

Aoi

Giuseppina Anatriello

**Da Euclide all'analisi differenziale
di curve e superfici**





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXX
Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.giacchinoonoratieditore.it
info@giacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-3576-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: luglio 2020

Indice

Introduzione	11
I Calcolo geometrico	13
I.1 La struttura affine	13
I.1.1 La semiretta come spazio di misura	14
I.1.2 La retta polare come retta numerica	16
I.1.3 Equazione parametrica della retta nel piano e nello spazio	17
I.1.4 Base nel piano euclideo	19
I.1.5 Base nello spazio tridimensionale euclideo	20
I.1.6 Equazione parametrica del piano	22
I.2 Struttura metrica	24
I.2.1 Modulo, forma quadratica e distanza	25
I.2.2 Prodotto scalare e forma bilineare	26
I.2.3 Coseno di un angolo	28
I.2.4 Prodotto vettoriale	29
I.2.5 Sistema di riferimento cartesiano monometri- co ortogonale	31
I.2.6 Matrici di trasformazioni	33
II Dalla geometria all'analisi differenziale	37
II.1 Topologia naturale	37
II.1.1 Punti interni, esterni, di frontiera e d'accu- mulazione	38

II.1.2	Insiemi aperti e insiemi chiusi	38
II.1.3	Connessi per archi e insiemi compatti	39
II.2	Definizione di limite e continuità	39
II.3	Trasformazioni regolari	40
III	Curve: analisi differenziale	43
III.1	Curve parametriche regolari	45
III.1.1	Lunghezza di una curva	46
III.1.2	Ascissa curvilinea	46
III.1.3	Cambiamento di parametro	47
III.1.4	Le curve negli spazi numerici	47
III.1.4.1	Equazione cartesiana della retta tan- gente ad una curva nel piano. . . .	49
III.1.5	Triedro fondamentale di Frenet	50
III.1.6	Curve generate per rotazioni	53
III.1.6.1	Epicicloide	53
III.1.6.2	Ipocicloide	54
III.1.6.3	Rodonea	56
III.1.7	Curve generate per rototraslazioni	56
III.1.7.1	Cicloide	56
III.1.7.2	Elica cilindrica	58
III.1.8	Curve generate tramite rotazione e omotetia	58
III.1.8.1	Spirale di Archimede	58
III.1.8.2	Spirale logaritmica o equiangolare .	58
III.1.8.3	Elica conica	59
IV	Superfici: analisi differenziale	61
IV.1	Superfici regolari	61
IV.1.1	Cambiamenti di parametri	62
IV.1.1.1	Superfici coordinate e linee coordinate	63
IV.1.2	Prima forma fondamentale e metrica riemanniana	66
IV.1.3	Mappa di Gauss	67
IV.1.3.1	Superfici orientabili	68
IV.1.4	Curvatura normale e curvatures principali . .	68

IV.1.4.1	Punti ellittici, iperbolici e parabolici	69
IV.1.5	Curvature di una curva su una superficie . .	69
IV.1.6	Seconda forma fondamentale	70
IV.1.7	Superfici di rotazione	72
IV.1.8	Superfici rigate	72
IV.1.9	Superfici sviluppabili	73
IV.1.10	Superfici celebri	73
V	Appendice	79
V.1	Spazio vettoriale su un campo	79
V.1.1	Rango e dipendenza lineare	80
V.1.1.1	n -uple di vettori e dipendenza lineare	80
V.2	Spazi vettoriali euclidei	82
V.2.1	Lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$	83
V.2.1.1	La retta	83
V.2.1.2	Il piano: equazione parametrica . .	84
V.2.1.3	Il modulo, il prodotto scalare . . .	85
V.2.1.4	Il prodotto vettoriale, il prodotto misto	86
V.2.1.5	Equazione cartesiana del piano e del- la retta	86
V.2.2	Cambiamenti di base notevoli nel piano . . .	87
V.2.2.1	Trasformazioni polari	89
V.2.2.2	Matrici di trasformazione del piano in sé	89
V.2.2.3	Riflessione rispetto ad una retta pas- sante per l'origine	90
V.2.2.4	Omotetia	90
V.2.2.5	Scaling	90
V.2.2.6	Shear	91
V.2.3	Trasformazioni dello spazio tridimensionale .	91
V.2.3.1	Coordinate cilindriche	92
V.2.3.2	Coordinate sferiche	93
V.2.3.3	Matrici di cambiamenti di base no- tevoli	94

V.2.4	Lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$	96
V.2.4.1	Modulo, prodotto scalare	97
V.2.4.2	Base canonica di \mathbb{R}^n	98
V.2.5	Sistemi lineari	98
V.2.5.1	Sistemi lineari omogenei	98
V.2.6	Determinante di un sistema di vettori	101
V.2.7	Matrici	103
V.2.8	Applicazione: Teorema di Rouché-Capelli per i sistemi lineari	105
V.3	Coniche	106
V.3.1	Coniche nel piano euclideo	107
V.3.2	Coniche in un piano cartesiano	109
V.3.3	Coniche e autovalori	112
V.3.4	Equazioni in forma canonica	113
V.4	Quadriche	113
V.5	Funzioni e campi vettoriali	122
V.6	Funzioni di due variabili	122
V.6.1	Definizione di limite per funzioni di due va- riabili	123
V.6.1.1	Continuità in un punto	124
V.6.1.2	Confronto tra le nozioni di limite funzione di una e di due variabili	124
V.6.1.3	Teoremi sui limiti	125
V.6.1.4	Proprietà topologiche delle funzioni continue	126
V.6.2	Differenziabilità di funzioni di due variabili	127
V.6.2.1	Derivate parziali	129
V.6.2.2	Il gradiente e la differenziabilità	130
V.6.2.3	La notazione dell' <i>o-piccolo</i>	131
V.6.2.4	Derivate direzionali	132
V.6.2.5	Funzioni con gradiente nullo	136
V.6.2.6	Derivata funzione composta	136
V.6.2.7	Derivate di ordine superiore	136
V.6.3	Formula di Taylor del secondo ordine	138
V.6.4	Estremi relativi	139

V.7	Integrale indefinito	142
V.7.1	Integrale e differenziale	142
V.7.2	Le primitive delle funzioni elementari	143
V.7.3	Proprietà di linearità degli integrali	144
V.7.4	Formule di sostituzione negli integrali indefiniti	144
V.7.5	Integrazione per parti	145
V.7.6	Integrale definito	145
V.7.7	Formula fondamentale del calcolo integrale .	145
V.7.8	Riepilogo regole fondamentali	146
V.7.9	Integrali immediati	146
V.7.10	Integrali altre funzioni elementari	146
V.7.11	Integrali funzioni razionali e sostituzioni razionalizzanti	147
V.8	Equazioni differenziali lineari	147
V.8.1	Problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità	151
V.8.2	Integrale generale di un'equazione differen- ziale lineare	152
V.8.3	Integrale generale di un'equazione differen- ziale lineare omogenee	153
V.8.3.1	Lo spazio delle soluzioni di un'omo- genea	153
V.8.3.2	La dimensione dello spazio delle so- luzioni di un'omogenea	154
V.8.3.3	Esistenza di una base	155
V.8.3.4	Proprietà del wronskiano	156
V.8.4	Integrale generale di un'equazione differen- ziale lineare non omogenea	156
V.8.4.1	Metodo della variazione delle costan- ti arbitrarie	157
V.8.5	Esempi notevoli	157
V.9	Integrale esteso ad un intervallo	159
V.9.1	Alcune proprietà dell'integrale esteso	160
V.9.2	Teorema fondamentale del calcolo integrale .	162
V.10	Integrale curvilineo	163

V.10.1	Massa e baricentro di un filo	165
V.11	Integrali curvilinei di campi vettoriali	165
V.11.1	Campi conservativi	168
V.11.1.1	Indipendenza dal cammino	170
V.11.1.2	Campi irrotazionali	170
V.12	Integrali doppi su domini rettangolari	171
V.13	Integrali doppi su insiemi misurabili secondo Peano-Jordan	173
V.13.1	Misura secondo Peano-Jordan	173
V.13.2	Integrali doppi su domini misurabili secondo Peano-Jordan	174
V.13.3	Alcune proprietà dell'integrale doppio	174
V.13.4	Proprietà	174
V.13.5	Formule di riduzione per integrali doppi su rettangoli	176
V.13.6	Formule di riduzione per integrali doppi su domini normali e regolari	177
V.13.7	Cambiamento di variabili	180
V.13.7.1	Cambiamento di variabili in coordi- nate polari	181
V.14	Integrali di superficie	182
V.14.1	Flusso attraverso una superficie	185
V.14.2	Massa e baricentro di una lamina superficiale	185
V.15	Integrali tripli	186
V.15.1	Massa, baricentro e momento di inerzia di un solido	186
V.15.2	Operatori differenziali di un campo: diver- genza e rotore	187

Introduzione

In *Wissenschaftliche Tagebücher*, Cod. Ms. D. Hilbert 535 (1891), Hilbert scrive:

La ricchezza della geometria greca era nelle idee, nei risultati e nei problemi, ma aveva un difetto: a essa mancava un metodo generale, che rende possibile l'ulteriore fruttuoso sviluppo della scienza. Nella geometria di Euclide ogni cosa appare già finita e non c'è posto per un lavoro produttivo [...]. Questa idea [il metodo delle coordinate] rende ogni problema geometrico immediatamente accessibile al calcolo. Così Cartesio è diventato l'inventore della geometria analitica. I teoremi dei greci sono stati dimostrati ancora una volta, e poi sono stati generalizzati. Le formule, il calcolo, e, grazie a Cartesio un vero e proprio metodo, sostituirono trucchi speciali.

Hilbert riconosce la potenza del metodo delle coordinate, ma rileva come la riduzione a calcolo porti a un risultato che non è del tutto positivo e nello stesso brano scrive:

Per quanto importante questo progresso sia stato, e comunque meravigliosi i successi siano stati, tuttavia la geometria come tale ha sofferto, alla fine, dello sviluppo unilaterale di questo metodo. Si calcola esclusivamente, senza avere alcuna intuizione di ciò che si è calcolato. Il senso della figura e della costruzione geometrica è stato perso.

Nei fatti, dunque, il metodo delle coordinate non aveva prodotto il risultato (auspicato da Cartesio) di uno sviluppo armonico della matematica tra algebra e geometria.

In *Wissenschaftliche Tagebücher*, Cod. Ms. D. Hilbert 600 (anno non presente sul manoscritto), Hilbert sostiene che la geometria dovesse essere una disciplina autonoma rispetto all'analisi, anche se entrambe potevano arricchirsi l'una degli strumenti dell'altra per fini euristici, infatti scrive:

Se si lavora in geometria, allora deve essere fatto sinteticamente. La superficie o la curva osservate cosa hanno a che fare con un'equazione $f(x, y, z) = 0$? Nell'essenza della geometria l'analisi è uno strumento estraneo, che quindi deve essere evitato, se vogliamo erigere o fondare la geometria come un edificio. Ma la geometria e l'analisi possono stimolarsi e servirsi l'una con l'altra per fini euristici.

Nelle sue riflessioni Hilbert mette in luce alcune tappe fondamentali dello sviluppo della Matematica sottolineandone anche le problematiche.

In questo volume svilupperemo un percorso che vuole recuperare il senso della figura e della costruzione geometrica e, partendo da un calcolo puramente geometrico tra i punti dello spazio euclideo, tratteremo una strada per definire, rapidamente e da un punto di vista elementare, gli strumenti di base della analisi differenziale delle curve e delle superfici.

Fondamento su cui viene posto il calcolo geometrico è la geometria sviluppata nei primi cinque libri degli *Elementi* di Euclide, che codifica ad un livello razionale ed astratto l'uso della riga e del compasso.

Febbraio 2020
Giuseppina ANATRIELLO

I

Calcolo geometrico

In [1] (e in [5]) si è sviluppato un calcolo puramente geometrico tra i punti di un piano euclideo a partire da due suoi punti, O e U , con lo scopo di riguardare le trasformazioni geometriche del piano euclideo, *traslazione*, *rotazione* e *omotetia*, in termini di due operazioni tra punti che individuando una struttura algebrica di campo.

Le operazioni sono definite mediante classiche *costruzioni con riga e compasso* e senza utilizzare il concetto di numero.

Sempre in [1] vengono introdotti i *numeri reali* come modello astratto dei punti della retta OU (quando tra di essi si opera secondo le operazioni suddette e si sia introdotta una relazione d'ordine tra di essi definita a partire da tali operazioni).

Nello stesso spirito svilupperemo di seguito un calcolo geometrico nel piano (rispettivamente nello spazio) euclideo che individui in esso una struttura affine e una metrica.

I.1 La struttura affine

In un piano euclideo (risp. in uno spazio euclideo tridimensionale) siano assegnati due punti, O e U , e si definiscano (secondo le regole del calcolo geometrico introdotte per il piano in [1] e in [5] e per lo spazio in [4]) due operazioni tra punti come in Figura 1.1 e Figura

1.2: una rispetto ad O , detta *somma*, che traduce in termini di operazione tra punti del piano la *traslazione* di un punto rispetto all'altro (vedi Figura 1.1), e l'altra rispetto a O e U , detta *prodotto per uno scalare*, che traduce in termini di operazione tra punti del piano il *riscaldamento* di un punto rispetto all'altro indotto dalla corrispondenza di Talete di origine O e unità U (vedi Figura 1.2).

Con queste due operazioni l'insieme dei punti del piano euclideo (risp. dello spazio tridimensionale euclideo) è strutturato a *spazio vettoriale* (vedi Appendice), e quando nel piano euclideo (risp. nello spazio tridimensionale euclideo) si vorrà fare riferimento a questa struttura, si dirà sinteticamente *piano* (risp. *spazio*) *vettoriale* OU . La struttura di spazio vettoriale individuata a partire dalla coppia (O, U) nel piano euclideo (rispettivamente nello spazio tridimensionale euclideo) si chiama anche *struttura affine* del piano (rispettivamente dello spazio tridimensionale euclideo). Il punto O è detto *polo*, U *unità*, la semiretta OU *semiretta polare* e la retta OU *retta polare*. Un punto della retta polare viene detto *scalare*. I punti generici del piano euclideo (risp. dello spazio tridimensionale euclideo), visto come spazio vettoriale vengono detti *vettori*. Pertanto in ambito puramente geometrico gli scalari sono particolari vettori. Gli scalari vengono denotati anche con lettere latine minuscole. Osserviamo esplicitamente che la struttura di spazio vettoriale non cambia se in luogo di U si prende un qualsiasi U' appartenente alla circonferenza (risp. sfera) di centro O e passante per U .

I.1.1 La semiretta OU come spazio di misura

Assegnata nel piano euclideo (risp. nello spazio tridimensionale euclideo) la struttura affine determinata da (O, U) , l'insieme dei punti della semiretta OU può essere riguardato come monoide ordinato di grandezze misurabili con O grandezza nulla, e quindi come spazio di misura rispetto a U , detto *unità* del monoide (cfr. [1]). In questa struttura di *monoide* della semiretta OU l'ordinamento dei punti della semiretta e l'operazione di somma sono quelli che derivano in

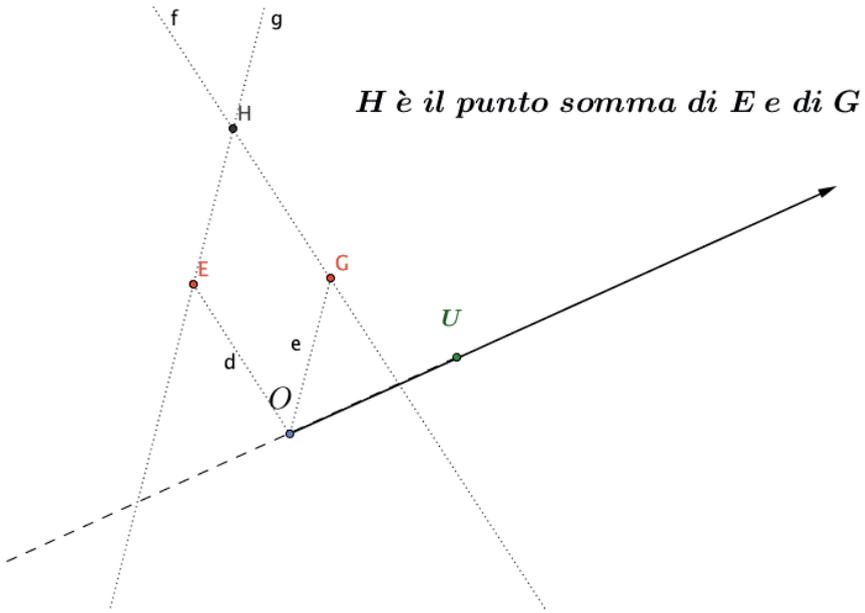


Figura I.1: Somma tra punti

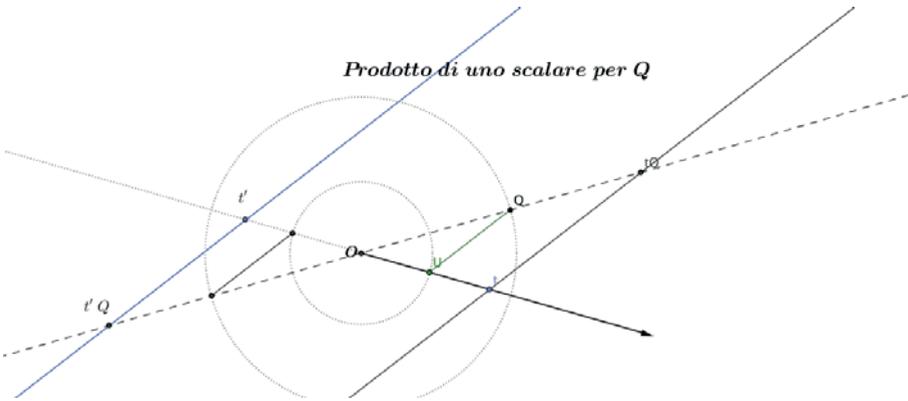


Figura I.2: Prodotto per uno scalare

modo ovvio da quelli che nella geometria euclidea si considerano tra segmenti con un estremo in O e appartenenti alla stessa semiretta.

Si assume che la struttura di monoide ordinato soddisfi l'assioma di completezza (cfr. [1]).

Scegliendo come unità del monoide U vengono a coincidere tra i punti della semiretta OU il prodotto indotto dall'operazione di somma di spazio di misura e il prodotto definito come riscalamento. Riguardare la semiretta come spazio di misura consente di attribuire ad ogni punto P della semiretta polare una *misura* rispetto a U , rappresentata da un simbolo k , detto *coordinata numerica* di P (cfr. [1]). Si pone $P = kU$, e, inoltre, $O = 0U$ e $U = 1U$.

L'insieme dei coefficienti che denotano le misure rispetto a U dei punti della semiretta OU sono tutti e soli i cosiddetti *numeri reali non negativi* (quelli diversi da 0 sono detti *numeri reali positivi*). I numeri reali non negativi ereditano la struttura di monoide dai punti dello spazio di misura individuato sulla semiretta OU , con 0 come zero e 1 (uno) come unità, e di conseguenza anche il prodotto definito nello spazio di misura a partire dalla somma (cfr. [1]).

I.1.2 La retta polare come retta numerica

Lo spazio (risp. piano) vettoriale OU ristretto ai punti della la retta OU è uno spazio vettoriale (sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale OU). La struttura di spazio vettoriale sulla retta OU è anche una struttura di *campo*, e, in particolare, introdotto l'usuale ordinamento tra i punti di OU (definito attraverso la somma di punti della retta), di *campo ordinato completo*.

D'altro canto, per simmetrizzazione, ovvero introducendo gli elementi opposti dei numeri reali positivi, detti *numeri reali negativi*, il monoide dei numeri reali positivi diventa un campo, e introducendo tra i numeri reali la relazione d'ordine definita ponendo i negativi minori di 0 e $a < b$ se e solo se $-b < -a$ un campo ordinato completo. Inoltre, se a $-P$, con $P = kU$, si attribuisce la coordinata numerica $-k$, l'insieme delle coordinate dei punti di OU eredita dai punti di OU ancora una struttura di cam-

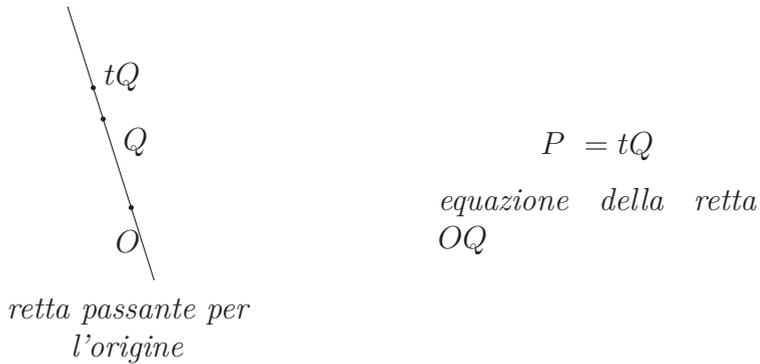
po ordinato completo e tale struttura coincide con quella ottenuta per simmetrizzazione della struttura di monoide ordinato dei numeri reali positivi. Ogni punto P della retta OU può essere allora scritto nella forma $P = kU$, con k numero reale, detto *coordinata numerica* di P (rispetto a (O, U)). Viceversa al variare di k nel campo dei numeri reali tutti i punti kU sono punti della retta polare. Un punto scalare si può allora identificare con la sua coordinata numerica e d'ora in avanti quando si parlerà di scalare ci si riferirà indifferentemente ad un punto della retta polare o alla sua coordinata numerica. Quando si opera questa identificazione la retta OU può essere chiamata *retta numerica (reale) OU* . Se a e b appartengono a OU , con $a \leq b$, i simboli $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ traggono significato dal loro analogo nell'ambito dei numeri reali.

I.1.3 *Equazione parametrica della retta nel piano e nello spazio*

Nello spazio (risp. nel piano) vettoriale OU , considerata una generica retta, s , passante O , fissato $Q \in s$, punto distinto da O , tutti e soli i punti della retta s sono i punti P dello spazio (risp. del piano) che soddisfano la condizione $P = kQ$, con k appartenente alla retta OU . L'equazione $P = tQ$ è detta *equazione parametrica* della retta OQ . Per $t \geq 0$ si ottengono tutti e soli i punti della semiretta OQ e per $0 \leq t \leq 1$ tutti e solo i punti del segmento OQ .

Se Q appartiene alla circonferenza di centro O e passante per U , il triangolo POQ è isoscele e quindi il punto $P = tQ$ appartiene alla circonferenza di centro O passante per tU .

Sulla semiretta OQ si può considerare la struttura di spazio di misura ereditata dallo spazio di misura OU : se $A = t_A Q$ e $B = t_B Q$, $A + B = (t_A + t_B)Q$, se $t_A \leq t_B$ allora $A = t_A Q \leq B = t_B Q$. Se $P = tQ$, con $t > 0$, t rappresenta la misura di P rispetto all'unità Q e, più in generale, t rappresenta la coordinata numerica del punto tQ sulla retta s riguardata come retta numerica di origine O e unità Q .



Per ottenere l'equazione di una retta r che non passa per O , si consideri la retta r' passante per O e parallela a r . Sia P_0 appartenente ad r e Q distinto da O e appartenente a r' , i punti P di r (e solo i punti di r) si possono scrivere nella forma:

$$P = P_0 + tQ,$$

con tQ vertice opposto a P_0 nel parallelogramma avente come altra

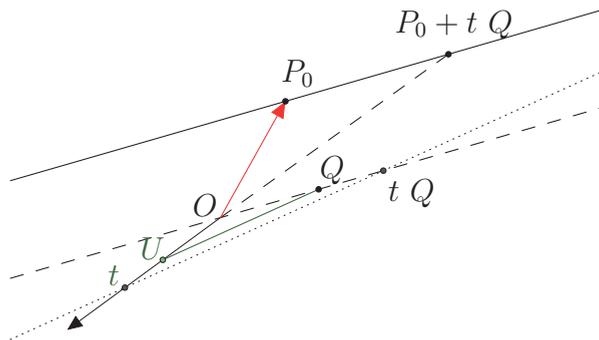


Figura 1.3: Equazione parametrica della retta

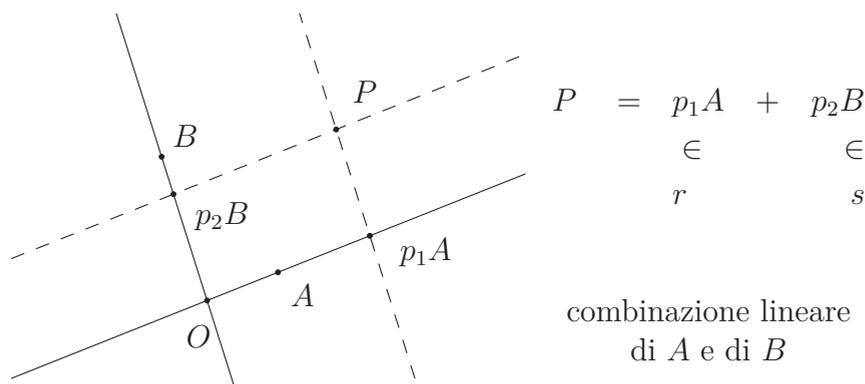
coppia di vertici opposti i punti O e P .

L'equazione $P = P_0 + tQ$ viene detta *equazione parametrica* della retta passante per P_0 e parallela ad OQ .

Ogni retta r di equazione $P = P_0 + tQ$ può essere riguardata come *retta numerica* avente P_0 come zero, $P_0 + Q$ come unità,

$+(P_0, P_0+Q)$, definita da $A +_{(P_0, P_0+Q)} B = P_0 + (t_A + t_B)Q$, con $A = P_0 + t_A Q$ e $B = P_0 + t_B Q$, come somma e come relazione d'ordine quella definita ponendo $A = P_0 + t_A Q < B = P_0 + t_B Q$ se e solo se $t_A < t_B$. In tal caso la coppia $(P_0, P_0 + Q)$ viene detta *riferimento* sulla retta r .

I.1.4 Base nel piano euclideo



In un piano euclideo sia fissato il campo degli scalari OU e siano r e s due rette che si intersecano solo in O . Sia P un punto del piano non appartenente né a r né a s . Il punto P può essere riguardato come vertice opposto ad O in un parallelogramma avente gli altri due vertici rispettivamente su r e s , chiamiamoli P_1 e P_2 , e quindi P è somma di $P_1 \in r$ e di $P_2 \in s$. Se poi P appartiene a r o a s esso è somma P e O , e anche in questo caso è somma di una coppia di punti appartenenti uno a r e l'altro a s .

Considerati ora $A \in r$ e $B \in s$, distinti da O , risulta $P = p_1A + p_2B$, con p_1A proiezione di P su r rispetto alla direzione di s e p_2B proiezione di P su s rispetto alla direzione di r . L'espressione $p_1A + p_2B$ è chiamata *combinazione lineare* di A e di B mediante gli scalari p_1 e p_2 . Possiamo allora dire che ogni vettore del piano si ottiene in unico modo come *combinazione lineare* dei vettori A e B . Un vettore che si esprime come combinazione lineare di altri vettori si dice che *dipende linearmente* da questi e quindi tutti i vettori del piano dipendono linearmente da A e B . Per questo motivo si

dice che (A, B) è un *sistema di generatori* del piano vettoriale OU . Poiché A e B non sono allineati, non sono proporzionali e, quindi, non si scrivono come combinazione lineare l'uno dell'altro, si dice allora che A e B costituiscono un *sistema di vettori linearmente indipendente* (da cui dipende la proprietà che i vettori che dipendono da essi vi dipendono in modo unico) del piano vettoriale OU . Si dice pure che la coppia (A, B) è una *base* per il piano vettoriale OU .

Se (H, K) è una base del piano vettoriale OU , ogni punto P del piano è combinazione lineare di H e K , e esiste un'unica combinazione lineare di H e K che è uguale a P . Gli scalari coefficienti di H e di K nella combinazione lineare uguale a P si dicono *coordinate* del punto P nella base (H, K) , e dire che (p_1, p_2) sono le coordinate di P nella base (H, K) vuol dire che $P = p_1H + p_2K$. L'unica condizione richiesta a due punti H e K del piano vettoriale OU , distinti da O , per essere (H, K) una base è che essi non siano allineati con O .

Nel piano vettoriale OU due punti, U_1 e U_2 , non allineati con O sono linearmente indipendenti. Dati invece tre punti $\{U_1, U_2, U_3\}$ nel piano vettoriale OU essi non sono mai linearmente indipendenti. Ogni volta che in un sistema di vettori almeno uno dei suoi dipende linearmente dai rimanenti il sistema si dice *linearmente dipendente*.

I.1.5 Base nello spazio tridimensionale euclideo

Nello spazio euclideo tridimensionale si fissi la struttura di spazio vettoriale individuata da (O, U) . Fissati due punti linearmente indipendenti, A e B , un generico punto P non dipende necessariamente da essi, poiché può essere esterno al piano individuato da A , B e O .

Fissati U_1, U_2 e U_3 , tre punti non complanari con O , essi sono evidentemente linearmente indipendenti e i piani OU_1U_2 , OU_2U_3 e OU_1U_3 , sono, ovviamente, distinti.

Un punto P che non appartenga a nessuno dei piani OU_1U_2 , OU_1U_3 , OU_2U_3 è estremo della diagonale di un parallelepipedo con