Aoi

Giuseppina Anatriello

Da Euclide all'analisi differenziale di curve e superfici

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3576-1

I edizione: luglio 2020

Indice

Introduzione

In Wissenschaftliche Tagebücher, Cod. Ms. D. Hilbert 535 (1891), Hilbert scrive:

> *La ricchezza della geometria greca era nelle idee, nei risultati e nei problemi, ma aveva un difetto: a essa mancava un metodo generale, che rende possibile l'ulteriore fruttuoso sviluppo della scienza. Nella geometria di Euclide ogni cosa appare già finita e non c'è posto per un lavoro produttivo [...]. Questa idea [il metodo delle coordinate] rende ogni problema geometrico immediatamente accessibile al calcolo. Così Cartesio è diventato l'inventore della geometria analitica. I teoremi dei greci sono stati dimostrati ancora una volta, e poi sono stati generalizzati. Le formule, il calcolo, e, grazie a Cartesio un vero e proprio metodo, sostituirono trucchi speciali.*

Hilbert riconosce la potenza del metodo delle coordinate, ma rileva come la riduzione a calcolo porti a un risultato che non è del tutto positivo e nello stesso brano scrive:

> *Per quanto importante questo progresso sia stato , e comunque meravigliosi i successi siano stati, tuttavia la geometria come tale ha sofferto, alla fine, dello sviluppo unilaterale di questo metodo. Si calcola esclusivamente, senza avere alcuna intuizione di ciò che si è calcolato. Il senso della figura e della costruzione geometrica è stato perso.*

Nei fatti, dunque, il metodo delle coordinate non aveva prodotto il risultato (auspicato da Cartesio) di uno sviluppo armonico della matematica tra algebra e geometria.

In Wissenschaftliche Tagebücher, Cod. Ms. D. Hilbert 600 (anno non presente sul manoscritto), Hilbert sostiene che la geometria dovesse essere una disciplina autonoma rispetto all?analisi, anche se entrambe potevano arricchirsi l'una degli strumenti dell'altra per fini euristici, infatti scrive:

> *Se si lavora in geometria, allora deve essere fatto sinteticamente. La superficie o la curva osservate cosa hanno a che fare con un'equazione $f(x, y, z) = 0$? Nell'essenza della geometria l'analisi è uno strumento estraneo, che quindi deve essere evitato, se vogliamo erigere o fondare la geometria come un edificio. Ma la geometria e l'analisi possono stimolarsi e servirsi l'una con l'altra per fini euristici.*

Nelle sue riflessioni Hilbert mette in luce alcune tappe fondamentali dello sviluppo della Matematica sottolineandone anche le problematiche.

In questo volume svilupperemo un percorso che vuole recuperare il senso della figura e della costruzione geometrica e, partendo da un calcolo puramente geometrico tra i punti dello spazio euclideo, tracceremo una strada per definire, rapidamente e da un punto di vista elementare, gli strumenti di base della analisi differenziale delle curve e delle superfici.

Fondamento su cui viene posto il calcolo geometrico è la geometria sviluppata nei primi cinque libri degli *Elementi* di Euclide, che codifica ad un livello razionale ed astratto l'uso della riga e del compasso.

Febbraio 2020
Giuseppina Anatriello

I

Calcolo geometrico

In [1] (e in [5]) si è sviluppato un calcolo puramente geometrico tra i punti di un piano euclideo a partire da due suoi punti, O e U, con lo scopo di riguardare le trasformazioni geometriche del piano euclideo, *traslazione*, *rotazione* e *omotetia*, in termini di due operazioni tra punti che individuando una struttura algebrica di campo.

Le operazioni sono definite mediante classiche *costruzioni con riga e compasso* e senza utilizzare il concetto di numero.

Sempre in [1] vengono introdotti i *numeri reali* come modello astratto dei punti della retta OU (quando tra di essi si opera secondo le operazioni suddette e si sia introdotta una relazione d'ordine tra di essi definita a partire da tali operazioni).

Nello stesso spirito svilupperemo di seguito un calcolo geometrico nel piano (rispettivamente nello spazio) euclideo che individui in esso una struttura affine e una metrica.

I.1 La struttura affine

In un piano euclideo (risp. in uno spazio euclideo tridimensionale) siano assegnati due punti, O e U, e si definiscano (secondo le regole del calcolo geometrico introdotte per il piano in [1] e in [5] e per lo spazio in [4]) due operazioni tra punti come in Figura 1.1 e Figura

1.2: una rispetto ad O, detta *somma*, che traduce in termini di operazione tra punti del piano la *traslazione* di un punto rispetto all'altro (vedi Figura 1.1), e l'altra rispetto a O e U, detta *prodotto per uno scalare*, che traduce in termini di operazione tra punti del piano il *riscalamento* di un punto rispetto all'altro indotto dalla corrispondenza di Talete di origine O e unità U (vedi Figura 1.2).

Con queste due operazioni l'insieme dei punti del piano euclideo (risp. dello spazio tridimensionale euclideo) è strutturato a *spazio vettoriale*(vedi Appendice), e quando nel piano euclideo (risp. nello spazio tridimensionale euclideo) si vorrà fare riferimento a questa struttura, si dirà sinteticamente *piano* (risp. *spazio*) *vettoriale* OU. La struttura di spazio vettoriale individuata a partire dalla coppia (O, U) nel piano euclideo (rispettivamente nello spazio tridimensionale euclideo) si chiama anche *struttura affine* del piano (rispettivamente dello spazio tridimensionale euclideo). Il punto O è detto *polo*, U *unità*, la semiretta OU *semiretta polare* e la retta OU *retta polare*. Un punto della retta polare viene detto *scalare*. I punti generici del piano euclideo (risp. dello spazio tridimensionale euclideo), visto come spazio vettoriale vengono detti *vettori*. Pertanto in ambito puramente geometrico gli scalari sono particolari vettori. Gli scalari vengono denotati anche con lettere latine minuscole. Osserviamo esplicitamente che la struttura di spazio vettoriale non cambia se in luogo di U si prende un qualsiasi U' appartenente alla circonferenza (risp. sfera) di centro O e passante per U.

I.1.1 La semiretta OU come spazio di misura

Assegnata nel piano euclideo (risp. nello spazio tridimensionale euclideo) la struttura affine determinata da (O, U), l'insieme dei punti della semiretta OU può essere riguardato come monoide ordinato di grandezze misurabili con O grandezza nulla, e quindi come spazio di misura rispetto a U, detto *unità* del monoide (cfr. [1]). In questa struttura di *monoide* della semiretta OU l'ordinamento dei punti della semiretta e l'operazione di somma sono quelli che derivano in

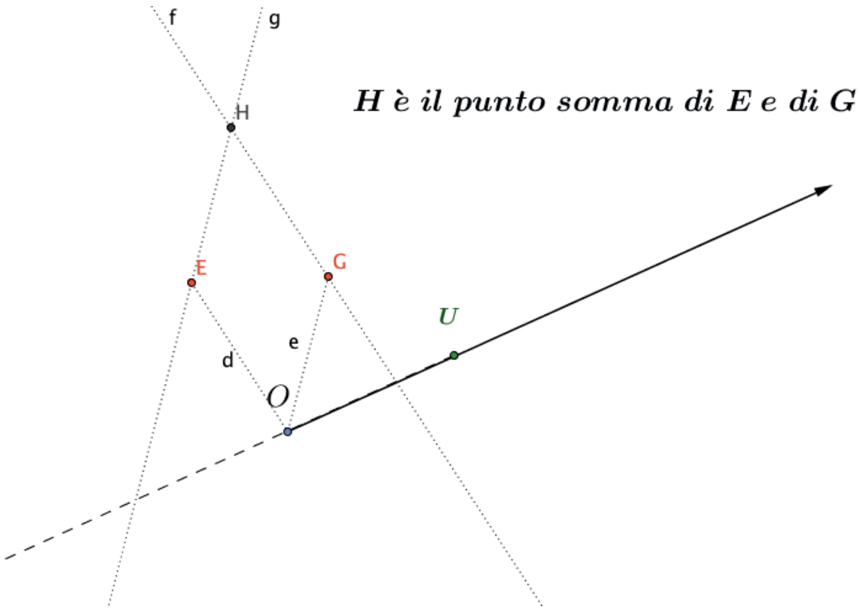


Figura I.1: Somma tra punti

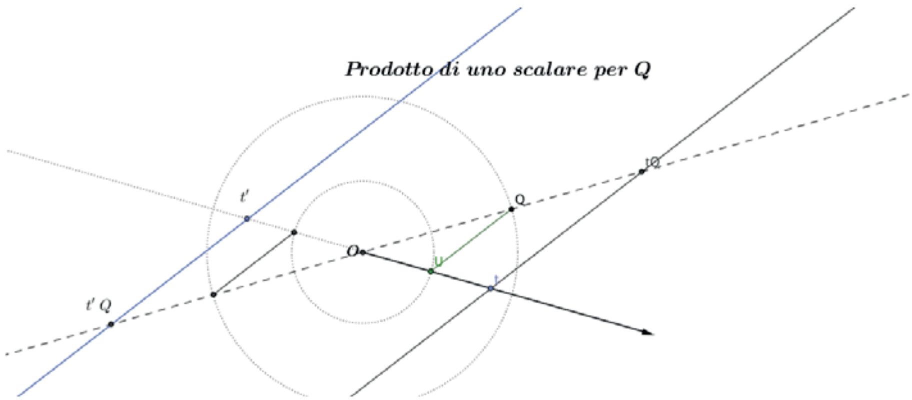


Figura I.2: Prodotto per uno scalare modo ovvio da quelli che nella geometria euclidea si considerano tra segmenti con un estremo in O e appartenenti alla stessa semiretta.

Si assume che la struttura di monoide ordinato soddisfi l'assioma di completezza (cfr. [1]).

Scegliendo come unità del monoide U vengono a coincidere tra i punti della semiretta OU il prodotto indotto dall'operazione di somma di spazio di misura e il prodotto definito come riscalamento. Riguardare la semiretta come spazio di misura consente di attribuire ad ogni punto P della semiretta polare una *misura* rispetto a U, rappresentata da un simbolo k, detto *coordinata numerica* di P (cfr. [1]). Si pone $P = kU$, e, inoltre, $O = 0U$ e $U = 1U$.

L'insieme dei coefficienti che denotano le misure rispetto a U dei punti della semiretta OU sono tutti e soli i cosiddetti *numeri reali non negativi* (quelli diversi da 0 sono detti *numeri reali positivi*). I numeri reali non negativi ereditano la struttura di monoide dai punti dello spazio di misura individuato sulla semiretta OU, con 0 come zero e 1 (uno) come unità, e di conseguenza anche il prodotto definito nello spazio di misura a partire dalla somma (cfr. [1]).

I.1.2 La retta polare come retta numerica

Lo spazio (risp. piano) vettoriale OU ristretto ai punti della la retta OU è uno spazio vettoriale (sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale OU). La struttura di spazio vettoriale sulla retta OU è anche una struttura di *campo*, e, in particolare, introdotto l'usuale ordinamento tra i punti di OU (definito attraverso la somma di punti della retta), di *campo ordinato completo*.

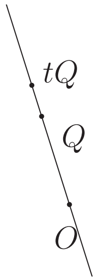
D'altro canto, per simmetrizzazione, ovvero introducendo gli elementi opposti dei numeri reali positivi, detti *numeri reali negativi*, il monoide dei numeri reali positivi diventa un campo, e introducendo tra i numeri reali la relazione d'ordine definita ponendo i negativi minori di 0 e $a < b$ se e solo se $-b < -a$ un campo ordinato completo. Inoltre, se a $-P$, con $P = kU$, si attribuisce la coordinata numerica $-k$, l'insieme delle coordinate dei punti di OU eredita dai punti di OU ancora una struttura di campo ordinato completo e tale struttura coincide con quella ottenuta per simmetrizzazione della struttura di monoide ordinato dei numeri reali positivi. Ogni punto P della retta OU può essere allora scritto nella forma $P = kU$, con k numero reale, detto *coordinata numerica* di P (rispetto a (O, U)). Viceversa al variare di k nel campo dei numeri reali tutti i punti kU sono punti della retta polare. Un punto scalare si può allora identificare con la sua coordinata numerica e d'ora in avanti quando si parlerà di scalare ci si riferirà indifferentemente ad un punto della retta polare o alla sua coordinata numerica. Quando si opera questa identificazione la retta OU può essere chiamata *retta numerica* (*reale*) OU. Se a e b appartengono a OU, con $a \leq b$, i simboli $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ traggono significato dal loro analogo nell'ambito dei numeri reali.

I.1.3 Equazione parametrica della retta nel piano e nello spazio

Nello spazio (risp. nel piano) vettoriale OU, considerata una generica retta, s, passante O, fissato $Q \in s$, punto distinto da O, tutti e soli i punti della retta s sono i punti P dello spazio (risp. del piano) che soddisfano la condizione $P = kQ$, con k appartenente alla retta OU. L'equazione $P = tQ$ è detta *equazione parametrica* della retta OQ. Per $t \geq 0$ si ottengono tutti e soli i punti della semiretta OQ e per $0 \leq t \leq 1$ tutti e solo i punti del segmento OQ.

Se Q appartiene alla circonferenza di centro O e passante per U, il triangolo POQ è isoscele e quindi il punto $P = tQ$ appartiene alla circonferenza di centro O passante per tU.

Sulla semiretta OQ si può considerare la struttura di spazio di misura ereditata dallo spazio di misura OU: se $A = t_A Q$ e $B = t_B Q$, $A + B = (t_A + t_B)Q$, se $t_A \leq t_B$ allora $A = t_A Q \leq B = t_B Q$. Se $P = tQ$, con $t > 0$, t rappresenta la misura di P rispetto all'unità Q e, più in generale, t rappresenta la coordinata numerica del punto tQ sulla retta s riguardata come retta numerica di origine O e unità Q.



retta passante per l'origine

$$P = tQ$$

equazione della retta OQ

Per ottenere l'equazione di una retta r che non passa per O, si consideri la retta r' passante per O e parallela a r. Sia P_0 appartenente ad r e Q distinto da O e appartenente a r', i punti P di r (e solo i punti di r) si possono scrivere nella forma:

$$P = P_0 + tQ,$$

con tQ vertice opposto a P_0 nel parallelogramma avente come altra

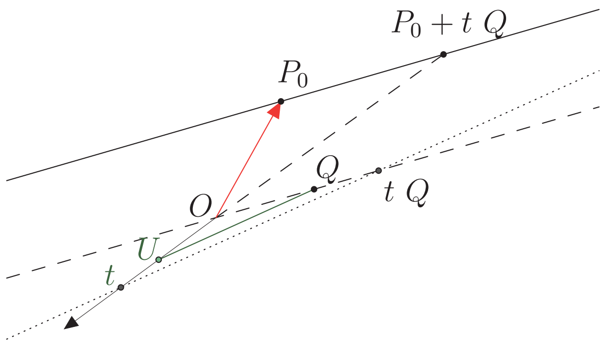


Figura I.3: Equazione parametrica della retta

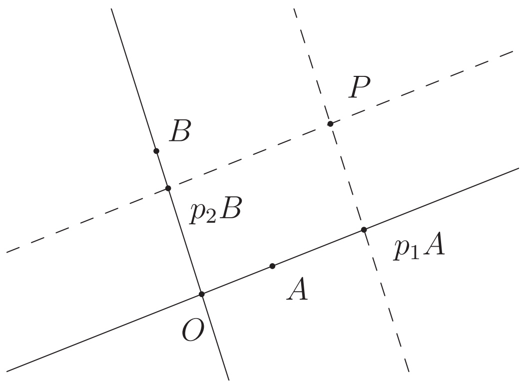
coppia di vertici opposti i punti O e P.

L'equazione $P = P_0 + tQ$ viene detta *equazione parametrica* della retta passante per P_0 e parallela ad OQ.

Ogni retta r di equazione $P = P_0 + tQ$ può essere riguardata come *retta numerica* avente P_0 come zero, $P_0 + Q$ come unità,

$+_{(P_0,P_0+Q)}$, definita da $A +_{(P_0,P_0+Q)} B = P_0 + (t_A + t_B)Q$, con $A = P_0 + t_A Q$ e $B = P_0 + t_B Q$, come somma e come relazione d'ordine quella definita ponendo $A = P_0 + t_A Q < B = P_0 + t_B Q$ se e solo se $t_A < t_B$. In tal caso la coppia $(P_0, P_0 + Q)$ viene detta *riferimento* sulla retta r.

I.1.4 Base nel piano euclideo



$$\begin{array}{ccccc} P & = & p_1A & + & p_2B \\ & & \in & & \in \\ & & r & & s \end{array}$$

combinazione lineare
di A e di B

In un piano euclideo sia fissato il campo degli scalari OUe siano r e s due rette che si intersecano solo in O. Sia P un punto del piano non appartenente né a r né a s. Il punto P può essere riguardato come vertice opposto ad O in un parallelogramma avente gli altri due vertici rispettivamente su r e s, chiamiamoli P_1 e P_2, e quindi P è somma di $P_1 \in r$ e di $P_2 \in s$. Se poi P appartiene a r o a s esso è somma P e O, e anche in questo caso è somma di una coppia di punti appartenenti uno a r e l'altro a s.

Considerati ora $A \in r$ e $B \in s$, distinti da O, risulta $P = p_1A + p_2B$, con p_1A proiezione di P su r rispetto alla direzione di s e p_2B proiezione di P su s rispetto alla direzione di r. L'espressione $p_1A + p_2B$ è chiamata *combinazione lineare* di A e di B *mediante gli scalari* p_1 e p_2. Possiamo allora dire che ogni vettore del piano si ottiene in unico modo come *combinazione lineare* dei vettori A e B. Un vettore che si esprime come combinazione lineare di altri vettori si dice che *dipende linearmente* da questi e quindi tutti i vettori del piano dipendono linearmente da A e B. Per questo motivo si dice che (A, B) è un *sistema di generatori* del piano vettoriale OU. Poiché A e B non sono allineati, non sono proporzionali e, quindi, non si scrivono come combinazione lineare l'uno dell'altro, si dice allora che A e B costituiscono un *sistema di vettori linearmente indipendente* (da cui dipende la proprietà che i vettori che dipendono da essi vi dipendono in modo unico) del piano vettoriale OU. Si dice pure che la coppia (A, B) è una *base* per il piano vettoriale OU.

Se (H, K) è una base del piano vettoriale OU, ogni punto P del piano è combinazione lineare di H e K, e esiste un'unica combinazione lineare di H e K che è uguale a P. Gli scalari coefficienti di H e di K nella combinazione lineare uguale a P si dicono *coordinate* del punto P nella base (H, K), e dire che (p_1, p_2) sono le coordinate di P nella base (H, K) vuol dire che $P = p_1H + p_2K$. L'unica condizione richiesta a due punti H e K del piano vettoriale OU, distinti da O, per essere (H, K) una base è che essi non siano allineati con O.

Nel piano vettoriale OU due punti, U_1 e U_2, non allineati con O sono linearmente indipendenti. Dati invece tre punti $\{U_1, U_2, U_3\}$ nel piano vettoriale OU essi non sono mai linearmente indipendenti. Ogni volta che in un sistema di vettori almeno uno dei suoi dipende linearmente dai rimanenti il sistema si dice *linearmente dipendente*.

I.1.5 Base nello spazio tridimensionale euclideo

Nello spazio euclideo tridimensionale si fissi la struttura di spazio vettoriale individuata da (O, U). Fissati due punti linearmente indipendenti, A e B, un generico punto P non dipende necessariamente da essi, poiché può essere esterno al piano individuato da A, B e O.

Fissati U_1, U_2 e U_3, tre punti non complanari con O, essi sono evidentemente linearmente indipendenti e i piani OU_1U_2, OU_2U_3 e OU_1U_3, sono, ovviamente, distinti.

Un punto P che non appartenga a nessuno dei piani OU_1U_2, OU_1U_3, OU_2U_3 è estremo della diagonale di un parallelepipedo con