subito visto che risulta:

$$e_n < e_{n+1}.$$

⁶ John Napier (in italiano Nepero) nacque nel castello di Merchiston nei pressi di Edimburgo (Scozia) nel 1550. Si dedicò inizialmente agli studi teologici partecipando attivamente alla lotta fra protestantesimo e cattolicesimo in difesa della Chiesa Anglicana, nel 1593 attaccò la Chiesa Romana col libro *A plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John*. Abbandonati gli studi di teologia si dedicò esclusivamente agli studi matematici e di strumenti bellici. Il suo nome è legato all'invenzione dei logaritmi. Morì a Edimburgo nell'Aprile del 1617.

Proviamo che è limitata.

Innanzitutto è evidente, dagli sviluppi ora eseguiti, che e_n è la somma di $(n+1)$ termini positivi, mentre e_{n+1} è la somma di $(n+2)$ termini positivi.

I due sviluppi hanno i primi due termini uguali. Inoltre, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) &< \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ 0 &< \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ed in definitiva:

$$2 = e_1 < e_2 < e_3 < \dots < e_n < e_{n+1} < \dots$$

Facciamo, ora, a vedere in che modo si prova che tale successione è limitata superiormente dal valore

3.

Osserviamo che, essendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} &= \frac{1}{2!} > \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{2^2} &> \frac{1}{3!} > \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2^{n-1}} &> \frac{1}{n!} > \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

segue che:

$$\begin{aligned} e_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \left(\text{in parentesi vi è una progressione geometrica di ragione } \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

ed anche, ricordando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, è pure: $e_n < 3$.

Esiste, dunque, il limite in esame e si pone:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (20)$$

QUALCHE CURIOSITÀ

- Il numero e dicesi **costante di Nepero** e la lettera e , che indica il limite della successione in esame, fu introdotto da Eulero nell'*Introductio in Analysis infinitorum*, Lausanne, 1748.
- Il numero e è uno dei più importanti numeri, insieme con π , di tutta la storia della matematica. Eulero dimostrò che e è un numero irrazionale (1737); nel 1761 Lambert provò che, $\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}$, e^x è irrazionale; nel 1873 C. Hermite⁷ provò che e è trascendente, ossia che non esiste alcuna equazione algebrica, a coefficienti interi, che abbia il numero e come radice.
- Con diciassette cifre decimali esatte per e si ha il valore:

$$e = 2.71828182845904512 \dots$$

- Vediamo ora come si costruisce una **tavola di logaritmi** in una base $e_n > 1$, in modo che $\forall k \in]1, n[\subset \mathbb{N}$: $\log_{e_n}(k+1) \geq \log_{e_n} k + \frac{1}{n}$. Dalla precedente relazione segue anche:

$$\log_{e_n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \geq 1, \text{ da cui } e_n \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n$$

e, quindi, per la condizione voluta sarà sufficiente porre: $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ovviamente se si

pone, a base del sistema di logaritmi addirittura $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ la proprietà indicata resta

valida comunque venga estesa la tavola e comunque sia grande l'ordine di approssimazione con cui vengono espressi i logaritmi.

I logaritmi in questa base privilegiata si dicono **naturali o neperiani**⁸

- Ad e_n può affidarsi un significato "*più commerciale*".

Ad esempio, per $n = 25$ si ha: $e_{25} = \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{25} = (1.04)^{25}$ che rappresenta il montante di un euro impiegato per 25 anni all'interesse del 4% annuo.

- Considerando la successione i cui termini sono:

$$a_1 = \log_e 2 - \log_e 1$$

$$a_2 = \log_e 3 - \log_e 2 = \log_e \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \log_e 4 - \log_e 3 = \log_e \frac{4}{3}$$

.....

$$a_n = \log_e(n+1) - \log_e n = \log_e \frac{n+1}{n} = \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

È subito visto che $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \log_e 1 = 0$; ossia **le differenze dei logaritmi di due numeri naturali consecutivi sono i termini di una successione monotona decrescente; il limite di tale successione è lo zero.**

⁷ Basandosi sul risultato di Hermite, nel 1882 Lindemann provò che anche π è trascendente, cosa che era stata già intuita da A. M. Legendre nel 1794.

⁸ Si dicono anche **iperbolici** per un motivo che sarà ovvio nel seguito.

- È utile ricordare la seguente formula dovuta a Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

LE SUCCESSIONI ESTRATTE

Abbiamo già definito nel primo paragrafo cosa si intenda per **successione estratta** dalla [1]: è una successione costituita da infiniti termini della [1], disposti nell'ordine in cui si presentano nella [1] stessa, cioè una successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo:

$$b_0 = a_{i_0}, b_1 = a_{i_1}, b_2 = a_{i_2}, \dots, b_n = a_{i_n}, \dots \quad (5)$$

In questo paragrafo vogliamo mostrare due importanti teoremi che possono tornare utili per studiare il carattere di una successione.

1° TEOREMA SULLE SUCCESSIONI ESTRATTE

Se la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente al limite ℓ , ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, è sempre possibile estrarre da essa una successione (detta sotto successione), (senza alterare l'ordine dei termini) convergente ancora ad ℓ , ossia tale che risulti $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i_n} = \ell$.

DIMOSTRAZIONE

In primo luogo sappiamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è tale da essere convergente al limite ℓ , per cui, per la definizione di limite si ha che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, comunque piccolo, è possibile determinare un rango k , tale che, per tutti gli $n > k$, si abbia che tutti i termini della successione data cadano nell'intervallo $\left] \ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k} \right[$. Ora se k^* è un intero tale da risultare $\frac{1}{k^*} < \varepsilon$, allora per ogni $k \geq k^*$ il termine $a_{i_k} = b_k$ della successione [5] è tale da soddisfare la relazione $|b_k - \ell| < \varepsilon$ in quanto l'intervallo $\left] \ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k} \right[$ è contenuto nell'intervallo $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Il ragionamento fatto per k può essere ripetuto per un altro $k_1 > k$ venendo così a determinare un altro elemento b_{k+1} tale da verificare ancora la disuguaglianza $|b_{k+1} - \ell| < \varepsilon$. Procedendo allo stesso modo, si costruisce una successione del tipo $\mathfrak{S} = \{b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots\}$ che converge ad ℓ quando $n \rightarrow +\infty$. 

Il teorema ora enunciato, però, **non è invertibile**: ovvero, può accadere che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abbia sotto successioni convergenti senza che essa lo sia.

ESEMPIO

Abbiamo già visto che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ è indeterminata, ovvero oscillante. Ma se consideriamo la successione estratta formata dai soli termini di posto pari, ovvero $(a_n)_{n \in 2\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \dots\}$, è subito visto che questa è una successione convergente ad $\ell = 1$ senza che lo sia la successione di partenza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Di estrema utilità, invece, è il seguente:

2° TEOREMA SULLE SUCCESSIONI ESTRATTE

Se della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è possibile stabilirne il carattere, ma le due successioni estratte da

TEOREMA II

Una serie, la [14], assolutamente convergente gode della proprietà commutativa, cioè se $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ è una qualsiasi permutazione dei numeri naturali, la serie:

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k} + \dots$$

è ancora convergente ed ha la stessa somma della serie data.

Rimandiamo la dimostrazione a testi specializzati.

Completiamo questo paragrafo enunciando altre proprietà notevoli e teoremi notevoli.

Una serie, la [14], si dice **assolutamente divergente** se:

- è divergente e se è verificata almeno una delle seguenti condizioni:
 - se tutti i termini hanno segno costante;
 - i termini positivi sono in numero finito e gli altri infiniti termini sono negativi (o viceversa);
 - ci sono infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi.

Anche le serie assolutamente divergenti godono della proprietà commutativa.

Una serie, la [14], si dice **incondizionatamente convergente** se:

- è convergente;
- e gode della proprietà commutativa.

L'ultima proprietà, in sostanza, ci dice che devono essere convergenti tutte le serie che si ottengono dalla serie data, comunque si permutano i suoi termini.

Per le serie incondizionatamente convergenti sussiste il seguente:

TEOREMA DI DIRICHLET¹⁰

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia incondizionatamente convergente è che sia assolutamente convergente.

Dal teorema di Dirichlet segue che se le serie che si ottengono da una data serie, permutandone in qualsiasi modo i termini, sono tutte convergenti allora esse hanno tutte la stessa somma.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} x^n$.

Applichiamo il criterio del rapporto. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} x^{n+1}}{\frac{(2n-1)!}{(2n)!} x^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} x^{n+1}}{\frac{(2n-1)!}{(2n)!} x^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)!(2n+2)} x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!(2n+2)} x = x \end{aligned}$$

per cui: se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e, quindi, incondizionatamente; per $x > 1$ la serie diverge; per $x < -1$ la serie oscilla; per $x = 1$ la serie diverge ed, infine, per $x = -1$ converge semplicemente.

¹⁰ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/02/1805 in Düren, French Empire, 5/05/1859 in Göttingen, Hanover)

TEOREMA DI RIEMANN - DINI¹¹

Una serie semplicemente convergente (ma non assolutamente) con infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi, avente il termine generico infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$, è tale che, permutando opportunamente i suoi termini, può fornire:

- una serie divergente positivamente o negativamente;
- una serie convergente ad una somma prestabilita;
- una serie indeterminata.

ESEMPIO

Come esempio, consideriamo la seguente serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

che è convergente, ma non assolutamente convergente.

La serie formata con i termini di posto pari è:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

che risulta essere divergente negativamente (in parentesi vi è la serie armonica semplice che sappiamo essere divergente). La serie formata dai termini di posto dispari è:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots$$

che è maggiorante della serie:

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = +\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

dove in parentesi vi è ancora una volta la serie armonica semplice che sappiamo essere divergente. La serie formata dai termini di posto dispari è, dunque, divergente positivamente. Abbiamo ricavato, così, dalla serie data due serie divergenti una positivamente e l'altra negativamente.

Per le serie a segni alterni vale il seguente criterio di convergenza semplice (cioè non necessariamente assoluta):

¹¹ Georg Friedrich Bernhard Riemann (17/09/1826 in Breselenz, Hanover – 20/07/1866 in Selasca, Italia) – Ulisse Dini (14/11/1845 in Pisa – 28/10/1918 in Pisa).

¹² Leibniz, Gottfried Wilhelm (Lipsia 1646 - Hannover 1716), filosofo, matematico e uomo politico tedesco. Dopo aver studiato presso varie università tedesche, dal 1666 (anno in cui si laureò in diritto) fu al servizio dell'arcivescovo elettore di Magonza con vari incarichi giuridici, politici e diplomatici. Nel 1673 si recò a Parigi restandovi per tre anni e dedicandosi a studi di logica, matematica, fisica e filosofia. Nel 1676 fu nominato bibliotecario e consigliere privato alla corte di Hannover, mantenendo l'incarico fino alla morte. Gli interessi di Leibniz, considerato un genio universale dai contemporanei, spaziano nei più diversi campi del sapere, dalla matematica alla filosofia, dalla teologia alla fisica, ma investono anche i campi del diritto, della diplomazia, della politica, della storia e della filologia. Egli non lasciò tuttavia opere di carattere sistematico e la sua vastissima produzione filosofico-scientifica consiste di saggi brevi, oltre che di numerosi abbozzi rimasti per lungo tempo inediti. Tra gli scritti filosofici principali di Leibniz vi sono: Saggi di teodicea (2 voll., 1710), Monadologia (postuma, 1718-1720) e Nuovi saggi sull'intelletto umano (postumi, 1765). Leibniz contribuì alla matematica con la scoperta dei principi fondamentali del calcolo infinitesimale, e la notazione leibniziana venne adottata universalmente. Sulla priorità di questa scoperta si accese una polemica fra Leibniz e Newton: in realtà la scoperta di Leibniz, risalente al 1674 ma resa nota nel 1684 nel Nuovo metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi, avvenne indipendentemente da quella di Newton, che aveva elaborato il suo sistema di calcolo nel 1666 senza renderlo pubblico fino al 1687. Nel 1672 Leibniz ideò inoltre una macchina calcolatrice capace di moltiplicare, dividere ed estrarre radici quadrate. La riflessione di Leibniz è fondamentale sia per la nascita della logica formale moderna, sia per la filosofia del linguaggio. Egli progettò anzitutto la costruzione di una lingua universale modellata sul calcolo matematico, nella quale i nessi fra i simboli dovevano esprimere le relazioni logiche fra i concetti. Inoltre egli distinse i giudizi logici in "verità di ragione" e "verità di fatto". Le prime (come ad esempio le verità matematiche) sono necessarie e sono regolate dal principio di non-contraddizione (secondo il quale è falso ciò che contiene una contraddizione ed è vero "ciò che è opposto o contraddittorio al falso"): si tratta di verità a priori, innate e pertanto necessarie (cioè il loro opposto implica contraddizione); tuttavia, esse non dicono nulla circa la realtà esistente di fatto, come ad esempio la definizione del triangolo, che prescinde completamente dal fatto che in natura vi sia una simile figura. Le seconde invece sono verità contingenti (cioè l'opposto di esse non implica contraddizione), inoltre non sono deducibili a priori dalla ragione, ma sono a posteriori e si fondano sull'esperienza. Verità di questo secondo tipo (ad esempio: "Cesare varcò il Rubicone") sono rette dal "principio di ragion sufficiente", secondo cui nulla accade senza che vi sia una ragione o una causa che giustifichi l'evento.

CRITERIO DI CONVERGENZA DI LEIBNIZ¹² PER LE SERIE ALTERNANTI

Se la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a termini positivi, è decrescente ed infinitesima, la serie a segni alterni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots \quad (32)$$

è convergente.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo, in primo luogo, che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $a_{n-1} \geq a_n > 0$, nonché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e consideriamo le due successioni $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ formate, rispettivamente, dalle somme parziali di indice dispari e di indice pari della [32]. Si ha, esplicitando che:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq s_{2n-1}$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$$

onde la successione $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e la successione $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.

Si ha, inoltre:

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} < s_{2n-1}$$

e, poiché risulta: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 - a_2$, vale per $\forall n \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza:

$$a_1 - a_2 \leq s_{2n} < s_{2n-1} \leq a_1.$$

Le successioni monotone $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sono, dunque, limitate e convergenti e ricordando che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n-1} - a_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1}$$

le due successioni, quindi, convergono allo stesso limite, per cui a tale limite convergerà anche la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e ciò prova che la serie è convergente. 

A completamento della dimostrazione del criterio di convergenza delle serie alternanti facciamo vedere, sempre nelle ipotesi del criterio ora dimostrato, che:

- le somme parziali di indici pari approssimano per difetto la somma della serie;
- le somme parziali di indici dispari approssimano per eccesso la somma della serie;
- l'errore che si commette assumendo come valore approssimato della somma della serie quello di una sua ridotta non supera, in valore assoluto, il primo termine trascurato.

Infatti, detta s la somma della [32] si ha:

$$s = \inf(s_{2n-1}) = \sup(s_{2n})$$

e, quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1}$$

da cui si ricavano le seguenti disuguaglianze:

$$0 \leq R_{2n} = s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

$$0 \leq -R_{2n-1} = s_{2n-1} - s \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$$

che possono compendiarsi nella seguente:

DOMINIO DI UNA FUNZIONE

INTRODUZIONE

È a tutti nota la definizione di **funzione** nonché una loro classificazione¹.

In questo contesto, però, classificheremo le **funzioni reali di variabile reale** come in figura 1, in

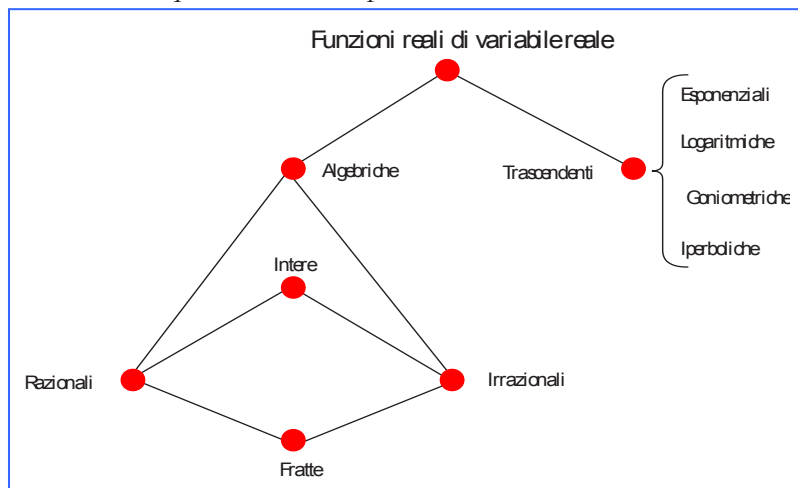


Figura 1

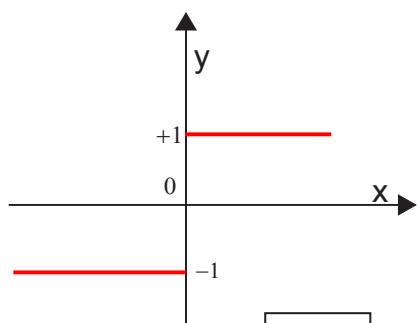


Figura 2

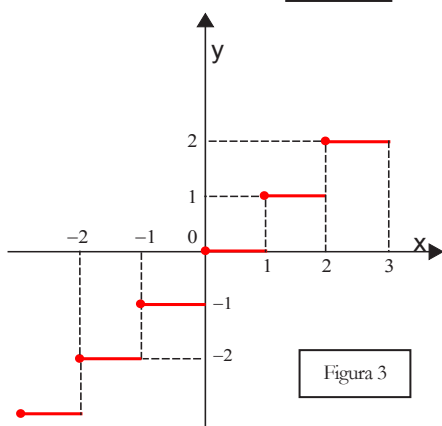


Figura 3

modo che la trattazione, che seguirà, risulterà più agevole e scorrevole.

In questo schema non trovano posto alcune funzioni speciali che qui elenchiamo subito.

- La prima, già nota, è la funzione: $y = \text{signum}(x)$, così definita:

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \forall x > 0 \\ -1 & \forall x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

(si osservi che questa funzione non è definita nell'origine, come si rileva dalla figura 2).

- La seconda è la funzione $y = [x]$,

nota con il nome di *funzione di Legendre*², ed è un'applicazione di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$y = [x] = \text{"massimo intero contenuto in } x\text{"}. \quad (2)$$

Si ricordi che bisogna considerare tutti i segmenti come privi del secondo estremo. Infatti, si ha per ogni $x \in [0, 1[$ che risulta $[0] = 0$, per ogni $x \in [1, 2[$ è $[x] = 1$, e così via.

- La terza è la funzione $y = M(x)$, nota con il nome di *funzione mantissa*, ed è un'applicazione di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$y = M(x) = x - [x] \quad (3)$$

ESEMPIO

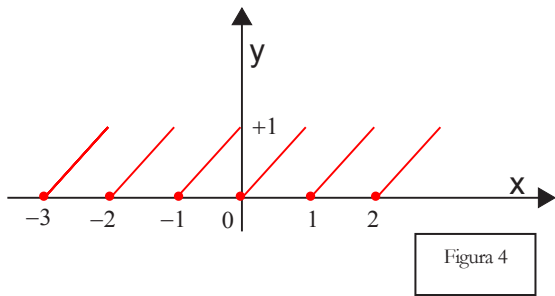
Dal diagramma di figura 3 risulta:

$$[0] = 0; \quad [1] = 1; \quad \left[\frac{1}{2}\right] = 0; \quad [\sqrt{2}] = 1; \quad \left[-\frac{1}{2}\right] = -1; \quad [-\pi] = -4$$

¹ Il diagramma completo si trova all'ultima pagine del testo.

² Adrien Marie Legendre (1752-1833) matematico francese. Nel 1789, durante la Rivoluzione francese ricopre incarichi di interesse pubblico, sia per conto della commissione dei pesi e misure, sia nella pubblica istruzione. Ha scritto un trattato sulle funzioni ellittiche e gli integrali euleriani (1826), nonché un altro sulla Teoria dei numeri (1860, risultati per la priorità dei quali viene in urto con K.F. Gauss).

il cui grafico è quello di figura 4.



La funzione in esame, come si può vedere, è periodica ed il suo grafico si compone di segmenti tutti paralleli aperti a destra.

ESEMPIO

Dal diagramma di figura 4 risulta:

$$M(8.22) = 0.22; \quad M\left(\frac{19}{3}\right) = 0.\bar{3};$$

$$M(\sqrt{3}) = 0.7320508...;$$

$$M(\pi) = 0.141597...;$$

$$M(-\pi) = 0.8584072...;$$

$$M(-7) = 0;$$

$$M(-0.2) = 0.8; \quad M(5) = 0;$$

$$M(-\sqrt{3}) = 0.2679491...;$$

- La funzione di Dirichlet è un'applicazione di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$y = \begin{cases} 0 & \forall x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \forall x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases} \quad (0.4)$$

Il suo grafico non può essere disegnato, perché è costituito da infiniti punti situati sulla retta $y = 0$ e da infiniti punti situati sulla retta $y = 1$.

- La funzione detta **eccesso di x** che si indica con $y = (x)$ è definita dalla seguente legge:

$$y = (x) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{alla differenza fra il valore dato alla } x \text{ e l'intero più} \\ \text{vicino ad } x, \text{ se questo è diverso da un intero, più } \frac{1}{2}; \end{array} \right. & \\ 0 & \text{se } x \text{ è uguale ad un intero più } \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5)$$

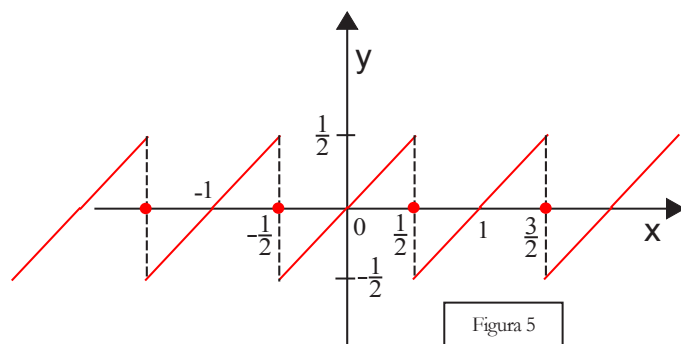
ESEMPIO

Dal diagramma di figura 5 risulta:

$$\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}; \quad \left(\frac{3}{2}\right) = 0;$$

$$(6.43) = 6.43 - 6 = 0.43; \quad (2) = 0;$$

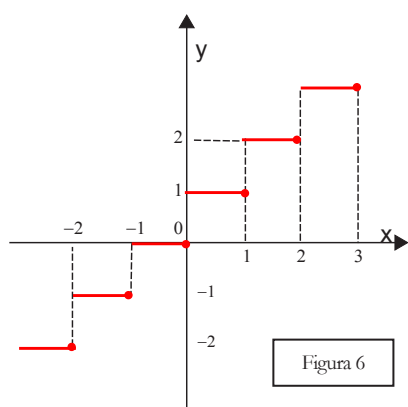
$$(6.79) = 6.79 - 7 = -0.21$$



Si noti che nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, estremi esclusi in cui la funzione è nulla per definizione, la funzione è $y = x - 0$; nell'intervallo $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, entrambi esclusi, la funzione risulta essere $y = x - 1$; nell'intervallo $\left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$, estremi esclusi, la funzione è $y = x - 2$; ecc.

La funzione in ciascuno intervallo è rappresentata da segmenti, estremi esclusi, paralleli alla bisettrice del primo e terzo quadrante, come mostra la figura 5.

- La funzione $y = \lceil x \rceil$ si chiama funzione **ceil** (funzione cielo) di x ed è il più piccolo intero maggiore o uguale ad x , cioè:



$$\lceil x \rceil = \sup \{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\} \quad (6)$$

Essa è simile alla funzione di Legendre $y = \lfloor x \rfloor$. Il suo insieme di esistenza è tutto $\mathbb{R}$ ed è una funzione crescente (non strettamente) e illimitata. Basta effettuare una traslazione verticale di quello di $y = \lfloor x \rfloor$ in cui gli intervalli sono chiusi a destra invece che a sinistra, come mostra la figura 6.

- La funzione $y = \lfloor x \rfloor$ si chiama funzione **floor** (funzione pavimento) di x ed è il più grande intero minore o uguale ad x , cioè:

$$\lfloor x \rfloor = \sup \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\} \quad (7)$$

L'insieme di esistenza è tutto $\mathbb{R}$ ed è una funzione crescente (non strettamente) e illimitata. Il grafico è simile a quello della funzione di Legendre $y = \lfloor x \rfloor$.

INSIEME DI ESISTENZA DI UNA FUNZIONE

L'insieme di esistenza di una funzione è l'insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x affinché risultino reali e finiti i corrispondenti valori della variabile dipendente y .

In sostanza, nel determinare l'insieme di definizione di una funzione si devono escludere:

- quei valori della variabile $x \in \mathbb{R}$ a cui corrispondono valori $y \notin \mathbb{R}$;
- quei valori della variabile $x \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione perde di significato³.

Bisogna, inoltre, ricordare che le:

a) FUNZIONI ALGEBRICHE INTERE

sono le applicazioni di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo:

$$f(x) = P(x) \quad (8)$$

con $P(x)$ polinomio a coefficienti reali, il cui insieme si indica con $\mathbb{R}[x]$. Il loro insieme di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, insieme di esistenza che indicheremo, come è stato già fatto, al seguente modo:

$$\text{dom} f = \mathbb{R}. \quad (9)$$

³ Perché su di essa non si possono eseguire alcune operazioni che ci permettono di ricavare i valori reali della variabile dipendente y .

I LIMITI DI FUNZIONI

DEFINIZIONI

Sia X il dominio di definizione della funzione $y = f(x)$; sia, inoltre, x_0 un punto di accumulazione di X , appartenente o no ad X ; vogliamo studiare il comportamento della funzione $y = f(x)$ in un intorno $\mathfrak{I}(x_0)$ di semi ampiezza δ di x_0 (con x_0 escluso, potendo la funzione essere o no definita in x_0).

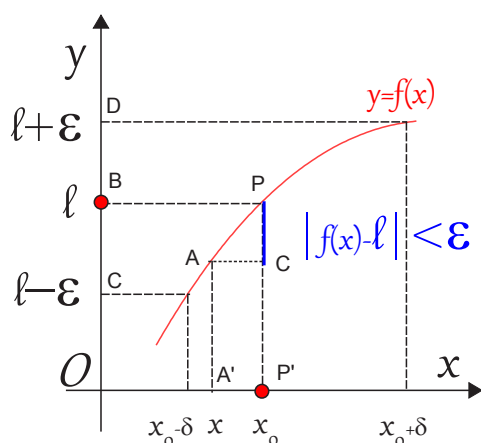


Figura 1

A solo scopo didattico ci aiuteremo con una rappresentazione grafica, vedi figura 1, ma resta bene inteso però, che le definizioni a cui perverremo sono indipendenti da qualsiasi rappresentazione grafica e valgono per ogni tipo di funzione.

Per studiare, quindi, la funzione $y = f(x)$ possiamo esaminare quello che accade per:

- $x = x_0$;
- per i valori di x dell'intorno di semi ampiezza δ di x_0 , escluso però tale valore.

Per $x = x_0$ la funzione può essere definita come può non essere tale; se è definita indicheremo con $f(x_0)$ il valore $\overline{P'P}$ che la funzione assume per $x = x_0$. Nel secondo caso il comportamento della funzione per valori di $x \neq x_0$ e compresi in un intorno di x_0 è del tutto indipendente dall'eventuale valore di $f(x_0)$.

Ci proponiamo di vedere il comportamento dell'insieme dei valori che assuma la funzione $y = f(x)$ quando la variabile x “si avvicina indefinitamente ad x_0 ”.

Se avviene che il corrispondente valore di $f(x)$ “si avvicina indefinitamente” ad una costante $\ell (= \overline{OB} = \overline{P'P})$, mentre x “si avvicina indefinitamente ad x_0 ” si dice che “ ℓ è il limite della funzione $y = f(x)$ per x tendente ad x_0 nell'intervallo $\mathfrak{I}(x_0)$ ” e si scrive:

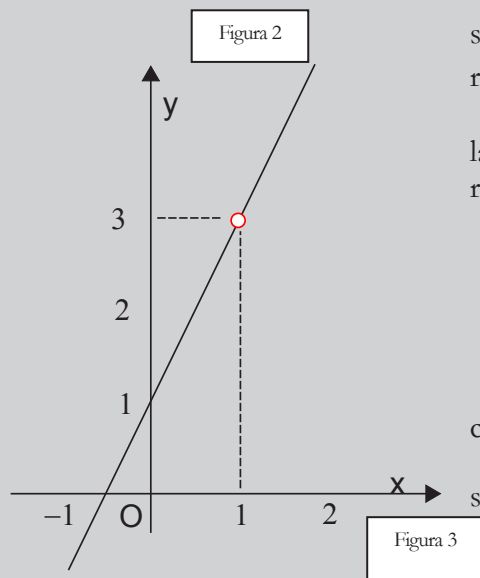
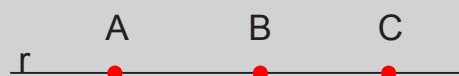
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad (1)$$

La precedente definizione è imprecisa perché il verbo “**avvicinarsi**” non ha un esatto significato matematico, però offre una cognizione intuitiva del concetto di limite.

Volendo precisare tale concetto in modo rigoroso, occorre valutare di quanto la x dovrà avvicinarsi ad x_0 affinché il valore della funzione si avvicini ad ℓ di quel tanto stabilito.

È bene osservare che i due concetti di avvicinarsi indefinitamente ad un punto e differirne tanto poco, quanto si vuole, non sono identici. A tale proposito forniamo i seguenti:

ESEMPI



x	y	x	y
0.9	2.8	1.1	3.2
0.99	2.98	1.01	3.02
0.999	2.998	1.001	3.002
0.9999	2.9998	1.0001	3.0002
0.99999	2.99998	1.00001	3.00002
0.999999	2.999998	1.000001	3.000002
...	...	...	...

Figura 4

Immaginiamo che un punto parta da A e vada verso C . Dire che esso si avvicina indefinitamente a C non significa che esso debba avvicinarsi di quanto si vuole a C .

Esso, infatti, si avvicinerà indefinitamente a C anche se si avvicina indefinitamente ad un punto intermedio B , pur restando molto lontano da C .

Mentre diremo che esso tende a C se parte da A con la legge di percorrere, ad esempio, la metà del cammino che gli resta da compiere.

* * * *

Consideriamo la funzione: $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ il cui campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{1\}$, in quanto nel punto $x_0 = 1$ assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che è priva di significato.

Vediamo come si comporta la funzione data in un intorno completo del punto $x_0 = 1$. Supponiamo di prendere il dominio $\mathfrak{I}(1) =]0.9; 1.1[$ escluso il punto $x_0 = 1$. Diamo, cioè, ad x valori sempre più prossimi al valore $x_0 = 1$, sia più piccoli che più grandi del valore $x_0 = 1$.

Otteniamo le tabelle di figura 4, di facile lettura. Dalla prima si vede che mentre la variabile x cresce “avvicinandosi” sempre più al valore $x_0 = 1$, la variabile y cresce “avvicinandosi” sempre più al valore $y = 3$.

Cerchiamo di rendere rigoroso il ragionamento presentato nell'esempio.

A tale scopo indichiamo con ε un **numero positivo, scelto a piacere (anche piccolo quanto si vuole)** e vediamo se esiste sempre in corrispondenza di ε , un **intorno completo** di 1, per ogni x del quale, diverso da 1, risulti:

$$\left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon \quad (2)$$

ossia, **per ogni x dell'intorno, diverso da 1, i valori assunti dalla funzione data differiscono da 3, in valore assoluto, meno di ε .**

Si tratta, quindi, di risolvere la disequazione [2] e vedere se ammette, oppure no, soluzioni e quali. Con semplici calcoli dalla [2] si ricava subito:

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Vuol dire che la [2] è soddisfatta da **tutti** i valori di x interni all'intervallo $\left]1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ escluso, s'intende, il valore 1.

Si noti che:

- tale intervallo costituisce **un intorno completo** del numero 1;
- che $\varepsilon > 0$ è stato scelto **piccolo a piacere**;
- che l'ampiezza dell'**intorno** di 1 dipende da ε ;
- che tale intorno è tanto più piccolo quanto più piccolo è il valore di ε .

L'essenziale, però, è che l'intorno del numero 1, in cui è verificata la [2], esista sempre, comunque si fissi $\varepsilon > 0$.

Concludendo: si dice che, per x tendente ad 1 ($x \rightarrow 1$), la funzione $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ ha per limite 3, e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} \right) = 3. \quad (4)$$

Indicando, in generale, con $y = f(x)$ la funzione, con x_0 il valore a cui tende la x e con ℓ il valore del limite della funzione (nell'esempio precedente sarebbe $x_0 = 1$ ed $\ell = 3$) possiamo porre la seguente:

DEFINIZIONE

Si dice che ℓ è il limite della funzione $y = f(x)$ per x tendente ad un punto di **accumulazione** x_0 appartenente (o meno) al campo di esistenza $\mathfrak{D} = \text{dom}f(x)$, e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \quad (5)$$

se, scelto a piacere un numero $\varepsilon > 0$, si può determinare in $\mathfrak{D}$, in corrispondenza di ε , un intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 , tale che, per ogni x di tale intorno, **diverso da** x_0 , si abbia:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (6)$$

ossia:

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

OSSERVAZIONE 1

Si noti, in particolare, che la definizione si riferisce ai valori della variabile indipendente x appartenente all'intorno $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, escluso x_0 , in quanto non si vuole escludere il fatto che il valore $f(x_0)$, assunto dalla funzione $y = f(x)$, per $x = x_0$ possa essere diverso dal limite ℓ .

OSSERVAZIONE 2¹

¹ "Naturalmente il significato tecnico di un vocabolo non è quello comune: non può essere l'etimologia a fornirlo. Però, chi introduce una nomenclatura scientifica, sceglie i vocaboli in modo che il significato **tecnico** speciale sia collegato il più possibile con quello **comune**. Ed inoltre, una nomenclatura scientifica, viene introdotta quasi sempre per gradi: cosicché nella storia di essa si osserva che il significato di un vocabolo (alla fine rigidamente specializzato) non differisce in principio assai poco od affatto da quello comune....

Il vocabolo latino **limite** [che secondo gli studiosi di etimologia deriva dalla successione **lic-mo-ite**, ove figura la radice **lic** (essere di traverso)] significa **ciò che è di traverso**." U.Cassina, *Storia del concetto di limite* in "Periodico di Matematiche" 1936. Tale interessante scritto è stato ristampato in U.Cassina, *Dalla geometria egiziana alla matematica moderna*, Cremonese, Roma, pagg. 142-214.

LE FUNZIONI CONTINUE

INTRODUZIONE

La nozione di funzione continua è strettamente legata all'idea intuitiva della consequenzialità fra causa ed effetto. Ci aspettiamo che piccole variazioni di input provochino piccole variazioni di output: ad esempio, quando si pigia il pedale dell'acceleratore, piccoli incrementi di pressione del piede producono piccoli aumenti di velocità dell'automobile. Comunque, nella nostra esperienza ci sono anche esempi di fenomeni di tipo impulsivo: piccoli aumenti di pressione del dito su un interruttore causano, oltre una certa soglia, ad esempio, un drastico aumento dell'intensità sonora di un altoparlante presente in una stanza.

Con un linguaggio poco preciso, ma meglio aderente alla intuizione geometrica che ognuno ha della continuità, si può dire che sono continue quelle funzioni $y = f(x)$ per le quali variando di poco la grandezza x si ottiene una piccola variazione della quantità y .

Più precisamente diamo la seguente:

DEFINIZIONE:

Sia $\mathfrak{I}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, sia $f: \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathfrak{I}$. Diciamo che $y = f(x)$ è continua nel punto x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$x \in \mathfrak{I}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Si dirà, poi, che $y = f(x)$ è continua in $\mathfrak{I}$ se è continua in ogni punto di $\mathfrak{I}$.

OSSERVAZIONE

La continuità di una funzione è un fatto locale: essa può esserci o no a seconda del punto x_0 che si considera. Per un generico punto x_0 di $\mathfrak{I}$ i casi sono due: o x_0 è punto di accumulazione per $\mathfrak{I}$, oppure x_0 è punto isolato di $\mathfrak{I}$.

Nel secondo caso, ogni funzione $f: \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 , poiché qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulta per ogni $x \in \mathfrak{I}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Per questo motivo le successioni di numeri reali sono anche pensate come funzioni continue.

Nel primo caso, che è l'unico interessante, la definizione di continuità di una funzione si riconduce a quella più generale di limite di funzione, che daremo fra poco.

È bene notare subito che non tutte le funzioni finora incontrate sono continue!

Le funzioni che non sono continue in un punto, o in un intervallo, si diranno discontinue in quel punto od in quell'intervallo.

Vediamo qualche esempio di funzione continua e discontinua.

ESEMPI

- Tutte le funzioni affini (ad esempio $y = ax + b$) sono continue;
- Sono continue le funzioni polinomiali del tipo $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ con coefficienti in $\mathbb{R}$;
- Sono funzioni continue $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctan x$, $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$, $y = \operatorname{sech} x$, $y = \ln x$, $y = a^x$, $y = \operatorname{sett} \sinh x$, ecc.
- Sono funzioni discontinue:
 $y = \tan x$, $y = \cot x$, la funzione di Legendre, la f di Dirichlet; $f = \operatorname{signum}(x)$; ecc.

Vediamo nel prossimo paragrafo come i limiti sono legati alla continuità.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA

Sia $\mathfrak{T}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, sia $f: \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione dell'insieme $\mathfrak{T}$. Diciamo che $y = f(x)$ è **continua nel punto x_0** se:

- a) esiste il valore della funzione nel punto x_0 , ovvero $f(x_0)$;
 - b) esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$;
 - c) risulta $f(x_0) = \ell$.
- (1)

La funzione $y = f(x)$ si dirà **discontinua** in x_0 se viene meno una delle condizioni presenti nella definizione [1].

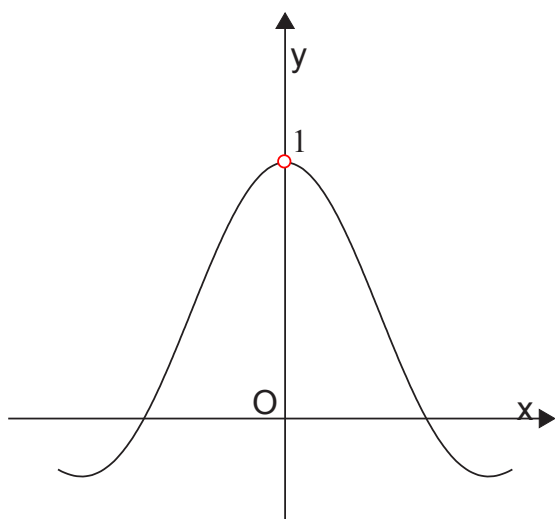


Figura 1

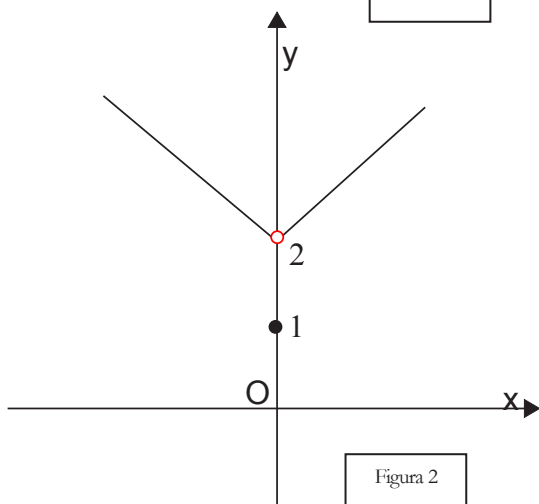


Figura 2

In figura 1 è rappresentata la funzione $y = \frac{\sin x}{x}$ la quale, come già sappiamo non è definita nell'origine, quindi non esiste $f(0)$, mentre esiste il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. La funzione risulta discontinua nell'origine, perché viene a mancare l'ipotesi di lavoro [1a].

In figura 2 è rappresentata la funzione:

$$y = f(x) = \begin{cases} |x| + 2 & \forall x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

che è ancora discontinua nell'origine, in quanto questa volta pur esistendo il valore $f(0) = 1$, esso non è uguale al valore del limite per $x \rightarrow 0$. Infatti, tale limite vale 2.

Se la [1] è soddisfatta solo in un intorno sinistro di x_0 , ovvero $]x_0 - \delta, x_0[$, o solo in un intorno destro x_0 , ovvero $]x_0, x_0 + \delta[$, la funzione si dice **continua solo a sinistra oppure solo a destra del punto x_0** .

Quando si dice che una funzione è continua in un punto x_0 , senza alcuna specificazione,

si intende che essa è continua sia a sinistra che a destra del punto x_0 , ovvero che risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

VARIE SPECIE DI DISCONTINUITÀ

I punti di discontinuità, chiamati anche **punti singolari**, possono essere classificati in tre specie:

A) PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

DEFINIZIONE

Si dice che nel punto x_0 la funzione $y = f(x)$ ha una discontinuità di prima specie se in tale punto esistono finiti il limite destro e quello sinistro e sono diversi fra loro. (2)

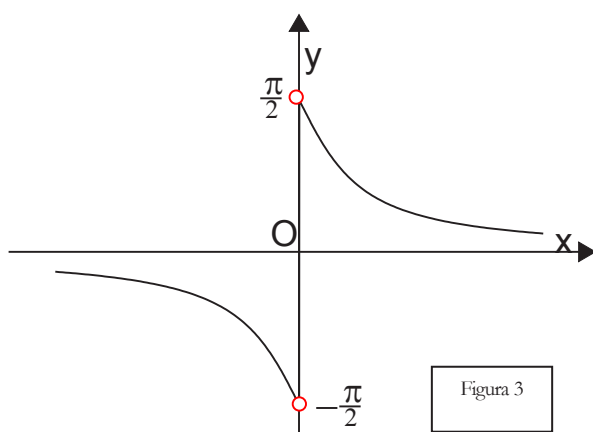


Figura 3

La differenza, poi, fra questi due limiti dicesi **salto** della funzione.

In figura 3 è rappresentata la funzione $y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ la quale non è definita nell'origine e presenta ivi una discontinuità di prima specie, in quanto il limite destro è $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\frac{\pi}{2}$, mentre quello sinistro è $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Conseguentemente il salto della funzione è uguale a π .

La funzione, già vista, $y = [x]$ ha discontinuità di prima specie in tutti i punti aventi per ascissa un numero intero; in tali punti il salto è 1.

Anche la funzione $y = \{x\}$ ha discontinuità di prima specie e con salto uguale ad 1, in tutti i punti aventi per ascissa un numero intero più $\frac{1}{2}$.

B) PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

DEFINIZIONE

Si dice che nel punto x_0 la funzione $y = f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie se in tale punto:
a) non esiste almeno uno dei due limiti destro o sinistro;
b) o, esistendo, uno dei due è l'infinito. (3)

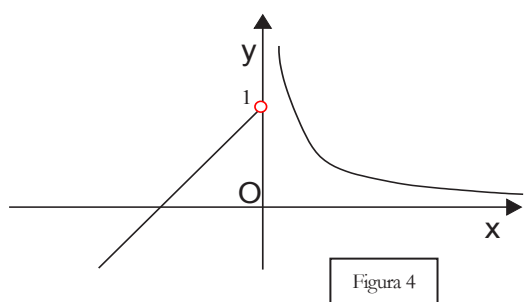


Figura 4

Ad esempio, in figura 4 è presentata una funzione con discontinuità di seconda specie, in quanto il limite sinistro è finito e vale uno, mentre il limite destro è $+\infty$.

La funzione goniometrica $y = \tan x$ ha discontinuità di seconda specie nei punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con k intero o nullo).

TEOREMA 9: Teorema di continuità delle funzioni inverse

Sia $y = f(x)$ una funzione strettamente monotona nell'intervallo $[a, b]$. Se la funzione $y = f(x)$ è continua, anche la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ è continua.

DIMOSTRAZIONE

È subito visto che la stretta monotonia¹ della funzione $y = f(x)$ su $[a, b]$ implica la sua invertibilità grazie al **Teorema 6** (criterio di invertibilità) prima visto.

Supponiamo, allora, che $y = f(x)$, strettamente crescente, sia una funzione continua $\forall x \in [a, b]$. Allora:

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]; \quad f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

In particolare, la funzione $y = f^{-1}(x)$ assume tutti i valori dell'intervallo $[a, b]$ e per il **Teorema 8** (criterio di continuità delle funzioni monotone) la funzione $y = f^{-1}(x)$ è continua. 

TEOREMA 10: Continuità delle funzioni composte²

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ ed $y = g(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a_1, b_1]$ e supponiamo che sia $[a_1, b_1] \subseteq \text{codom } f \cap \text{dom } g$. Allora la funzione composta $y = g(f(x))$ (oppure $g \circ f$) risulta continua in ogni punto di $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \in [a_1, b_1]$. Poiché la funzione $y = f(x)$ è continua in x_0 , assegnato un $\varepsilon > 0$, comunque piccolo, esiste un intorno $\mathfrak{I}(x_0)$ tale che per ogni $x \in \mathfrak{I}(x_0)$ risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. In conseguenza per la continuità della funzione $y = g(x)$, assegnato un $\varepsilon_1 > 0$, comunque piccolo, esiste un intorno di $f(x_0)$ tale che: $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon_1$. 

¹ Si ricordi che la monotonia in senso stretto è **condizione sufficiente**, ma **non necessaria**, per l'esistenza della funzione inversa.

² È interessante notare che una *funzione di funzione discontinua* non è necessariamente discontinua. Confronta, ad esempio, E. Cesaro, *Elementi di calcolo infinitesimale*, ed. Alvano, Napoli, 1897, pag.25.

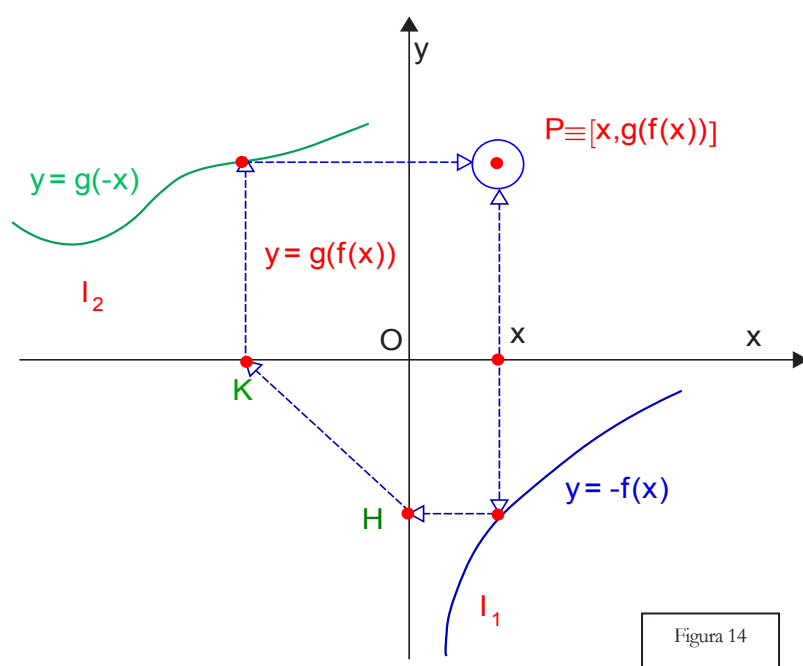


Figura 14

Ricordiamo qui (figura 14) la costruzione per via geometrica di una funzione composta note le funzioni componenti.

La figura, come si può notare, è stata leggermente ingrandita per permettere una migliore visione di insieme sulla leggibilità delle operazioni da eseguire sulle funzioni componenti.

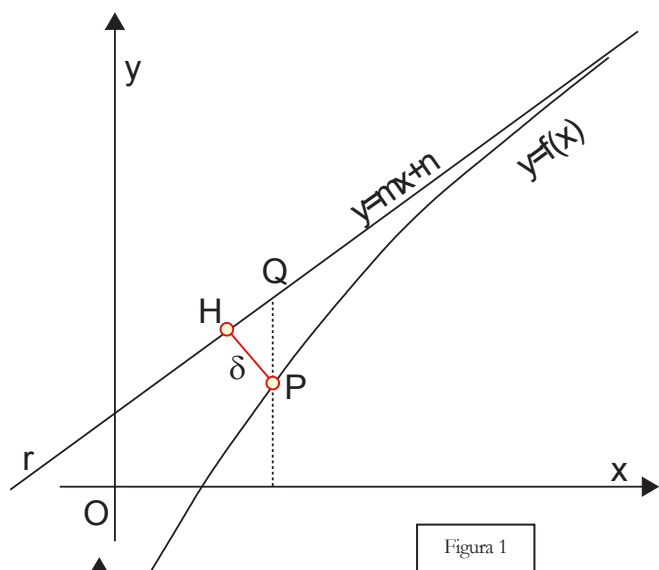
Partendo da un valore x , scelto in modo da appartenere all'insieme $\text{codom } f \cap \text{dom } g$, e proseguendo in senso orario il percorso (I_1, H, K, I_2) , si perviene al punto $P \equiv (x, g(f(x)))$ appartenente alla funzione composta.

GLI ASINTOTI DELLE FUNZIONI

INTRODUZIONE

La nozione di asintoto di una funzione è già nota sin dallo studio dell'iperbole in Geometria Analitica e dallo studio delle funzioni elementari, quali la funzione esponenziale, le funzioni goniometriche tangente e cotangente, le funzioni inverse di queste, arcotangente ed arccotangente, le funzioni iperboliche, tangente iperbolica, cotangente iperbolica, secante iperbolica, cosecante iperbolica, e le loro funzioni inverse, settore tangente iperbolico, settore cotangente iperbolico, settore secante iperbolico e settore cosecante iperbolico, ecc.

In questa unità didattica estenderemo il concetto di asintoto di una generica curva, di equazione $y = f(x)$, che si sviluppa all'infinito e fisseremo dei criteri per la loro determinazione.



DEFINIZIONE

Una retta r (figura 1) è detta **asintoto della curva** $y = f(x)$ se la distanza di un punto $P \equiv (x, y)$ di questa curva dalla retta (in figura $\delta = \overline{PH}$) tende a zero quando il punto P si allontana indefinitamente sulla curva, rispetto all'origine delle coordinate, cioè quando almeno una delle due coordinate del punto P considerato tende all'infinito.

In simboli, se risulta, cioè con riferimento alla figura 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta = 0 \quad (1)$$

Invece, con riferimento alla figura 2, se risulta:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \delta = 0 \quad (2)$$

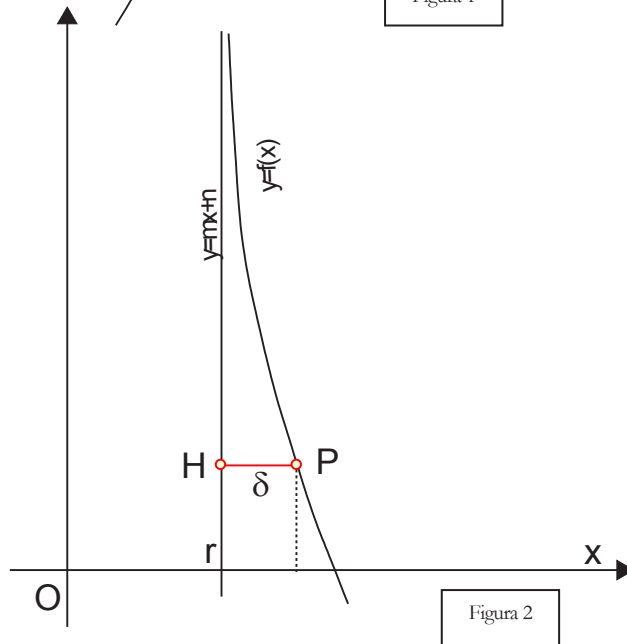
Nel primo caso l'asintoto si dirà **obliquo** e nel secondo caso si dirà **verticale**.

Se la retta r di equazione $y = mx + n$ ha coefficiente angolare nullo, allora l'asintoto obliquo degenera in asintoto **orizzontale**.

Se poniamo in coordinate omogenee la nostra funzione possiamo dare una nuova definizione di asintoto di una funzione:

DEFINIZIONE

Una retta r di equazione $y = mx + n$ dicesi asintoto per la funzione $y = f(x)$ **se è tangente alla curva in un punto all'infinito**.¹



¹ Approfondiremo tale argomento nel prossimo modulo, dopo lo studio delle derivate.

ESEMPIO

Si consideri la funzione $x^2 - 4xy + 8x - 6y + 5 = 0$ in forma implicita. Questa in coordinate omogenee diviene: $x^2 - 4xy + 8xt - 6yt + 5t^2 = 0$. L'intersezione della curva con la retta impropria all'infinito $t = 0$ fornisce le direzioni degli asintoti, cioè $x^2 - 4xy = 0$. Esplicitando quest'ultima avremo un asintoto parallelo all'asse delle ordinate (di equazione $x = a$) ed un altro parallelo alla retta $x - 4y + b = 0$. Se osserviamo, poi, che la curva in esame è un'iperbole con centro nel punto $C \equiv \left(\frac{6}{19}, -\frac{5}{19}\right)$ e ricordiamo che gli asintoti devono passare per tale punto, possiamo determi-

nare univocamente le costanti a e b . Si ha, allora, che il primo asintoto ha equazione $x = \frac{6}{19}$ ed il secondo $x - 4y - \frac{26}{19} = 0$.

CLASSIFICAZIONE DEGLI ASINTOTI

Già nell'introduzione abbiamo visto una diversa tipologia di asintoti.

Essi possono, in sostanza, suddividersi in quattro grandi categorie:

- a) Asintoti verticali;
- b) Asintoti obliqui;
- c) Asintoti orizzontali;
- d) Curve asintotiche.

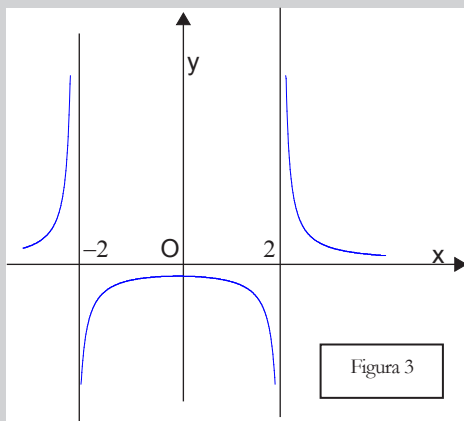
A. ASINTOTI VERTICALI

Si consideri la funzione $y = f(x)$ definita nell'insieme $\mathfrak{I}$, fatta eccezione al più per un numero finito (o infinito) di punti di accumulazione non di aderenza dell'insieme $\mathfrak{I}$.

Detto x_0 uno di tali punti, se in x_0 la funzione presenta una discontinuità di seconda specie con limiti destro e sinistro infinito, ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad (3)$$

allora la retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per la funzione $y = f(x)$.

ESEMPI

Si consideri la funzione: $y = \frac{2}{x^2 - 4}$ il cui grafico è dato dalla figura 3. La funzione è definita per qualsiasi valore di x diverso da -2 e $+2$.

I punti $x_0 = -2$ ed $x_0 = +2$ sono punti di accumulazione del dominio della funzione. Essendo, poi:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +2^+} \frac{2}{x^2 - 4} = +\infty \quad \text{nonché}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{x^2 - 4} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \text{segue che le}$$

rette di equazioni $x = -2$ e $x = +2$ sono asintoti verticali della funzione.

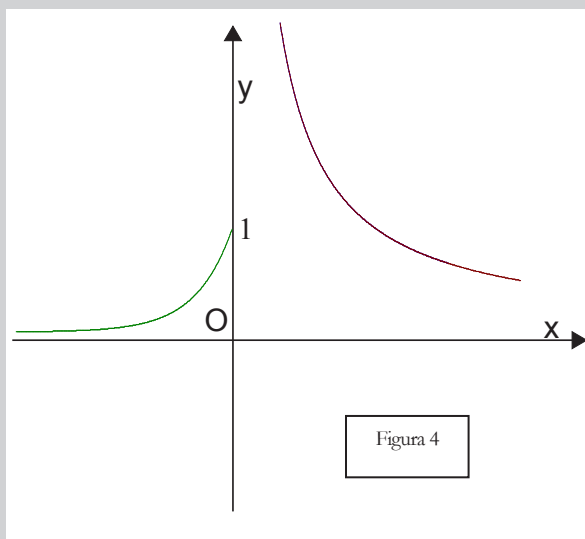


Figura 4

La funzione: $y = \begin{cases} e^{2x} & \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{2x} & \forall x > 0 \end{cases}$, il cui

grafico è dato dalla figura 4, presenta nell'intorno destro dell'origine un punto di discontinuità.

Essendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$$

è subito visto che l'asse delle ordinate è un asintoto verticale a destra della funzione.

* * * *

La funzione: $y = \ln|x|$, il cui grafico è dato dalla figura 5, presenta nell'origine un punto di discontinuità di seconda specie.

Essendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln|x| = -\infty$$

è subito visto che l'asse delle ordinate è un asintoto verticale della funzione.

B. ASINTOTI OBLIQUI

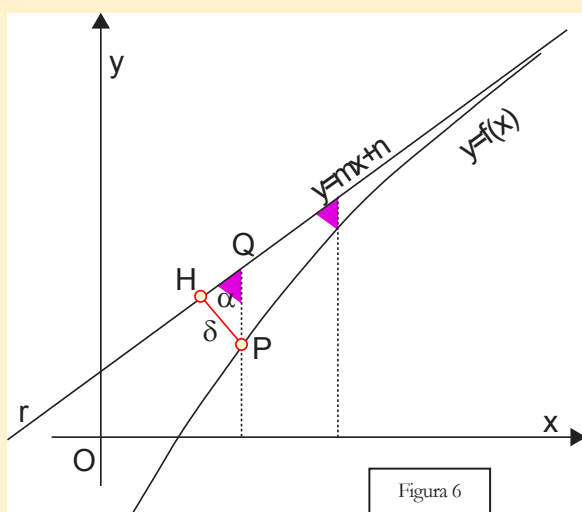


Figura 6

Con riferimento alla figura 6, sia $y = f(x)$ una funzione definita in un insieme illimitato per la quale è soddisfatta la condizione (solo necessaria):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Ebbene, se esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n \quad (5)$$

con $m, n \in \mathbb{R}$, allora la retta di equazione:

$$y = mx + n \quad (6)$$

risulta essere un asintoto obliquo per la funzione data $y = f(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo, allora, con riferimento alla figura 6, che la retta di equazione [6] per $x \rightarrow +\infty$ sia un

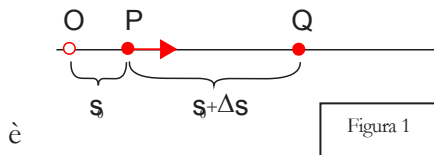
LA DERIVATA

INTRODUZIONE

Nello studio delle funzioni monotone abbiamo già definito cosa si intendeva per **rapporto incrementale** di una funzione.

- Vediamone ora un significato cinematico.

A tale scopo consideriamo un punto mobile P (figura 1) che si muove lungo una retta con moto vario. Lo spazio percorso dal punto è una funzione del tempo, ovvero $s = s(t)$. Indicando con Δs

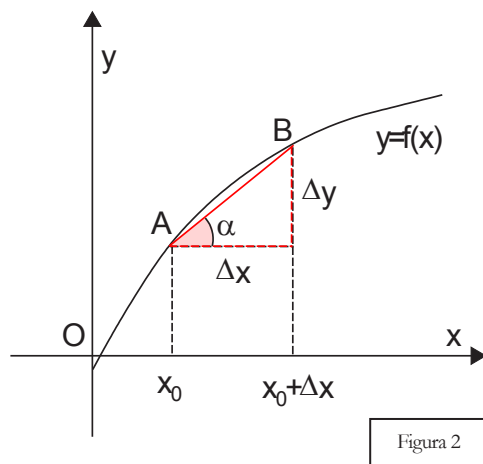


un intervallo di spazio percorso dal punto e con Δt l'intervallo di tempo impiegato, si ha che la velocità media data da:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ossia: la **velocità media** di un punto mobile nel tempo Δt è uguale al rapporto incrementale relativo allo spazio Δs percorso dal punto ed al tempo Δt impiegato a percorrerlo.

- Il suo significato goniometrico.

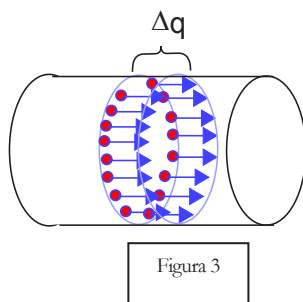


Dalla figura 2, si vede com'è costruito il rapporto incrementale. È subito visto, dal triangolo in colore, che:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

cioè: il rapporto incrementale è uguale alla tangente goniometrica dell'angolo α individuato dall'asse delle ascisse e dalla retta passante per il punto A e per il punto B , di ascisse rispettivamente x_0 ed $x_0 + \Delta x$.

- Il suo significato “elettrico”.



Come sappiamo dalla Fisica, se si considera un conduttore cilindrico, ai cui capi vi è una differenza di potenziale ΔV , gli elettroni (figura 3) di conduzione sono sottoposti ad una forza elettrica che li fa muovere in una data direzione.

Ebbene, se con $Q(t)$ indichiamo la quantità di carica elettrica che attraversa la sezione del conduttore al tempo t , il rapporto:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

rappresenta la **quantità media** di cariche che attraversa la sezione del filo nell'intervallo di tempo Δt .

- Il suo significato “idraulico”.

Se consideriamo due vasi comunicanti (figura 4), riempiti di uno stesso liquido ad altezze piezometriche diverse, si osserva il passaggio del liquido dal vaso A al vaso B

nel condotto C . Se indichiamo con m la quantità di massa del liquido che attraversa la sezione del condotto C , è subito visto che la portata p del condotto è data da:

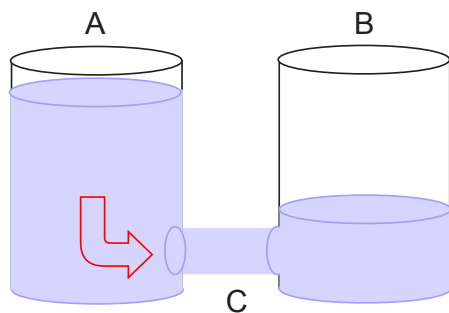


Figura 4

$$p = \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

ovvero: la portata del condotto C è il rapporto tra la massa del liquido che passa attraverso una sua sezione in un certo intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

Si osservi che tale rapporto è un **valor medio**; infatti, la portata diminuisce man mano che diminuisce il dislivello.

Lasciamo al lettore il compito di trovare altre interpretazioni del rapporto incrementale, traendole dalle più comuni situazioni che la vita quotidiana offre.

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in $\mathfrak{I}$ e continua nel punto x_0 interno ad $\mathfrak{I}$ e sia Δx un incremento della variabile x scelto in modo che $x_0 + \Delta x$ cada internamente ad $\mathfrak{I}$, si dice derivata della funzione $y = f(x)$ il numero reale, **SE ESISTE FINITO**, dato dal limite del rapporto incrementale quando si fa comunque tendere a zero l'incremento Δx , ovvero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Tale valore si indica con una delle seguenti scritture¹:

$$f'(x_0); \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}; \quad [Df(x)]_{x=x_0}; \quad [\nabla f(x)]_{x=x_0} \quad (2)$$

Nel caso in cui il limite [2] non esiste, si dice che la funzione **non è derivabile** in x_0 , mentre se il limite [1] vale ∞ (o $\pm\infty$) si dice che la funzione $y = f(x)$ è **derivabile in senso generalizzato** in x_0 .

ESEMPI

Applicando la definizione, calcolare la derivata della funzione $y = x^2 + e^{3x}$ nel punto $x_0 = 1$.

SOLUZIONE

In primo luogo, calcoliamo il rapporto incrementale:

¹ Le notazioni [2] sono state introdotte rispettivamente la prima da Lagrange (1813); la seconda da Leibniz (1675); la terza da Cauchy (1839), mentre Newton (1642) apponeva un punto sulla lettera che indicava la funzione: così, se y indicava la funzione (fluente), $\dot{y}$ rappresentava la derivata. Quest'ultima notazione è tuttora largamente usata in Meccanica Razionale, in Meccanica Superiore, ecc. L'ultima scrittura oltre ad indicare la derivata di una variabile, viene utilizzata nello studio delle funzioni di due o più variabili e prende il nome di **gradiente**.

$$f(1) = 1 + e^3; \quad f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 + e^{3(1 + \Delta x)} = 1 + 2\Delta x + \Delta^2 x + e^3 e^{3\Delta x};$$

$$\Delta f = f(1 + \Delta x) - f(1) = 1 + 2\Delta x + \Delta^2 x + e^3 e^{3\Delta x} - 1 - e^3 = 2\Delta x + \Delta^2 x + e^3 (e^{3\Delta x} - 1);$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta^2 x + e^3 (e^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 2 + \Delta x + 3e^3 \left(\frac{e^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} \right)$$

poi passiamo al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \Delta x + 3e^3 \left(\frac{e^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} \right) \right) = 2 + 3e^3$$

per cui la derivata della funzione data, nel punto $x_0 = 1$, è:

$$f'(1) = 2 + 3e^3.$$

* * * *

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nel punto $x_0 = 0$.

SOLUZIONE

La funzione data è continua in $\mathbb{R}$. Applicando la definizione derivata si ha:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(0 + \Delta x) \sin \left(\frac{1}{0 + \Delta x} \right) - 0}{\Delta x} = \sin \left(\frac{1}{\Delta x} \right)$$

il cui limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{\Delta x} \right)$$

come precedentemente abbiamo visto non esiste. La funzione data, dunque, pur essendo continua nell'origine, non è ivi derivabile.

* * * *

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = f(x) = \sqrt{|x|}$$

nel punto $x_0 = 0$.

SOLUZIONE

La funzione data è continua in $\mathbb{R}$. Applicando la definizione derivata si ha:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{|0 + \Delta x|} - \sqrt{|0|}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}$$

il cui limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \infty.$$

Ne segue che la funzione data, dunque, pur essendo continua nell'origine, è ivi derivabile in senso generalizzato.

estremi (in quanto vale zero), quindi almeno un punto con le caratteristiche richieste esiste. Per provare che ce ne sono infiniti, basta ripetere il ragionamento applicando il teorema sui sottointervalli del tipo $\left[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi} \right] \forall n \in \mathbb{N}$.

Per le funzioni derivabili in un intervallo valgono alcuni risultati di grande importanza applicativa, che discendono essenzialmente dal seguente famosissimo teorema di Lagrange.

IL TEOREMA DI LAGRANGE ⁶ (o del valor medio)

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato ed $y = f(x)$ una funzione ivi continua e derivabile in $]a, b[$. Esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che risulti:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \quad (45)$$

Prima di passare alla dimostrazione del teorema diamone, prima, una suo significato geometrico.

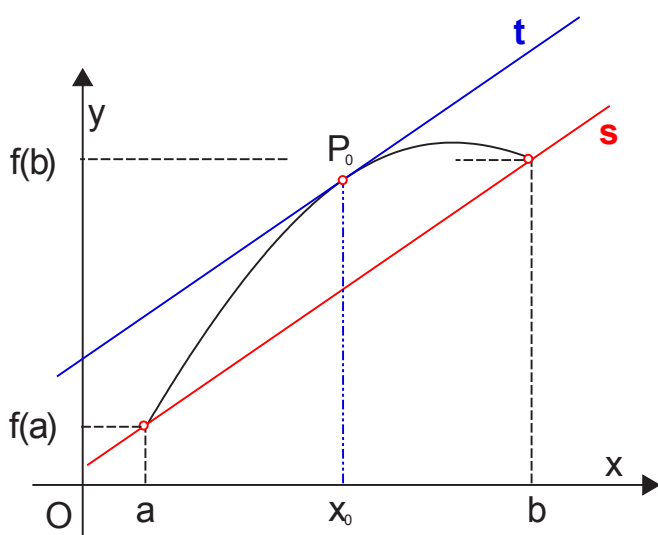


Figura 26

Considerata una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$ e ivi soddisfacente le ipotesi del teorema di Lagrange (continuità su tutto e derivabilità almeno all'interno), se ne tracci il grafico (vedi figura 26) in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

In un secondo momento si tracci il grafico della retta, s , passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Questa retta, come sappiamo, ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che, in forma esplicita, diventa:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \quad (46)$$

La [44] afferma, in sostanza, che, data la funzione $y = f(x)$ soddisfacente le ipotesi del teorema di Lagrange, esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo definizione di $f(x)$ in corrispondenza del quale la tangente t al grafico di $f(x)$ è parallela alla retta s passante per i “bordi” del grafico:

⁶ **Lagrange, Giuseppe Luigi** (Torino 1736 - Parigi 1813), matematico e astronomo italiano di origine francese. Studiò presso l'università della città natale; nominato professore di geometria presso la Scuola di artiglieria di Torino all'età di 19 anni, nel 1758 fondò la società scientifica che in seguito divenne l'Accademia reale delle Scienze di Torino. Nel 1766 fu nominato direttore dell'Accademia delle Scienze di Berlino e vent'anni più tardi, su invito del re Luigi XVI, si recò a Parigi. Durante la Rivoluzione francese fu a capo della commissione che si occupava di fissare un nuovo sistema di pesi e misure e nel 1797 fu nominato professore all'Ecole Polytechnique, da poco fondata; il regime di Napoleone lo elesse membro del senato e lo nominò conte. Tra i maggiori matematici del XVIII secolo, Lagrange ideò il calcolo delle variazioni, riordinò il campo delle equazioni differenziali e lavorò alla teoria dei numeri. Tra le sue ricerche in campo astronomico ricordiamo i calcoli della librazione lunare e dei moti dei pianeti. La sua opera principale è *Mécanique analytique* (1788).

$(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $y = f(x)$ continua su $[a, b]$, derivabile per lo meno su $]a, b[$. Consideriamo per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $\delta(x)$ (figura 27) così costruita:

$$\delta(x) = \overline{AB} = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right] \quad (47)$$

ovvero, distanza delle ordinate calcolate rispettivamente sulla funzione $y = f(x)$ e sulla retta di equazione [46].

La funzione $\delta(x)$ risulta (essendole le componenti):

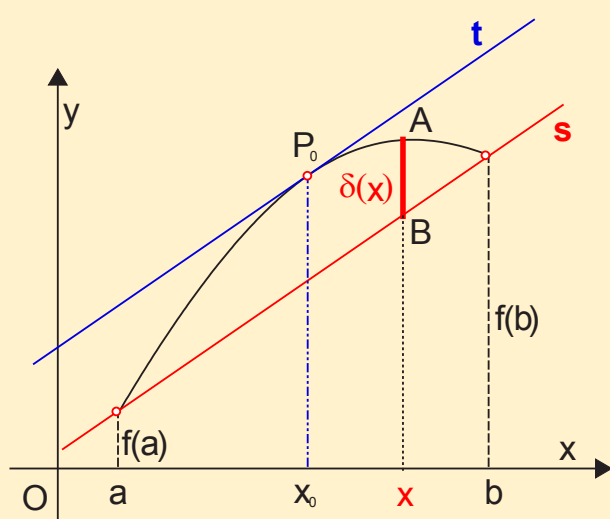


Figura 27

- continua in $x \in [a, b]$;
- derivabile in $]a, b[$;
- agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ assume valori uguali, ovvero si ha: $\delta(a) = \delta(b) = 0$;

e, quindi, a norma del teorema di Rolle, esisterà almeno un punto x_0 appartenente all'intervallo $]a, b[$ in cui risulta $\delta'(x_0) = 0$.

Allora, derivando la [47], segue:

$$\delta'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ed anche, per la supposta condizione $\delta'(x_0) = 0$:

$$\delta'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e da qui la [45], come dovevasi dimostrare. ▲

ESEMPI

Si consideri la funzione $y = \sqrt{x}$ sull'intervallo $[0, 4]$. Si chiede di controllare se è applicabile il teorema di Lagrange in tale intervallo.

SOLUZIONE

Sì: la funzione è continua sull'intervallo chiuso $[0, 4]$ e derivabile su tutto l'intervallo aperto $]0, 4[$ (figura 28). È pur vero che la funzione non è derivabile in $x = 0$, perché in tale ascissa la derivata diventa infinita, ma si tratta di un estremo dell'intervallo, non di un suo punto interno. Per calcolare il valore di x_0 , sarà sufficiente applicare la [44]. Infatti, si ha:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{2} = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

da cui segue $x_0 = 1$.

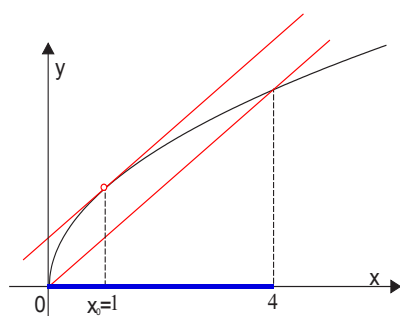


Figura 28

* * * *

Si consideri un arco di parabola $y = ax^2 + bx + c$, compreso tra due punti P e Q di ascissa p e q . Si dimostri che la corda PQ è parallela alla tangente condotta per il punto di ascissa

$$x_0 = \frac{p+q}{2}.$$

SOLUZIONE

Il teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[p, q]$ afferma che esiste almeno un punto, x_0 , interno all'intervallo $[p, q]$, tale che:

$$\frac{(aq^2 + bq + c) - (ap^2 + bp + c)}{q - p} = 2ax_0 + b.$$

Infatti, basta semplificare per concludere.

OSSERVAZIONE

Il teorema di Lagrange è noto anche come “**teorema del valor medio**”.

Con riferimento alla Fisica, ricordiamo che, dato lo spazio percorso in funzione del tempo attraverso la funzione $s = s(t)$, la derivata $s'(t) = \frac{ds}{dt}$ fornisce, istante per istante, la velocità del moto:

$s'(t) = v(t)$. Se l'intervallo temporale nel quale vogliamo studiare il moto è $a \leq t \leq b$, la velocità me-

dia è data invece dal rapporto $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$. Ricordiamo che “velocità media” di un moto significa “quella velocità la quale, se fosse stata mantenuta costante per tutto il tempo del moto, avrebbe dato luogo al medesimo spostamento complessivo che si è registrato in regime di velocità varia”.

Ora, il valore $t = x_0$ di cui il teorema di Lagrange assicura l'esistenza, è tale che:

$$s'(x_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a};$$

quindi la velocità in tale istante è $v(x_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ che è uguale alla velocità media del moto.

In definitiva, Lagrange assicura (se, come di norma avviene, la funzione $s(t)$ soddisfa a determinate ipotesi di regolarità) l'esistenza di un istante x_0 nel quale la velocità istantanea è uguale alla velocità media del moto: di qui la denominazione del teorema.

OSSERVAZIONE

Se per caso la funzione $y = f(x)$ è tale che $f(a) = f(b)$, si deduce che in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$.

Questo caso particolare altro non è che il **Teorema di Rolle** prima visto. Questo fu dimostrato prima di quello di Lagrange.

Se si riconrolla la dimostrazione del teorema di Lagrange, si vede subito che essa utilizza proprio una funzione ausiliaria che assume valori uguali agli estremi.

Le ipotesi di continuità in $[a, b]$ e derivabilità almeno in $]a, b[$, ripetiamo, sono essenziali per la validità del teorema, come mostrano gli esempi sopra riportati, invitando il lettore a trovare rappresentazioni analitiche di funzioni con le caratteristiche di quelle proposte.

CONSEGUENZE NOTEVOLI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

A

Se una funzione ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), essa è costante in quell'intervallo

DIMOSTRAZIONE

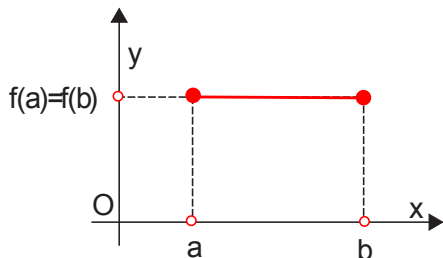


Figura 29

Se è $f'(x) \equiv 0$ su tutto un intervallo $\mathfrak{I}$ (figura 29), allora, presi due qualsivoglia punti $x_1, x_2 \in \mathfrak{I}$, dovrà essere necessariamente $f(x_1) = f(x_2)$, in quanto, se così non fosse, ossia se $f(x_1)$ fosse diverso da $f(x_2)$, per il teorema di Lagrange esisterebbe, fra x_1 ed x_2 , un'ascissa x_0 nella quale si avrebbe:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

contro l'ipotesi che $f'(x)$ sia identicamente nulla in $\mathfrak{I}$.

Ciò prova che la funzione è costante su $\mathfrak{I}$.

Si noti come l'inverso di questo corollario sia banale (la derivata di una costante è zero), anche se la funzione costante non è definita su un intervallo. Per questo corollario è invece essenziale che la funzione sia definita in un intervallo. Per esempio la funzioni

- $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ (figura 30);
- $y = \text{signum}(x)$;
- ecc.

hanno derivate nulla su $\mathbb{R}$, ma non sono costanti. ▲

B

Se due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ hanno derivate uguali in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), allora differiscono per una costante.

DIMOSTRAZIONE

Se è $f'(x) \equiv g'(x)$ su tutto un intervallo $\mathfrak{I}$, allora, considerata la funzione ausiliaria $F(x) = f(x) - g(x)$, si avrà $F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0$ su $\mathfrak{I}$ da cui, per il teorema precedente, risulta $F(x) = k$ con k costante, e quindi $F(x) = f(x) - g(x) = k$, come volevasi dimostrare. ▲

Questo corollario ha grande importanza, come vedremo nel calcolo degli integrali, per quanto riguarda il problema della ricerca delle *primitive* di una funzione, cioè delle funzioni F definite su un intervallo che abbiano come derivata una assegnata funzione f .

Se il problema ha una soluzione F , tutte e sole le soluzioni sono del tipo $F+k$, con k costante arbitraria.

Che $F+k$ sia soluzione è banale, il corollario ci assicura che al variare di k , $F+k$ fornisce *tutte* le

OSSERVAZIONE

Se la funzione $y = f(x)$ non è derivabile solo in un numero finito di punti dell'intervallo chiuso $[a, b]$, allora per determinare il massimo od il minimo assoluto, supposto sempre che la funzione sia continua in $[a, b]$, bisogna confrontare le ordinate $f(a)$ ed $f(b)$ non solo con le ordinate degli eventuali punti di massimo o minimo relativi, ma anche con le ordinate dei punti dove la derivata non esiste.

ESEMPIO

Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $y = \sqrt{1 - \sin x}$ nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$.

SOLUZIONE

La derivata per $\sin x \neq 1$ vale:

$$y' = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1 - \sin x}}.$$

Questa si annulla solo per $x = \frac{3}{2}\pi$, mentre per $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione non è derivabile, come abbiamo già visto in un altro esercizio. Dobbiamo, dunque, calcolare il valore della funzione nei punti:

$$x = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3}{2}\pi; x = 2\pi.$$

Si ha:

$$f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sqrt{2}; f(2\pi) = 1.$$

La funzione, quindi, ha un minimo assoluto per $x = \frac{\pi}{2}$ (in cui la funzione non è derivabile) ed un massimo assoluto per $x = \frac{3}{2}\pi$ (per il quale la funzione ha anche massimo relativo).

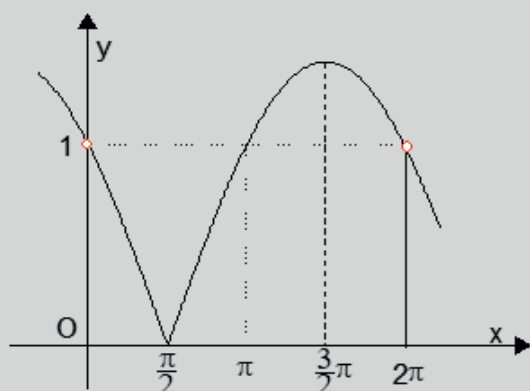


Figura 42

APPROFONDIMENTI

Introduciamo ora nuove definizioni di continuità e di derivabilità, più generali di quelle classiche. Il modo in cui sono state date queste nuove definizioni non è l'unico (vedi osservazione 3). Abbiamo mostrato alcune proprietà e un'applicazione di questo nuovo concetto di derivata che "migliora" il metodo delle derivate successive per il calcolo degli estremi relativi (vedi osservazione 4). Premettiamo le seguenti definizioni e proprietà. (*)

Indichiamo con G l'insieme delle funzioni g definite in un intorno $\mathfrak{I}_g(0)$ di 0, privato al più del punto 0 ed ivi infinitesime.

(*) Periodico Mathesis serie VIII - Volume 3, n.2, Aprile-Giugno 2003.

Def.(1)- Sia $f(x): X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in X, g \in G$. Diremo che $f(x)$ è g -continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = 0.$$

ESEMPI

1. Sia $f(x) = \sin x, g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$. La funzione $f(x)$ è g -continua in 0.

Infatti: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$

2. Sia $f(x) = x, g(x) = x^2, x_0 = 1$. La funzione $f(x)$ non è g -continua in 1.

Infatti: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} \cdot (x - 1) = 1.$

Def.(2)- Sia $f(x): X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in X, g \in G$.

Diremo che $f(x)$ è g -derivabile in x_0 se e solo se è finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)}.$$

Tale limite si indicherà così: $f'_g(x_0)$ e si dirà che esso è la derivata

della funzione $f(x)$ rispetto a g in x_0 .

ESEMPIO

1. Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}, g(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 0$. Si ha $f'_g(0) = 0$ il che implica che la funzione data è g -derivabile in $x_0 = 0$.

2. Sia $f(x) = x, g(x) = x^2, x_0 = 0$. La funzione data è non g -derivabile in $x_0 = 0$.

OSSERVAZIONE 1

Se $f(x)$ è g -derivabile in x_0 allora $f(x)$ è continua in x_0 nel senso classico, infatti, poiché il

limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)}$ esiste ed è finito e poiché la funzione $g \in G$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

Se $f(x)$ è g -derivabile non implica che $f(x)$ è derivabile nel senso classico come si evince dal secondo esempio visto prima.

Se $f(x)$ è g -continua in x_0 allora non è detto che $f(x)$ sia continua in x_0 nel senso classico,

infatti, basta considerare la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}, g(x) = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 0$.

OSSERVAZIONE 2

Se $g(x) = x$ le definizioni di funzione g -continua e funzione g -derivabile coincidono che le definizioni classiche di continuità e derivabilità.

ESEMPIO

Applicare la formula di MacLaurin alla funzione $y = \sqrt{1-2x}$.

SOLUZIONE

Calcoliamo della funzione le derivate:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}; f''(x) = \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}; f'''(x) = \frac{-3}{(1-2x)^2\sqrt{1-2x}}; \text{ecc.};$$

che nell'origine diventano:

$f(0) = 1; f'(0) = -1; f''(0) = -1; f'''(0) = -3; \text{ecc.}$, mentre il termine [73], supposto di voler arrestare il procedimento al quarto termine, scelto $hx = 0.2$, diviene:

$$R_n(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0.2) = \frac{15}{4!} \frac{x^4}{\sqrt{(1-0.4)^7}} = 3.735516345x^4.$$

Si potrà, allora, scrivere:

$$y = \sqrt{1-2x} = 1 - \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{3!}x^3 + 3.735516345x^4$$

e, semplificando:

$$y = \sqrt{1-2x} = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + 3.735516345x^4.$$

Per provare la bontà dell'approssimazione scegliamo per x il valore $x = 0.25$. Calcoliamo per questo valore il primo ed il secondo membro dell'ultima uguaglianza. Si ha:

$$y = \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-0.5} = 0.707106781$$

$$1 - 0.25 - \frac{1}{2}(0.25)^2 - \frac{1}{2}(0.25)^3 + 3.735516345(0.25)^4 = 0.725529361$$

e la differenza risulta essere di 0.01842258.

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

La nozione di funzione convessa è piuttosto recente e risale alla fine dell'Ottocento. Gibbs⁶ e Maxwell⁷ la utilizzarono per modellare le relazioni fra le variabili termodinamiche. È rilevante in molti

⁶ Josiah Willard Gibbs, fisico americano (New Haven, Connecticut, 1839-1903), compì gli studi nell'università Yale, nella quale insegnò fisica matematica dal 1871 fino alla morte. Studiò anche ad Heidelberg, in Germania, dove fu influenzato dalle idee di Kirchhoff e di Helmholtz. Egli eseguì importanti ricerche di termodinamica, formulando la legge delle fasi, fondamentale negli studi degli equilibri in fisica ed in chimica. Nel campo della matematica si occupò della teoria del calcolo vettoriale, elaborando un sistema di analisi, particolarmente utile nella fisica matematica. Negli ultimi anni si dedicò in particolare alla teoria cinetica dei gas, sviluppando una meccanica statistica che permette di dimostrare il principio dell'equipartizione dell'energia.

⁷ James Clerk Maxwell nacque ad Edimburgo nel 1831. Figlio di un modesto avvocato, crebbe in campagna rivelando precocità di interessi ed un'eccezionale abilità nel costruire ed usare piccole apparecchiature. Entrato nell'Accademia di Edimburgo, già a quindici anni scrisse un saggio sul tracciamento delle curve ovali che venne parzialmente pubblicato negli atti della Royal Society. Nel 1847 entra all'Università di Edimburgo, dove studia, oltre alla matematica e alla fisica, chimica, filosofia e logica. Nel 1850, senza avere conseguito alcun diploma, passa a Cambridge, dove allaccia rapporti destinati a durare a lungo con il futuro Lord Kelvin. Maxwell si diplomò al Trinity College nel 1854 e vi rimase fino al 1856, quando cominciò ad insegnare al Marischal College di Aberdeen. Nel 1859, una ricerca sulla stabilità del sistema degli anelli di Saturno, che gli valse l'assegnazione del premio Adams, lo rivelò come uno dei maggiori fisici-matematici del suo tempo. Dal 1860 al 1865 fu docente al King's College di Londra. A questo periodo risalgono le sue memorie principali sulla teoria dei colori, sulla teoria cinetica dei gas e sulla teoria dinamica del campo elettromagnetico. Costretto ad abbandonare l'insegnamento per ragioni di salute, si ritirò nella sua villa di Glenlair, dalla quale si allontanò solo per

contesti, perché si potrebbe dire che, tra le funzioni non lineari, quelle convesse sono quelle che più si avvicinano alle lineari.

L'ambiente in cui trovano la massima applicazione è nello studio di funzioni a due o più variabili, ad esempio, del tipo $z = f(x, y)$, ecc.

Noi, però, ci occuperemo solo di funzioni reali di una variabile reale.

Intanto ricordiamo la definizione di convessità nota già dalla Geometria Elementare:

DEFINIZIONE

Un insieme A del piano si dice convesso se, comunque si scelgono due punti $P_0, P_1 \in A$, il segmento P_0P_1 di estremi P_0 e P_1 è tutto contenuto in A . (76)

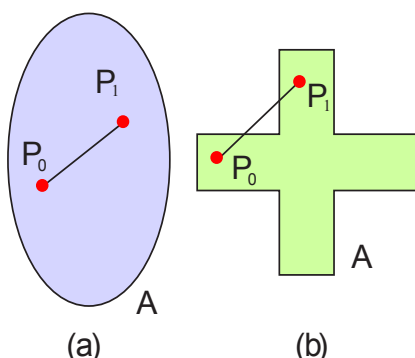


Figura 49

La figura 49a mostra un insieme convesso, mentre la figura 49b mostra un insieme non convesso, ossia concavo.

Formuliamo, ora, la definizione di convessità per una funzione reale di variabile reale.

Sia γ il grafico di una funzione $y = f(x)$, derivabile all'interno del campo di esistenza e sia:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (77)$$

la retta tangente a γ nel punto $P \equiv (x_0, y_0)$.

Ci proponiamo di determinare la posizione che hanno, rispetto alla tangente suddetta, i punti di γ che si trovano in un intorno di P .

Per questo chiameremo corrispondenti nell'intorno di P quei punti che appartengono a γ ed alla tangente aventi la stessa ascissa. Ad esempio, sono corrispondenti i punti (figura 50) A_1, B_1 e A_2, B_2 che hanno per ascissa, rispettivamente $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$.

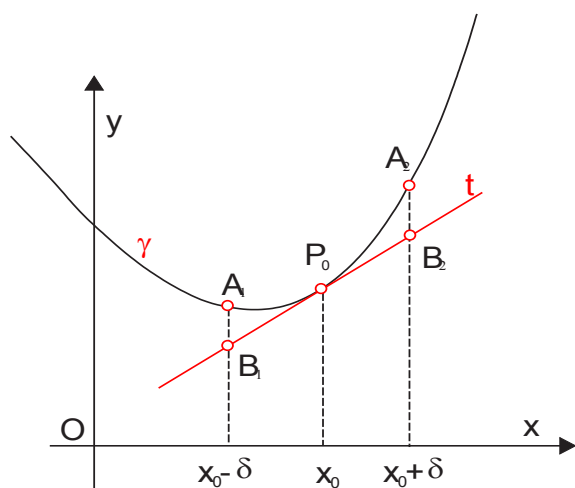


Figura 50

DEFINIZIONE

Si dice che nel punto P , di ascissa x_0 , la curva γ volge la **concavità verso la direzione positiva dell'asse y** , se in un intorno del punto P , i punti di γ che si trovano, tanto a sinistra che a destra di P , hanno ordinata maggiore dei loro corrispondenti che appartengono alla retta t , cioè se nello stesso tempo valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 - \delta)}{x_0 - \delta} &> t \\ \frac{f(x_0 + \delta)}{x_0 + \delta} &> t. \end{aligned} \quad (78)$$

Le [78] possono anche scriversi al seguente modo:

compiere alcuni viaggi, tra i quali uno in Italia. Fu durante il soggiorno a Glenlair che Maxwell completò la sua teoria cinetica dei gas e scrisse il *Trattato sull'elettricità ed il magnetismo*, edito nel 1873, che contiene completamente sviluppata la teoria della luce e del campo elettromagnetico. Nel 1871 gli venne offerta la cattedra di fisica all'Università di Cambridge e la direzione del nuovo Cavendish Laboratory. Morì a Cambridge nel 1879.

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

GLI ZERI DI UNA FUNZIONE

GENERALITÀ

Sia $f(x)$ una funzione reale, continua in un intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$ e si debbano calcolare, ove esistono, le radici dell'equazione:

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Supposto che $f(x)$ si annulli un numero finito di volte in $X \subseteq \mathbb{R}$, un'operazione preliminare da compiere è quella che consiste nel *separare le radici*, ossia nel determinare, per ogni radice un intervallo che la contenga e nel quale non ne cadono altre.

Un intervallo siffatto si chiama *intervallo di separazione*, ed i suoi estremi rappresentano due valori approssimati, rispettivamente per difetto e per eccesso, della radice fra essi compresa.

SEPARAZIONE DELLE RADICI PER UN'EQUAZIONE ALGEBRICA

In primo luogo, esaminiamo i seguenti teoremi, che non dimostriamo per semplicità di trattazione.

TEOREMA A

Supponiamo di avere un'equazione algebrica:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

di grado n ed a coefficienti reali. Osserviamo subito che se α è una soluzione dell'equazione data, risulta:

$$|\alpha| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \quad (3)$$

dove $A = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

Se in più supponiamo che a_n sia positivo¹ e che esista un indice $r < n$ tale che risulti:

$$a_{n-1} \geq 0, \quad a_{n-2} \geq 0, \quad a_{n-3} \geq 0, \quad \dots, \quad a_{n-(r-1)} \geq 0 \\ a_{n-r} < 0 \quad (4)$$

allora se β è soluzione dell'equazione, risulta:

$$\beta < 1 + \sqrt[r]{\frac{B}{a_n}} \quad (5)$$

dove B è il massimo dei valori assoluti dei coefficienti negativi.

Cambiando x in $-x$, otteniamo un minorante delle radici dell'equazione assegnata; in tal

¹ Il che è sempre possibile

modo abbiamo ottenuto un intervallo cui appartengono tutte le radici.

ESEMPIO

Vogliamo isolare le radici reali dell'equazione:

$$3x^5 - x^2 + 4x - 2 = 0.$$

SOLUZIONE

Per il teorema (A) si ha:

$$|\alpha| < 1 + \frac{A}{|a_n|} = 1 + \frac{4}{3} = 2,33$$

ed anche:

$$|\beta| < 1 + \sqrt[n]{\frac{B}{|a_n|}} = 1 + \sqrt[5]{\frac{2}{3}} = 1,81.$$

Cambiando x in $-x$, otteniamo un minorante delle radici dell'equazione assegnata, ovvero,

$$-3x^5 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

che possiamo ridurre nella forma

$$3x^5 + x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Per quanto detto nel punto (A) si ha, pure:

$$\alpha > \left(-1 + \frac{A}{|a_n|}\right) = -\left(1 + \frac{4}{3}\right) = -2,33$$

per cui la totalità x_k delle radici dell'equazione data saranno comprese nell'intervallo:

$$-2,33 < x_k < 1,81.$$

(Si vedrà, più avanti, che l'unica soluzione dell'equazione è $x_0 = 0,53853234130800944$).

Un'altra limitazione si può ottenere dal seguente teorema:

TEOREMA B

Se in un punto c la funzione $f(x)$ e tutte le sue derivate, fino a quella di ordine n hanno lo stesso segno, allora l'equazione non può ammettere alcuna radice α maggiore di c .

ESEMPIO

Nessuna soluzione dell'equazione:

$$3x^5 - x^2 + 4x - 2 = 0$$

è maggiore di $c = 1$.

SOLUZIONE

Posto $f(x) = 3x^5 - x^2 + 4x - 2$, calcoliamone le derivate successive. Si ha:

$$f'(x) = 15x^4 - 2x + 4; \quad f''(x) = 60x^3 - 2; \quad f'''(x) = 180x^2; \quad f^{(4)}(x) = 360x; \quad f^{(5)}(x) = 360$$

che valutiamo nel punto $c = 1$. Segue:

$$f(1) = 4; \quad f'(1) = 17; \quad f''(1) = 58; \quad f'''(1) = 180; \quad f^{(4)}(1) = f^{(5)}(1) = 360$$

e, quindi, a norma del teorema (B), nessuna soluzione dell'equazione data è maggiore di 1.

$$\frac{2x^4 + x - 6}{x^2(x-2)^3} = \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{37}{4(x-2)^2} + \frac{7}{(x-2)^3}.$$

L'utilità di una siffatta decomposizione come la (*+*), renderà agevole, veloce e senza errori il calcolo di particolari integrali che vedremo in seguito.

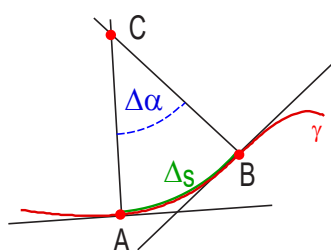
APPROFONDIMENTO

LA CURVATURA ED IL RAGGIO DI CURVATURA DELLE CURVE PIANE

Tutte le curve piane, come si è ampiamente constatato finora, hanno curvatura variabile, ovvero si arcuano più o meno in prossimità di un loro punto.

La parabola, l'iperbole, ad esempio, hanno maggiore curvatura (si arcuano di più) nel vertice.

Figura 7



Sappiamo che in una circonferenza il raggio è la distanza costante fra un suo punto ed il centro C , come pure la lunghezza Δs di un suo arco, che sottende un angolo $\Delta \alpha$, è uguale $\Delta s = R \cdot \Delta \alpha$; per cui il raggio lo si potrà definire ora come rapporto **costante** fra la lunghezza di un arco e l'angolo al centro corrispondente.

Vediamo se un concetto analogo è definibile per una curva qualsiasi.

Prendiamo in esame, per semplicità di disegno, una linea piana γ come quella in figura 7, e, fissatone un punto A , conduciamo per esso la normale alla linea; conduciamo la normale, poi, anche in un altro punto B (prossimo ad A) e diciamo $\Delta \alpha$ l'angolo formato dalle due rette.

Potremmo definire il **raggio di curvatura** della linea come il rapporto dell'arco Δs (da A a B) all'angolo $\Delta \alpha$; ma è chiaro che tale definizione mancherebbe di fondamento, in quanto il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ varierebbe al variare del punto B . Tuttavia, ci viene ancora una volta in aiuto il concetto di limite. Possiamo, infatti, dare la seguente:

DEFINIZIONE

Dicesi **raggio di curvatura** di una linea piana qualunque il limite cui tende il rapporto

$\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ quando l'angolo $\Delta \alpha \rightarrow 0$, cioè quando il punto B si avvicina indefinitamente al punto

A ; ovvero: $R = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$.

Segue, ora, da quanto detto la seguente:

DEFINIZIONE

Dicesi **curvatura** di una linea piana γ in un punto A il **reciproco** del raggio di curvatura in quel punto, ovvero il limite:

$$k = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Si faccia, però, attenzione, perché questa definizione potrebbe, a prima vista, sembrare inesatta; infatti, l'inverso del raggio è, dimensionalmente, l'inverso di una lunghezza, mentre la curvatura è ben altro: è il seguente rapporto $\frac{\text{radianti}}{\text{lunghezza}}$ (che significato avrebbe esprimere il raggio in centimetri, o in chilometri, se non fosse connesso alla variazione angolare?).

La curvatura caratterizza, in ultima analisi, quanto si incurva la linea nel punto considerato.

ESEMPI

- La curvatura di una retta è ovunque costante e vale zero.
- La curvatura di una circonferenza di raggio R , come abbiamo poc'anzi detto, è anch'essa costante e vale $k = \frac{1}{R}$.
- Un'altra curva, nello spazio, però, che ha curvatura costante è l'elica cilindrica.

Vediamo, ora, come si calcola la curvatura per una linea γ , a seconda dell'equazione con cui viene data.

1. La funzione è data in coordinate cartesiane $y = f(x)$.

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e supponiamo che tale funzione sia sufficientemente regolare (ad esempio: abbia derivate di ogni ordine e siano, poi, anche continue).

Con riferimento alla figura 8, è subito visto che risulta $f'(x_a) = \tan \alpha$ ed $f'(x_b) = \tan(\alpha + d\alpha)$.

Differenziando la prima relazione che scriveremo al seguente modo $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, si ha:

$$\frac{d^2 y \cdot dx - dy \cdot d^2 x}{(dx)^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

d'altro canto, essendo $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha}$, dalla precedente uguaglianza si ha:

$$\frac{d^2 y \cdot dx - dy \cdot d^2 x}{(dx)^2} = \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 d\alpha$$

semplificando e dividendo ambo i membri per $(ds)^3$, avremo:

$$\frac{d^2 y \cdot dx - dy \cdot d^2 x}{(ds)^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

che diventa (avendo assunto la x come variabile indipendente le quantità dx sono nulle e anche $d(dx) = 0$): $\frac{d^2 y \cdot dx}{(ds)^3} = \frac{1}{R}$, essendo, infine, $d^2 y = y''(dx)^2$ segue anche:

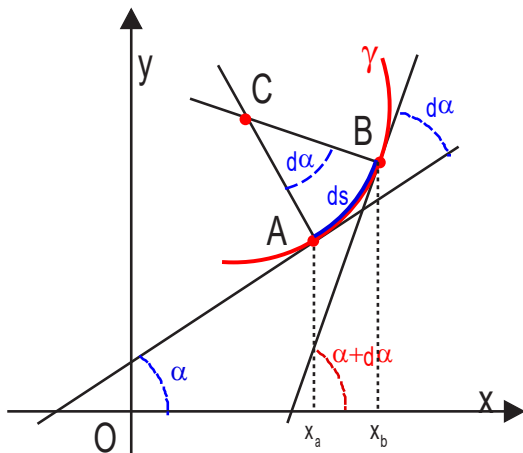


Figura 8

Calcolare l'integrale $\int \frac{5x}{\sqrt{2x-3}} dx$.

SOLUZIONE

Si ha:

1. La funzione da considerare è $x = \frac{3+t^2}{2}$;
2. $t = h(x) = g^{-1}(x) = \sqrt{2x-3}$;
3. $dx = t \cdot dt$;
4. $\int \frac{5x}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{5\left(\frac{3+t^2}{2}\right)}{t} t dx = \frac{5}{2} \int (3+t^2) dx$;
5. $\frac{5}{2} \int (3+t^2) dx = \frac{5}{2} \left(3t + \frac{t^3}{3} \right) + c$;
6. $\int \frac{5x}{\sqrt{2x-3}} dx = \frac{5}{2} \left(3\sqrt{2x-3} + \frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} \right) + c$.

Naturalmente, come si è potuto constatare, il problema nell'uso di questa tecnica è quello di “**sapere indovinare**” la sostituzione giusta, cosa per niente facile.

In ogni caso, proporranno, qui di seguito, senza alcuna pretesa di completezza, solo alcune classiche sostituzioni tra le più semplici o che rivestono speciale interesse.

Ci soffermeremo in particolar modo sulla ricerca delle primitive di alcune funzioni che possono essere ricondotte a quella di una funzione razionale con opportune sostituzioni.

Per il seguito, indicheremo con $R(x)$ una funzione razionale nella variabile reale x .

CASO A

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \quad (\Delta < 0)$$

In questo caso l'integrale può sempre scriversi al seguente modo: $\frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \quad (\Delta < 0)$,

essendo $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

Poiché è $\Delta = p^2 - 4q < 0$ dette $x_1 = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$ ed $x_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix}$ le radici complesse del denominatore, questo si può scrivere anche al seguente modo:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

e l'integrale proposto diviene: $\frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx$. Consideriamo la sostituzione $x - \alpha = t\beta$.

Da qui ricaviamo $dx = \beta dt$. L'ultimo integrale si trasforma così:

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{a\beta} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{a\beta} \arctan t + c = \frac{1}{a\beta} \arctan \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right) + c;$$

e, quindi, la soluzione dell'integrale proposto è:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a\beta} \arctan \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right) + c. \quad (7)$$

Per aiutare la memoria questo risultato può risciversi anche al seguente modo, posto $f(x) = ax^2 + bx + c$, essendo $f'(x) = 2ax + b$:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{-\Delta}} \right) + c. \quad (8)$$

ESEMPIO

Calcolare l'integrale: $\int \frac{1}{5x^2 + 6x + 4} dx$.

SOLUZIONE

In primo luogo, l'integrale dato si scrive al seguente modo:

$$\int \frac{1}{5x^2 + 6x + 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}} dx.$$

Essendo i due numeri complessi $x_1 = \left| \begin{array}{cc} -\frac{3}{5} & -\frac{\sqrt{11}}{5} \\ \frac{\sqrt{11}}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right|$ ed $x_2 = \left| \begin{array}{cc} -\frac{3}{5} & \frac{\sqrt{11}}{5} \\ -\frac{\sqrt{11}}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right|$ gli zeri del deno-

minatore, è subito visto che la [7] fornisce la soluzione seguente:

$$\int \frac{1}{5x^2 + 6x + 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}} dx = \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{5x+3}{\sqrt{11}} \right) + c.$$

L'applicazione della [8], essendo $\Delta = 36 - 80 = -44$, porta alla soluzione:

$$\int \frac{1}{5x^2 + 6x + 4} dx = \frac{2}{\sqrt{-(-44)}} \arctan \left(\frac{10x+6}{\sqrt{-(-44)}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{5x+3}{\sqrt{11}} \right) + c$$

del tutto identico al risultato già trovato.

CASO B

$$\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}) dx.$$

La funzione integranda è una funzione contenente un radicale, d'indice m , di un polinomio di primo grado. Ebbene, tali integrali possono essere ricondotti all'integrazione di una funzione razionale fratta mediante la sostituzione $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

e questa, passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, fornisce:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c). \quad (*)$$

Ora il primo termine della [*] altro non è, per definizione, $F'(x)$, mentre il secondo termine vale $f(x)$, poiché, come indicato prima, $x \leq c \leq x + \Delta x$.

La [*], quindi, diviene: $F'(x) = f(x)$ ossia la tesi. 

Il teorema appena dimostrato, dovuto a Torricelli ⁷ - Barrow ⁸, ci consente di asserire quanto segue:

1. Ogni funzione continua ammette delle primitive;
2. Il simbolo usato per denotare l'integrale indefinito di una funzione $y = f(x)$ può interpretarsi come simbolo di un integrale definito con estremo inferiore un numero a qualsiasi e con estremo superiore il valore di x che si considera, cioè, le due scritture seguenti:

$$\int f(x) dx \quad \int_a^x f(t) dt,$$

sono equivalenti nel senso che denotano una primitiva della funzione $y = f(x)$;

3. La [16] ci dice anche che la funzione $y = F(x)$ è una primitiva della funzione $y = f(x)$, quindi, ricordando quanto fu detto in proposito, può scriversi:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c; \quad (17)$$

4. Alla luce della [17] i metodi d'integrazione studiati per il calcolo degli integrali indefiniti possono essere utilizzati anche per il calcolo degli integrali definiti come vedremo con il prossimo teorema.

IL SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

TEOREMA

Se $y = f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ ed $y = F(x)$ una sua primitiva, allora risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (18)$$

⁷ Evangelista Torricelli (1608 – 1647) è stato uno scienziato italiano. Fu allievo di Galileo e gli succedette come matematico e filosofo alla corte del Gran Duca Ferdinando II di Toscana. È noto soprattutto per l'invenzione del barometro e per i suoi studi di dinamica dei fluidi, in particolare per un teorema di idrodinamica, da lui dimostrato, che porta il suo nome. Si occupò inoltre di meccanica e di molte questioni di carattere matematico. Scrisse diversi lavori su argomenti di geometria.

⁸ Isaac Barrow (1630 – 1677) fu un sacerdote ed un valente matematico inglese ed uno stimato insegnante, maestro tra gli altri di I. Newton. Fu quello che, prima di Newton e Leibniz, più si avvicinò alle concezioni del calcolo infinitesimale, senza riuscire però a coglierne gli aspetti rivoluzionari. Lavorò a diversi problemi di geometria, in particolare ai problemi delle tangenti e delle quadrature.

DIMOSTRAZIONE

Essendo $y = f(x)$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ ed $y = F(x)$ una sua primitiva, sussiste la [17], ovvero $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$.

Sostituendo nella [17], prima $x = a$ e poi $x = b$, si ha $F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} + c$, nonché

$F(b) = \int_a^b f(t) dt + c$. Ora essendo $c = F(a)$, dall'ultima uguaglianza si ricava la [18], ovvero:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**ESEMPI**

Calcolare $\int_1^3 (x+4) dx$.

SOLUZIONE

Consideriamo l'integrale indefinito $\int (x+4) dx$. Una sua primitiva è: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4x$. Per la [18] si ha: $F(3) = \frac{9}{2} + 12 = \frac{33}{2}$ ed $F(1) = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$. Risulta allora $\int_1^3 (x+4) dx = \frac{33}{2} - \frac{9}{2} = 12$.

* * *

Calcolare $\int_0^\pi \sin x dx$.

SOLUZIONE

Da $\int \sin x dx = -\cos x + c$ sia $F(x) = -\cos x$ una primitiva. Essendo $F(\pi) = 1$ ed $F(0) = -1$ è pure, per la [18], $\int_0^\pi \sin x dx = 1 - (-1) = 2$.

* * *

Calcolare $\int_\pi^{2\pi} \cos x dx$.

SOLUZIONE

Da $\int \cos x dx = \sin x + c$ sia $F(x) = \sin x$ una primitiva. Essendo $F(2\pi) = 0$ ed $F(\pi) = 0$ è pure, per la [18], $\int_\pi^{2\pi} \cos x dx = 0$.

OSSERVAZIONI

A) La tesi del primo teorema di Torricelli Barrow, ossia la [16], può essere utilizzata per risolvere due problemi:

1) Il calcolo dei limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, originate da funzioni integrali per le quali è necessario ricorrere al teorema di De L'Hôpital;

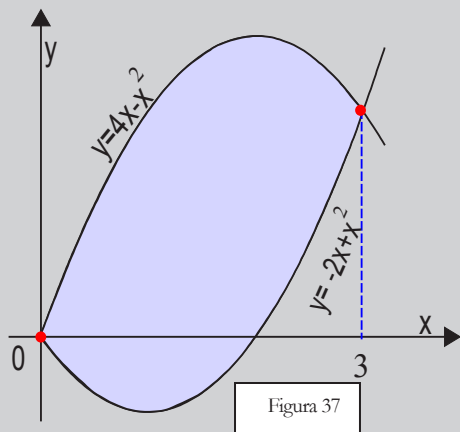
ESEMPIO

Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^t dt}{x^2}$.

SOLUZIONE

* * * *

Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle funzioni $y = 4x - x^2$ ed $y = -2x + x^2$.

SOLUZIONE

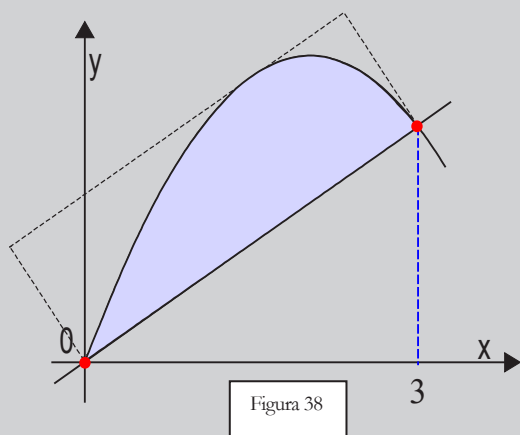
In primo luogo, dobbiamo trovare i punti di intersezione delle due curve.

Uguagliando i secondi membri si ha: $-2x + x^2 = 4x - x^2$. Questa equazione fornisce le soluzioni $x = 0 \wedge x = 3$. Utilizzando il caso B) si ha che l'area della superficie del rettangoloide, in colore nella figura 37, è data da:

$$\begin{aligned} \int_0^3 [(4x - x^2) - (-2x + x^2)] dx &= \\ = \int_0^3 (6x - 2x^2) dx &= \left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = \\ &= 27 - 18 = 9 \end{aligned}$$

* * * *

Calcolare l'area del settore parabolico delimitato dalla parabola $y = 4x - x^2$ e dalla retta di equazione $y = x$.

SOLUZIONE

In primo luogo, dobbiamo trovare i punti d'intersezione della parabola e della retta.

Uguagliando i secondi membri si ha: $x = 4x - x^2$. Le cui soluzioni sono $x = 0 \wedge x = 3$. Utilizzando il caso B) si ha che l'area della superficie del settore parabolico, in colore nella figura 38, è data da:

$$\begin{aligned} \int_0^3 [(4x - x^2) - (x)] dx &= \\ = \int_0^3 (3x - x^2) dx &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \\ = \frac{27}{2} - 9 &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

NOTA

Il segmento parabolico è inscritto in un rettangolo (figura 38) di cui vogliamo calcolare l'area. All'uopo, consideriamo la retta parallela alla bisettrice $y = x$. Essa ha equazione $y = x + k$. Intersecando questo fascio di rette con la parabola data ed annullando il discriminante, si ottiene l'ascissa del punto di tangenza della generica retta del fascio con la parabola. Risolvendo, dunque, il sistema:

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x + k \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + k = 0 \Rightarrow 9 - 4k = 0 \text{ avremo che la retta tangente alla parabola ha}$$

equazione $y = x + \frac{9}{4}$ ed il punto di tangenza avrà coordinate $T \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$. Calcoliamo, ora, la distanza del punto T dalla bisettrice $x - y = 0$ data.

Essa

rappresenta l'altezza del rettangolo e vale: $h = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{15}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$. La base dello stesso è uguale a:

$b = 3\sqrt{2}$. L'area del rettangolo è $A = 3\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{8} = \frac{27}{4}$. Ricordando la nota regola di Archimede⁹ si

ha che l'area della superficie del settore parabolico è uguale a $\frac{2}{3} \cdot \frac{27}{4} = \frac{9}{2}$ come trovato, utilizzando il calcolo integrale.

NOTA

Possiamo utilizzare anche quest'altro metodo per il calcolo della superficie parabolica. La parabola assegnata ha equazione $y = ax^2 + bx + c$ ed è tagliata dalla retta $y = mx + q$. Posto

$R = \Delta \det \begin{pmatrix} m-b & c-q \\ 4a & m-b \end{pmatrix}$ l'area della superficie del settore parabolica è $S = \frac{|R|\sqrt{|R|}}{6a^2}$. Con riferimento alla fi-

gura 38, la parabola ha equazione $y = 4x - x^2$ e la retta ha equazione $y = x$. Avremo

$R = \Delta \det \begin{pmatrix} 1-4 & 0 \\ -4 & 1-4 \end{pmatrix} = 9$ ed $S = \frac{|9|\sqrt{|9|}}{6(-1)^2} = \frac{9}{2}$, come è stato già prima trovato.

OSSERVAZIONE

Sia $y = f(x)$ una funzione integrabile nell'intervallo $[-a, a]$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se la funzione è **pari**, allora l'integrale $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$; (19)

2. Se la funzione è **dispari**, allora l'integrale $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$. (20)

DMOSTRAZIONE

Il primo membro della [19] per la proprietà additiva [8] degli integrali definiti può scriversi al seguente modo: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$.

1. Ricordiamo, intanto, che per definizione di funzione pari, ovvero, $f(-x) = f(x)$, la precedente uguaglianza diventa: $\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^{-a} f(-x) d(-x) +$

$+\int_0^a f(x) dx$ e, con il cambiamento di variabile $-x = t$, si otterrà: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(t) d(t) +$

$+\int_0^a f(x) dx$. Essendo $t, x, \dots$ variabili mute, l'ultima relazione diviene: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

2. Ricordando, invece, la definizione di funzione dispari, ovvero, $f(-x) = -f(x)$, la

⁹ Regola di Archimede: L'area della superficie del settore parabolico è uguale ai due terzi dell'area del rettangolo circoscritto al settore stesso.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

“Spero che i posteri mi giudicheranno con benevolenza, non solo per le cose che ho spiegato, ma anche per quelle che ho intenzionalmente ommesso, così da lasciare ad altri il piacere della scoperta”.

René Descartes

INTRODUZIONE

Un'equazione differenziale è una relazione fra la variabile indipendente x , una sua funzione e le derivate di tale funzione d'ordine n .

L'equazione differenziale è **ordinaria** se la funzione incognita dipende da una sola variabile; mentre, se queste sono due o più, l'equazione si chiamerà alle **derivate parziali**.

Noi studieremo solo quelle ordinarie.

In formula, un'equazione differenziale può scriversi al seguente modo:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Il più alto valore di n (grado della derivata che compare nella [1]) si dirà ordine dell'equazione differenziale.

ESEMPIO

L'equazione differenziale $y'' = \frac{x^3 - x}{y}$ è del 2° ordine;

l'equazione differenziale $y' = yx^2 + 5$ è del 1° ordine;

l'equazione differenziale $(y^{(5)})^2 - 3y^{(3)} + 2y'' - y' - x^3 + \sin x = 0$ è del 5° ordine. Ecc.

Una funzione $y = f(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale [1] se, dopo averla sostituita nella [1], la [1] stessa diviene un'identità.

Il principale problema, dunque, della teoria delle equazioni differenziali è quello di ricercarne le soluzioni che, nel caso più semplice, si traduce in quello del calcolo di un integrale. Per questo motivo le soluzioni di un'equazione differenziale sono chiamate **integrali**.

Più in generale, diremo *integrale di un'equazione differenziale*, un'equazione che **non** contiene derivate della variabile dipendente.

ESEMPIO

La funzione $y = 5 \cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$.

Infatti, si ha: $(5 \cos x)'' + (5 \cos x) = 0 \Rightarrow -5 \cos x + 5 \cos x = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Anche le funzioni $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = 6 \sin x$ sono soluzioni dell'equazione data. Non lo è, invece, $y = 5 \cos x + 3$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

L'espressione generale di un'equazione differenziale del primo ordine è:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

da cui segue, esplicitando la y' , anche:

$$y' = f(x, y). \quad (3)$$

La funzione $f(x, y)$ qui è supposta univocamente definita e continua in un dato intervallo, in cui cercheremo le soluzioni della [2].

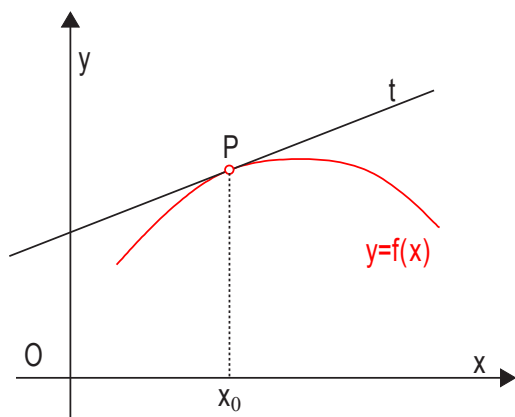


Figura 1

Dal punto di vista geometrico cerchiamo di comprendere cosa significa la [1].

Ebbene, nel caso di un'equazione differenziale del 1° ordine, la curva in colore in figura 1, rappresenta un integrale qualsiasi dell'equazione differenziale [3].

La derivata y' è il coefficiente angolare della retta tangente t alla curva integrale nel punto P .

L'insieme delle rette t che passano per tutti i possibili punti del dominio considerato, definisce il **campo delle direzioni** dell'equazione [3].

In altre parole, integrare la [3] significa: **trovare quelle curve la cui direzione della tangente coincide in ogni punto con la direzione del campo.**

ESEMPIO

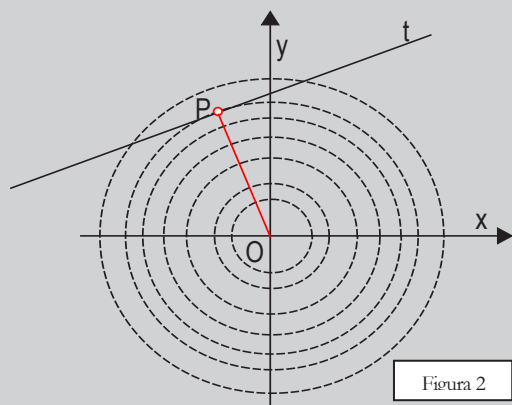


Figura 2

La figura 2 rappresenta il campo di direzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (*)$$

Dalla [*] si ricava che la direzione del campo nel punto P è perpendicolare alla retta OP (il coefficiente angolare della direzione del campo è y' mentre $\frac{y}{x}$ è quello della retta OP).

Si vede facilmente che le curve integrali sono circonferenze concentriche con centro nell'origine degli assi. Ne consegue che gli integrali dell'equazione [*] sono del tipo:

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

dove c^2 è una costante qualsiasi positiva. Va da sé che le funzioni $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$ sono le soluzioni dell'equazione differenziale [*], come facilmente si può verificare.

OSSERVAZIONE

Abbiamo prima detto che la funzione $f(x, y)$ (che qui risulta essere $f(x, y) = -\frac{x}{y}$) deve suporsi univocamente definita e continua in un dato intervallo, allora i punti dell'asse delle ascisse, nel

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI OMOGENEI

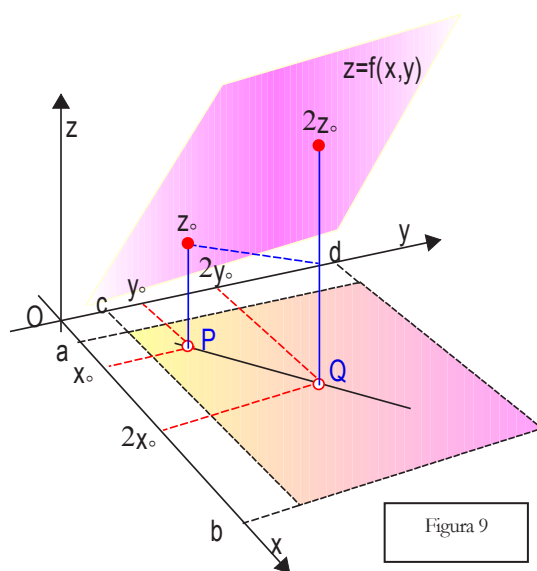


Figura 9

Incominciamo con l'introdurre il concetto di **funzione omogenea**. Sia $z = f(x, y)$ una funzione di due variabili x ed y e sia $A = \{a < x < b; c < y < d\}$ l'insieme in cui è definita (figura 9).

Supponiamo che tale insieme A abbia la proprietà che se $(x_0, y_0) \in A$ anche il punto $(tx_0, ty_0) \in A$, qualunque sia il numero reale e positivo t (in figura è stato assunto $t = 2$). Ebbene, se per qualunque punto $(x_0, y_0) \in A$ riesce $f(tx_0, ty_0) = t^\alpha f(x_0, y_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, essendo $\alpha \in \mathbb{R}$, si dice che la funzione $z = f(x, y)$ è **positivamente omogenea di grado α** .²

Le equazioni differenziali a coefficienti omogenei, dette anche di **Manfredi**³, hanno le seguenti forme (equivalenti):

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \vee \quad y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (10)$$

con $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funzioni positivamente omogenee di uguale grado α nelle variabili x ed y . Le equazioni di tipo [10] si riconducono alle equazioni a variabili separate mediante il seguente cambiamento di variabile:

$$y = x \cdot t(x). \quad (11)$$

ESEMPIO

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$(x - y)dx - (x + y)dy = 0 \quad (*)$$

RISOLUZIONE

È subito visto che l'equazione differenziale data [*] è a coefficienti positivamente omogenei di grado $\alpha = 1$. Con la sostituzione [11] la [*] diviene, ricordando che $dy = tdx + xdt$:

$$x(1-t)dx - x(1+t)(tdx + xdt) = 0$$

che assume, dopo averla opportunamente ordinata, la seguente veste:

$$\frac{t+1}{t^2+2t-1}dt = -\frac{1}{x}dx,$$

che è un'equazione differenziale a variabili separate. Integrando si ha:

² Molte sono le proprietà delle funzioni omogenee che qui, per brevità, ci asteniamo di riportare. Rimandiamo il lettore, per un approfondimento, a studi superiori ed a testi specializzati.

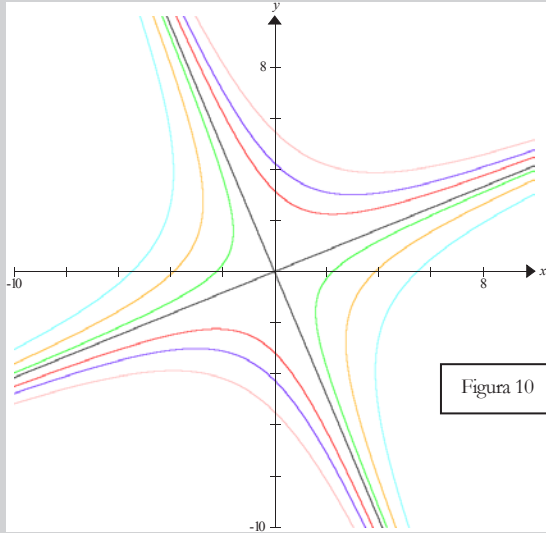
³ **Gabriele Manfredi** (Bologna 1681 – Bologna 1761). Dopo aver studiato medicina, si interessò alla matematica, ottenendo la cattedra presso l'Università di Bologna. Nell'opera *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (1707) espone i risultati ottenuti fino a quel momento nella soluzione dei problemi relativi alla teoria delle equazioni differenziali e i fondamenti del calcolo integrale. Nella memoria *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte delle equazioni differenziali di primo grado* (1714) descrisse il procedimento comunemente adottato per integrare le equazioni differenziali omogenee del primo ordine.

$$\ln|t^2 + 2t - 1| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right| + c$$

Posto $c = \ln k$, con $k \in \mathbb{R}_0^+$, e ripristinando la variabile si ottiene l'integrale generale della [*]:

$$x^2 - y^2 - 2xy + k = 0. \quad (**)$$

Questa rappresenta, in un sistema di riferimento Oxy cartesiano monometrico ortogonale, al variare di k , un **fascio di iperbole equilatera** (figura 10) con centro nell'origine degli assi.



Gli asintoti di questo fascio non dipendono dal parametro k ; hanno, infatti, rispettivamente equazioni:

$$y = -(1 - \sqrt{2})x; \quad y = -(1 + \sqrt{2})x.$$

NOTA

Le equazioni di questi asintoti soddisfano identicamente l'equazione differenziale data [*], ma non si ottengono dalla [**] per nessun valore del parametro k , supposto positivo non nullo. Potendosi avere dalla [**] solo ponendo $k = 0$, cosa manifestamente assurda. Allora gli asintoti rappresentano gli **integrali singolari** dell'equazione differenziale data.

Giova osservare che se si sottopongono le [10] ad un'omotetia di centro l'origine di equazioni:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (12)$$

l'integrale generale dell'equazione differenziale data resta inalterato, cambia solamente la costante c . Ciò significa che ciascuna curva integrale è legata ad ogni altra curva integrale mediante un'omotetia di centro l'origine degli assi.

Nella pratica spesso si presentano le seguenti tipologie di equazioni differenziali:

CASO A

È quello in cui l'equazione differenziale ha la seguente forma:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right). \quad (13)$$

In questo caso si opererà prima una traslazione di equazione:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

dove (x_0, y_0) è la soluzione del sistema lineare compatibile:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

La [13] diviene, così:

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI CLAIRAUT

Un'equazione differenziale lineare completa di Clairaut ⁷ si presenta nella forma seguente:

$$y = xy' + F(y'). \quad (32)$$

con $F(y'(x))$ funzione continua, insieme alle sue derivate prime e seconda, in un certo intervallo.

Derivando la [32] si ha:

$$y' = y' + xy'' + F'(y')y''$$

ossia:

$$y''[x + F'(y')] = 0$$

che è soddisfatta sia per $y'' = 0$ sia per $x + F'(y') = 0$.

Da $y'' = 0$ deriva $y' = C$ e la [32] diventa:

$$y = xC + F(C). \quad (33)$$

che è l'equazione di una famiglia di curve integrali (in questo caso le curve sono rette).

Da $x + F'(y') = 0$, invece, posto $y' = C$ si ha $x = -F'(C)$ e, ricordando la [32]:

$$\begin{cases} x = -F'(C) \\ y = -CF'(C) + F(C) \end{cases} \quad (34)$$

che sono le equazioni parametriche di un integrale singolare della [32]; tale integrale, infatti, non è ottenibile dall'integrale generale [33], ovvero $y = xC + F(C)$, ed è l'equazione dell'involuppo della famiglia di curve che questo rappresenta.

Si può, quindi, concludere che un'equazione di Clairaut ha una famiglia di infinite soluzioni che si ottiene ponendo C al posto di y' nell'equazione, ed un integrale singolare che si ottiene determinando l'involuppo della precedente famiglia.

ESEMPI

Integrare l'equazione differenziale di Clairaut:

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}. \quad (*)$$

SOLUZIONE

Posto $y' = C$ la [*] diviene: $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$ che, per la [33], risulta essere un integrale generale della [*] al variare di C . Calcoliamo l'integrale singolare. Osserviamo che è $F(C) = \sqrt{1 + C^2}$, per cui le [34] divengono:

⁷ **Clairaut Alexis-Claude** (1713-1765) nato a Parigi, figlio di un professore di matematica, di notevole precocità, viene eletto membro dell'Académie des Sciences all'età di 18 anni. Inizia lo studio delle curve sghembe e contribuisce allo sviluppo del calcolo infinitesimale nel XVIII secolo e alle sue applicazioni alla meccanica celeste. Ideò metodi per il calcolo dello schiacciamento della Terra, impiegando le oscillazioni del pendolo, pubblicandone nel 1743 anche un lavoro sulla forma della terra. Prese parte anche alla spedizione di Maupertius (1698-1749) in Lapponia per la misura del grado in prossimità del Circolo Polare.

$$\begin{cases} x = -\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \\ y = -\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} + \sqrt{1+C^2} \end{cases}$$

e queste sono le equazioni parametriche dell'integrale singolare.

* * *

Integrare l'equazione differenziale di Clairaut:

$$y = xy' + \sin y'^2. \quad (*)$$

SOLUZIONE

Posto $y' = C$ la [*] diviene: $y = xC + \sin C^2$ che, per la [33], risulta essere un integrale generale della [*] al variare di C . Calcoliamo l'integrale singolare. È subito visto che le equazioni parametriche di un tale integrale sono:

$$\begin{cases} x = -2C \cos C^2 \\ y = -2C^2 \cos C^2 + \sin C^2 \end{cases}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI RICCATI

Un'equazione differenziale lineare completa di Riccati ⁸ si presenta nella forma seguente:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \quad (35)$$

con $a(x), b(x), c(x)$ funzioni definite e continue in uno stesso intervallo.

L'integrale generale di una siffatta equazione non è esprimibile in termini finiti se le funzioni $a(x), b(x), c(x)$ sono qualsiasi. Se, però, si conosce un integrale particolare $\bar{y}$, mediante la sostituzione:

$$y = \bar{y}(x) + \frac{1}{z(x)} \quad (36)$$

con $z(x)$ nuova funzione, l'equazione [35] si trasforma in:

⁸ **Jacopo Francesco Riccati** (Venezia 28/5/1676 - Treviso 15/4/1754) grazie agli incoraggiamenti di Angeli intraprese gli studi matematici, sebbene originalmente fosse dottore in legge a Padova. Ben presto raggiunse una gran fama di valente matematico. Rifiutò offerte da Pietro il Grande che lo vedeva Presidente dello St Petersburg Academy di Scienza, ma egli preferì rimanere in Italia. I suoi studi d'idraulica furono molto utili alla città di Venezia: sue sono la progettazione e la costruzione di dighe lungo i canali. Nello studio delle equazioni differenziali, i suoi metodi di abbassare l'ordine di un'equazione e variabili separabili furono importanti. Considerò molte classi generali di equazioni differenziali e mise a punto importanti metodi di risoluzione che furono adottati estesamente da tutti fino ai giorni nostri. È ricordato per la sua celebre equazione differenziale che studiò in modo veramente approfondito e di cui diede soluzioni per certi casi speciali. In verità, l'equazione già era stata studiata da Jacob Bernoulli, ma egli la perfezionò, come si evince da una sua carta del 1724. Tratteva folla corrispondenza con un gran numero di matematici dell'epoca in tutta l'Europa ed era molto considerato in special modo da Daniele Bernoulli e da Eulero.

MODELLO LINEARE DI DINAMICA DEL PREZZO DI MERCATO

Ci proponiamo di studiare le eventuali variazioni che il prezzo fissato del mercato di un bene assegnato subirà al trascorrere del tempo: ciò sarà fatto sotto le seguenti ipotesi.

1. La prima condizione che assumiamo è che la funzione domanda sia affine e cioè sia somma algebrica di una costante con una funzione lineare del prezzo¹

$$Q_d = a - bP \quad (1)$$

ove $a, b > 0$, $P \geq 0$ è il prezzo unitario del bene e Q_d è la quantità richiesta sul mercato. Notiamo che $P = 0$ implica che $Q_d = a$ e, pertanto, rappresenta la quantità domandata dal mercato se il bene è gratuito; notiamo, inoltre, che com'è ragionevole che sia la (*) definisce la domanda come funzione strettamente crescente del prezzo.

2. La seconda ipotesi riguarda la quantità offerta:

$$Q_o = -c + dP \quad (2)$$

ove $c, d > 0$, $P \geq 0$ e Q_o è la quantità offerta sul mercato.

La formula (2) viene assunta valida per tutto il tempo in cui il prezzo si mantiene non inferiore al valore $\frac{c}{d}$, mentre la (1) viene assunta valida in ogni istante in cui il prezzo si mantiene non superiore al valore $\frac{a}{b}$. La mancata considerazione dei prezzi inferiori al valore $\frac{c}{d}$ e di prezzi superiori al valore $\frac{a}{b}$ non lede la generalità del discorso; ciò sarà dimostrato nell'osservazione (1). Osserviamo infine, che la (2) definisce l'offerta come una funzione strettamente crescente del prezzo come lecito attendersi.

Studiando il segno di Q_d e di Q_o , si ha:

$$Q_d > 0 \Leftrightarrow P < \frac{a}{b} \text{ e } Q_o > 0 \Leftrightarrow P > \frac{c}{d}$$

Da cui facilmente si ricava che affinché esistano prezzi che rendono simultaneamente positive la domanda e l'offerta occorre e basta che sia $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, cioè:

$$ad - bc > 0. \quad (3)$$

Il prezzo di equilibrio è quel prezzo $\bar{P}$ che produce domanda ed offerta uguali: $a - b\bar{P} = -c + d\bar{P}$; da ciò si ricava che

$$\bar{P} = \frac{a + c}{b + d}. \quad (4)$$

È facile controllare che la condizione (3) garantisce che il prezzo di equilibrio $\bar{P}$ è compreso tra i prezzi $\frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b}$ in senso stretto.

A questo punto supponiamo che il prezzo segua nel tempo la seguente legge:

$$P'(t) + \alpha(b + d)P(t) = \alpha(a + c) \quad (6)$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.

Definendo come istante 0 (zero) quello in cui si inizia a studiare la dinamica del prezzo, in tutto il nostro studio la variabile tempo t è nell'intervallo $[0, +\infty[$.

¹ Da qui e dal fatto che le altre espressioni matematiche che assumeremo nelle ipotesi, rappresentano funzioni lineari o affini, segue il termine *lineare* associato al "Modello" nel titolo.

Noi sappiamo che un'equazione differenziale del tipo (6) ammette infinite soluzioni. Esse sono rappresentate da

$$P(t) = ke^{-\alpha(b+d)t} + \bar{P} \quad (7)$$

con k costante arbitraria.

Il fatto che il problema matematico ci ha fornito infinite soluzioni non ci aiuta molto; infatti sapere che il prezzo varierà in uno degli infiniti modi indicati dalla (7) è “poco meglio di niente”.

Ricordiamo, però, se supponiamo come è ragionevole in pratica, di poter osservare il prezzo in un qualsiasi istante per esempio nell'istante in cui iniziamo lo studio e cioè in altre parole di conoscere $P(0)$, allora il corrispondente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} P'(t) + \alpha(b+d)P(t) = \alpha(a+c) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (8)$$

(ove P_0 è il valore noto del prezzo in 0), ammette la seguente unica soluzione:

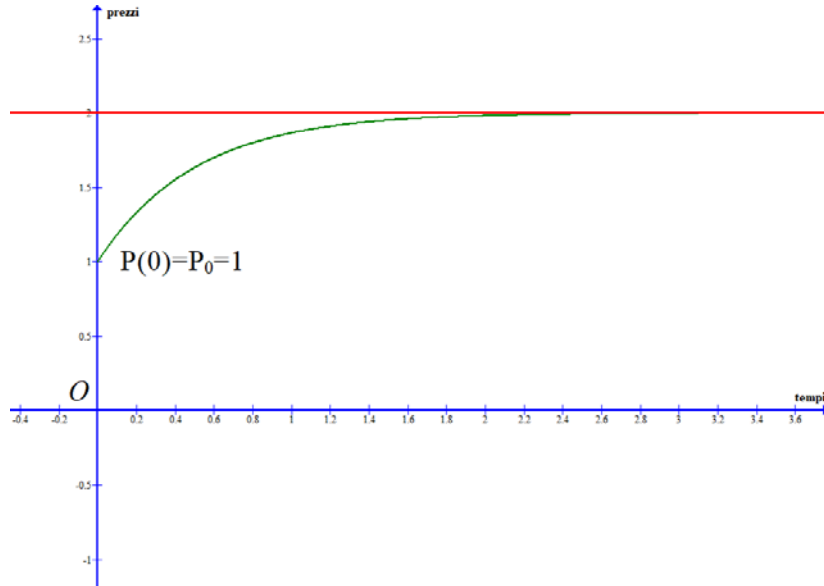
$$P(t) = (P_0 - \bar{P})e^{-\alpha(b+d)t} + \bar{P}. \quad (9)$$

Quest'ultima si ottiene sostituendo nella (7) $t=0$ e, usando la condizione iniziale del problema di Cauchy si ricava $k = P_0 - \bar{P}$, da cui sostituendo ciò nella (7), si ottiene la (9).

Studiamo la funzione (9).

Sappiamo che il suo dominio è $[0, +\infty[$.

Il $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \bar{P}$ e, poiché $P'(t) = \alpha(\bar{P} - P_0)(b+d)e^{-\alpha(b+d)t}$ allora da $\bar{P} > P_0$ segue che la funzione è strettamente crescente, mentre da $\bar{P} < P_0$ segue che la funzione è strettamente decrescente.



In definitiva, se $\bar{P} \neq P_0$, in virtù del teorema di Bolzano, si ricava che il codominio è l'intervallo avente per estremi P_0 incluso e $\bar{P}$ escluso. Più in generale da quanto detto si ricava che l'equazione $P(t) = \lambda$ ammette un'unica soluzione se e solo se λ appartiene al codominio; in caso contrario non ammette soluzioni.

In figura è rappresentato il grafico nel caso $\alpha = b = d = P_0 = 1$ e $\bar{P} = 2$.

In altri termini si può affermare che il prezzo, al trascorrere del tempo, tenderà ad avvicinarsi a quello di equilibrio senza raggiungerlo. Se, invece, $P_0 = \bar{P}$ la (9) definisce la soluzione costantemente uguale a $\bar{P}$; quindi, se il prezzo in 0 è quello di equilibrio, esso non muterà più (ovviamente, fino a quando valgono le ipotesi del nostro modello).

OSSERVAZIONE

Se $P_0 < \frac{c}{d}$ allora il prezzo crescerà strettamente fino a raggiungere il valore $\frac{c}{d}$. Dall'istante in cui avviene ciò (che può essere assunto come “nuovo” istante 0) in poi ritorniamo, ovviamente, nella

situazione studiata.

Per provare che se $P_o < \frac{c}{d}$, allora il prezzo raggiungerà $\frac{c}{d}$ notiamo che l'offerta non è più rappresentata dalla (2) (altrimenti vi sarebbe un'offerta negativa) ma vale 0.

Dalla (9), tenuto conto di ciò, si ricava che il prezzo si evolverà secondo la seguente legge:

$$P(t) = \left(P_o - \frac{a}{b} \right) e^{-abt} + \frac{a}{b}.$$

Poiché $P(0) = P_o$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, dal teorema della permanenza del segno e dal teorema di Bolzano segue che in un opportuno istante $t_1 > 0$ il prezzo vale $\frac{c}{d}$. In modo analogo si può provare che se il prezzo P_o fosse maggiore di $\frac{a}{b}$, allora il prezzo decrescerebbe fino a raggiungere il valore $\frac{a}{b}$ in un opportuno istante.

APPROFONDIMENTI

DALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI² ALLE FUNZIONI e^x , $\ln(x)$, a^x , $\log_a(x)$, x^α .

1. Premessa

In questo breve lavoro, a partire dalle equazioni differenziali e dalla funzione potenza ad esponente intero, abbiamo definito la funzione esponenziale e^x e, da questa, le funzioni $\ln(x)$, a^x , $\log_a(x)$ e x^α .

Abbiamo dimostrato le note proprietà di queste funzioni e, infine, abbiamo mostrato come il calcolo di e^x e, quindi delle altre sopra citate, coincida con quello usuale.

L'interesse per le questioni affrontate in questo lavoro è ben noto in campo scientifico.

Infatti, diversi autori si sono occupati di come definire le funzioni elementari non in modo classico. A tale proposito citiamo, per esempio, Marcellini- Sbordone, che partono da un integrale, Cecconi-Stampacchia, che utilizzano, diversamente da noi, le serie di potenze, Giusti che tratta le funzioni goniometriche partendo da un problema di Cauchy del secondo ordine.

Un percorso alternativo per chi non gradisce l'uso del teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy del primo ordine è presentato nell'ultima parte di questo lavoro.

In questa parte, a partire dall'equazione differenziale $y' = \frac{1}{x}$ con $x > 0$, si dimostra, attraverso alcune proposizioni, l'esistenza e l'unicità del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

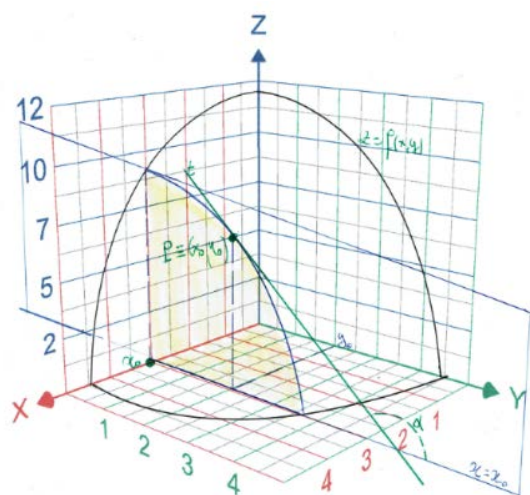
A questo punto si può definire la funzione esponenziale e da questa tutte le altre considerate nel presente lavoro con le stesse dimostrazioni presentate nelle sezioni 2 e 3. Questo procedimento ha in comune con quello proposto da Marcellini- Sbordone il fatto che nel percorso, in effetti, la funzione logaritmo precede quella esponenziale, ma si differenzia sia per le tecniche dimostrative utilizzate (abbiamo preferito indurre lo studente a confrontarsi in modo diretto con le equazioni differenziali) sia perché abbiamo evitato di dover dimostrare la crescita e la limitatezza della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, che,

² Periodico Matesis – Vol.7 – Serie 7 – Numero 2 – 3 – Luglio-Dicembre 2000

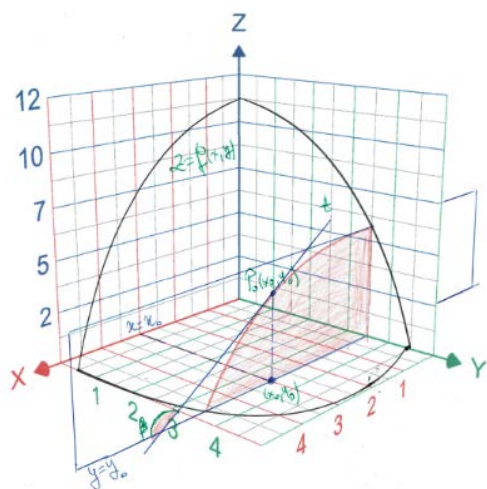
Riassumendo, davanti ad un esercizio che coinvolga un limite in due variabili si consiglia di:

1. Traslare il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ nell'origine;
2. Fare il limite prima sugli assi (sostituire $x = 0$, poi $y = 0$), se i limiti già non coincidono, il limite non esiste e l'esercizio finisce;
3. Provare il *test delle rette*, cioè provare i percorsi rettilinei grazie alla sostituzione $y = mx$. Se il limite per x che tende a zero, non risultasse lo stesso, indipendentemente da m , il limite non esiste. Se il limite è lo stesso si può pensare che il limite esista e sia quello trovato;
4. Si passa alle coordinate polari. Si scrive in coordinate polari la differenza (in valore assoluto) tra la funzione e il candidato limite e si cerca di maggiorare (in valore assoluto) tale differenza con una grandezza che non dipenda dall'angolo θ , ma che tende a zero quanto il modulo ρ tende a zero. Se si riesce a farlo, abbiamo dimostrato che il limite è proprio quello trovato;
5. Si possono utilizzare le sostituzioni $x = ay^n$ oppure $y = ax^n$. Se si trova anche un solo percorso con il limite diverso da quello precedentemente trovato allora il limite non esiste.

LE DERIVATE PARZIALI



Sia assegnata la funzione $z = f(x, y)$ definita nel dominio $D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$. Si consideri il piano $x = x_0$. Questo taglia la funzione data lungo una curva γ . Si consideri il punto $P \equiv (x_0, y_0) \in \gamma$ ed ivi la tangente geometrica alla curva γ . Questa forma un angolo α con la sezione del piano $x = x_0$. Il coefficiente angolare di questa retta tangente t è la derivata della funzione $z = f(x, y)$ relativa alla sezione $x = x_0$ che indicheremo con $\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y}$ oppure con $f'_y(x_0, y)$. Questa nel punto $P \equiv (x_0, y_0)$ diviene $f'_y(x_0, y_0)$.



Si consideri il piano $y = y_0$. Questo taglia la funzione data lungo una curva γ . Si consideri il punto $P \equiv (x_0, y_0) \in \gamma$ ed ivi la tangente geometrica alla curva γ . Questa forma un angolo β con la sezione del piano $y = y_0$. Il coefficiente angolare di questa retta tangente t è la derivata della funzione $z = f(x, y)$ relativa alla sezione $y = y_0$ che indicheremo con $\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}$ oppure con $f'_x(x, y_0)$. Queste due derivate sono chiamate, rispettivamente derivate parziali prime della funzione $z = f(x, y)$ rispetto ad y e rispetto x .

ESEMPI

Calcolare le derivate parziali rispetto ad x e rispetto ad y delle funzioni:

$$1. \quad z = x^2 y^3 - x^2 \sin y;$$

$$2. \quad z = \frac{e^{xy} - \sin y}{\ln(x+y)};$$

$$3. \quad z = e^{\frac{x^2 y^3}{\sin(x-2y)}} - 5xy.$$

SOLUZIONE

Si ha:

$$1. \quad f'_x = 2xy^3 - 2x \sin y; \quad f'_y = 3x^2 y^2 - x^2 \cos y;$$

$$2. \quad f'_x = \frac{ye^{xy} \ln(x+y) - \left(\frac{e^{xy} - \sin y}{(x+y)} \right)}{\ln^2(x+y)}; \quad f'_y = \frac{(xe^{xy} - \cos y) \ln(x+y) - \left(\frac{e^{xy} - \sin y}{(x+y)} \right)}{\ln^2(x+y)};$$

$$3. \quad f'_x = e^{\frac{x^2 y^3}{\sin(x-2y)}} \frac{2xy^3 \sin(x-2y) - x^2 y^3 \cos(x-2y)}{\sin^2(x-2y)} - 5y;$$

$$f'_y = e^{\frac{x^2 y^3}{\sin(x-2y)}} \frac{3x^2 y^2 \sin(x-2y) - x^2 y^3 [-2 \cos(x-2y)]}{\sin^2(x-2y)} - 5x.$$

Se la funzione $z = f(x, y)$ è definita in un insieme D ed ammette sia derivate parziali rispetto ad x che y , queste ultime sono ancora, in genere, funzioni di x e y , ovvero $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y)$, queste se sono definite in punto dell'insieme D , possono ammettere ancora derivate parziali, che chiameremo derivate parziali seconde. Queste ne sono quattro:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = f''_{yy}(x, y).$$

Sussiste il seguente teorema dovuto a **SCHWARTZ**

Sia data una funzione $z = f(x, y)$, definita in un insieme D aperto. Supponiamo che in ogni punto $P \equiv (x, y) \in D$ esistono le derivate parziali seconde. Ebbene se in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$ le funzioni f'_{xy} e f'_{yx} sono continue, allora si ha $f'_{xy}(x_0, y_0) = f'_{yx}(x_0, y_0)$.

NOTA

L'ipotesi di continuità delle derivate seconde miste è una condizione sufficiente. Quindi, per avere un esempio di funzione con derivate seconde parziali miste differenti, essa deve avere tali derivate non continue come nel seguente esempio proposto da Peano.

$$\text{Data la funzione continua } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\} \\ 0 & se (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Le sue derivate parziali prime sono:

CENNI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Si parla di PROGRAMMAZIONE LINEARE quando si è in presenza di:

- ☐ una funzione lineare di 2 o più variabili indipendenti che si deve massimizzare (se si tratta di funzione ricavo o profitto) oppure minimizzare (se si tratta di funzione costi);
- ☐ un insieme di vincoli (tecnic) nelle suddette variabili indipendenti date da equazioni o disequazioni lineari a 2 o più variabili;
- ☐ un insieme di vincoli di segno che esprimono la non-negatività delle variabili presenti essendo esse grandezze economiche. I vincoli di segno limitano la ricerca delle soluzioni al primo quadrante del corrispondente piano cartesiano.

Si tratta ancora di ottimizzare una funzione sottoposta a dei vincoli che sono una disequazione o un sistema di disequazioni. Tuttavia, se la funzione obiettivo è lineare, non si seguono le fasi b) e c) relativi al precedente paragrafo poiché una funzione lineare non ha max e min assoluti all'interno della regione ammissibile, né sulla frontiera. Quindi il massimo ed il minimo di una funzione lineare soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o da disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici della regione ammissibile, e non al suo interno.

Metodo grafico

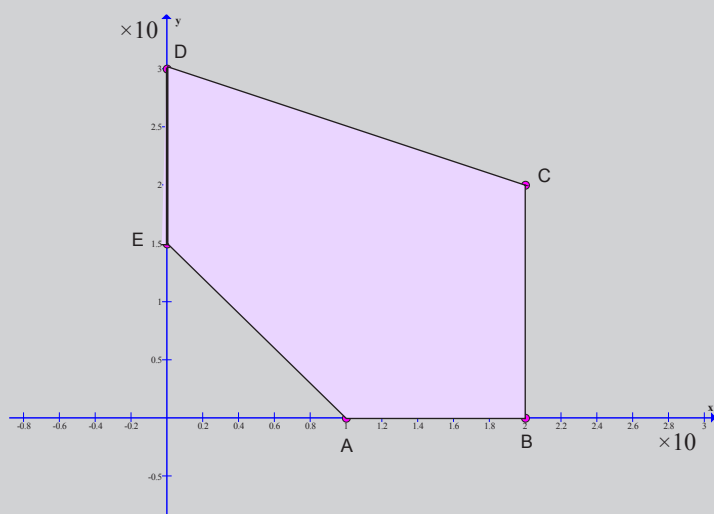
Per cercare i MASSIMI o MINIMI di una FUNZIONE lineare in 2 variabili conviene eseguire i seguenti passaggi:

- ☐ Dopo aver tracciato tutte le rette associate alle disequazioni ed equazioni del sistema dei vincoli, se l'intersezione derivante non è un insieme vuoto, si otterrà un poligono (o una regione illimitata) detto regione ammissibile, perché contiene tutte le coppie (x, y) che soddisfano le disequazioni e/o le equazioni del sistema.
- ☐ se il dominio dei vincoli è un poligono si calcolano i valori della funzione data nei vertici del poligono e tra essi il valore massimo se la funzione data si deve massimizzare, oppure il valore minimo se la funzione data si deve minimizzare. Nel caso particolare in cui, in corrispondenza di due vertici consecutivi, si ottenga lo stesso valore della funzione obiettivo, la teoria della programmazione lineare dimostra che lo stesso valore si ottiene in corrispondenza di un qualsiasi punto compreso tra i due vertici suddetti.
- ☐ se il dominio dei vincoli è illimitato si esaminano alcune linee di livello all'interno del dominio dei vincoli per capire se esiste un punto che ottimizza la funzione data.
- ☐ Infine, se i valori delle variabili x e y devono essere numeri interi (esempio: numero di pezzi prodotti alla settimana), si considerano nella regione ammissibile solo i punti aventi per coordinate numeri interi.

ESEMPIO

Sia data una funzione ricavo di equazione: $z = 20000x_1 + 10000x_2$. Vogliamo cercare il massimo valore della funzione sottoposta ai vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Da una semplice rappresentazione scaturisce che il dominio dei vincoli è un poligono di vertici:

$$A \equiv (10, 0); B \equiv (20, 0); C \equiv (20, 20);$$

$$D \equiv (0, 30); E \equiv (0, 15).$$

Il calcolo del valore di questi vertici nella funzione data porta ai seguenti risultati:

$$z(A) = 200\,000; z(B) = 400\,000;$$

$$z(C) = 600\,000;$$

$$z(D) = 300\,000; z(E) = 150\,000.$$

Da questi risultati si deduce che la funzione ricavo data si ottimizza nel vertice C ovvero producendo 20 pezzi di x_1 e 20 pezzi di x_2 .