Aoi

Vai al contenuto multimediale

L'immagine di copertina è a cura di Luca Sassoli de Bianchi.

Diederik Aerts
Massimiliano Sassoli de Bianchi

Misure universali

Come prendere tre piccioni con una fava

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-2637-0

I edizione: luglio 2019

Dedicato alla memoria di Bart D'Hooghe
che da "dietro le quinte" ci ha guidato
verso la possibilità di questa collaborazione
i cui frutti sono in parte anche i suoi

Le attualità sembrano galleggiare su un più vasto oceano di possibilità, da cui emergono quando sono scelte; e in un certo modo, l'indeterminismo ci dice che tali possibilità esistono, e sono parte della verità.

William James

Indice

Prefazione

Che cos'hanno in comune un paradosso ultracentenario della teoria delle probabilità, il problema centrale della meccanica quantistica e quello della modellizzazione dei processi cognitivi umani? Semplicemente, tutti e tre questi problemi possono essere affrontati, e in parte risolti, sfruttando una stessa nozione fondamentale: quella di *media universale*, o *misura universale*.

Scopo di questo libricino è accompagnare il lettore in un'affascinante avventura: quella che gli autori hanno avuto il piacere di condividere nel corso della loro recente collaborazione, per giungere alle soluzioni che qui presenteremo, spiegheremo e illustreremo.

Il testo si rivolge a tutti gli appassionati di scienza e non richiede particolari conoscenze tecniche per essere letto, salvo ovviamente un po' di cultura scientifica generale, e molta curiosità. D'altra parte, siccome presenteremo delle nozioni d'avanguardia, a tutt'oggi ancora poco note tra i ricercatori di professione, la lettura risulterà vantaggiosa anche agli esperti, che potranno in seguito completarla consultando gli articoli tecnici riportati nella bibliografia. Infine, il testo si rivolge agli insegnanti, che ci auguriamo troveranno numerosi spunti per arricchire i loro corsi e stimolare le giovani menti dei futuri ricercatori.

Prima di cominciare, pensiamo sia istruttivo spiegare com'è nata la collaborazione che ha portato ai risultati che presenteremo in questo volumetto (è certamente possibile saltare questa prefazione, o percorrerla in un secondo tempo, senza inconvenienti per il resto della lettura). Si noti che i resoconti che seguono sono stati scritti da una prospettiva in prima persona, per evitare il disagio e l'artificiosità di un testo dove gli autori parlano di loro in terza persona.

Il lettore non dovrà preoccuparsi se gli sfuggirà il significato di alcune delle nozioni che verranno qui evocate, non essendo evidentemente lo scopo di questa prefazione spiegarle, cosa che invece faremo nel dettaglio nei capitoli successivi.

MASSIMILIANO: Nel luglio del 2013 mi stavo interessando a una particolare nozione teorica, denominata *robustezza*, come possibile chiave per comprendere la natura delle misteriose misure quantistiche. La mia speranza era di poter caratterizzare le misure quantistiche come delle misure le quali, tra tutte le misure possibili, erano quelle massimamente robuste. L'idea era che queste venissero selezionate dagli sperimentatori quando regolavano i loro strumenti di misura, dacché più le misure erano robuste e più avrebbero garantito la *riproducibilità* dei risultati sperimentali.

Per esplorare quest'idea necessitavo però di un quadro teorico sufficientemente generale, nel quale descrivere le diverse tipologie di misura possibili, in aggiunta a quelle puramente quantistiche; questo al fine di calcolare, e in seguito confrontare, i gradi di robustezza delle diverse misure e riuscire in questo modo a evidenziare che quelle quantistiche erano, per l'appunto, le più robuste.

Sapevo che un quadro teorico di questo genere era stato proposto negli anni Ottanta del secolo scorso da *Diederik Aerts*, fisico belga di cui conoscevo i lavori, poiché era stato allievo di *Constantin Piron*, uno dei fondatori della cosiddetta *scuola di fisica quantistica di Ginevra* (in seguito meglio nota con il nome di *scuola di fisica quantistica di Ginevra-Brussels*, proprio per gli importanti contributi apportati da Aerts e dai suoi collaboratori).

Figura 1. C. Piron.

Conoscevo bene Piron, perché ero stato il suo assistente per circa un anno, nel 1990. La sua ricerca era tutta incentrata nel tentativo di ricostruire i fondamenti delle teorie fisiche partendo da un approccio assiomatico ed operazionale, il più generale possibile. Più esattamente, partendo da nozioni teoriche molto semplici, come quelle di *test sperimentale*, *proprietà* e *stato*, la speranza era quella di riuscire a derivare sia la fisica quantistica che la fisica classica come casi speciali di una teoria più ampia e generale.

Piron ottenne dei risultati molto probanti, ma fu Aerts a portare a compimento questo programma, identificando il contenuto fisico di alcuni degli assiomi necessari a caratterizzare una teoria quantistica e comprendendo che la presenza di questi assiomi introduceva una limitazione strutturale irriducibile nella teoria stessa, che pertanto non poteva essere considerata una teoria *completa* (ad esempio perché incapace di descrivere dei sistemi *sperimentalmente separati*), come la più parte dei fisici invece riteneva, e a tutt'oggi ritiene.

D'altra parte, una teoria più generale, non sottoposta ai limiti strutturali associati a questi specifici assiomi, poteva considerarsi completa (o maggiormente completa) nel senso di "essere in grado di descrivere tutti i processi e le condizioni in linea di principio osservabili in natura, sia in ambito macroscopico che microscopico".

Ricordavo bene con quanta ammirazione Piron mi aveva parlato dei progressi compiuti da Aerts, e avendo avuto occasione, in epoca più recente, di leggere e commentare alcuni dei suoi lavori, fu naturale per me partire dal suo approccio nel tentativo di formalizzare il mio argomento di robustezza delle misure quantistiche. Più esattamente, m'interessai a quel particolare approccio denominato *a misure nascoste*, sviluppato dallo stesso Aerts per modellizzare i diversi comportamenti possibili dei sistemi fisici, siano essi classici, quantistici, o *simil-quantistici* (intermedi).

Come avremo modo di spiegare nel testo, il termine "a misure nascoste" fa riferimento al fatto che non sempre nel corso di un esperimento l'interazione tra lo strumento di misura e l'entità misurata può considerarsi predeterminata, e in tal senso questa resterebbe "nascosta", poiché "non nota", e a seconda del modo in cui l'interazione viene di volta in volta selezionata si potranno ottenere diverse tipologie di misura.

Negli anni Novanta, nell'ambito dei suoi studi assiomatici, Diederik si era già posto la domanda circa la natura specifica delle misure quantistiche, e più esattamente circa la natura delle probabilità cui esse sono associate (dette *probabilità quantistiche*, per distinguerle dalle *probabilità classiche*, che emergono dalla *logica Booleana*). Infatti, avendo riconosciuto nel suo approccio a misure nascoste che diverse tipologie di misure erano a priori possibili, e che quelle classiche e quantistiche erano solo dei casi particolari, era del tutto naturale chiedersi quale potesse essere il meccanismo che faceva sì che nei processi di misura delle entità microscopiche erano proprio le misure quantistiche, con le loro specifiche probabilità, ad emergere, e non altre tipologie di misura.

A questa domanda Diederik diede una risposta affascinante, per quanto decisamente speculativa: secondo la sua ipotesi, le misure quantistiche erano delle vere e proprie *misure universali*, nel senso che erano il risultato di una gigantesca media su tutte le possibili tipologie di misura. Pertanto, esprimevano un livello di *indeterminismo* molto più profondo e fondamentale di quanto si poteva inizialmente sospettare. Questo, naturalmente, sempreché la sua ipotesi si fosse rivelava corretta.

Ora, quando formulai la mia ipotesi, nel quadro dell'approccio a misure nascoste, che le misure quantistiche erano tali perché massimamente robuste, la mia prima impressione fu che vi fosse un conflitto tra questa spiegazione e quella proposta da Diederik, secondo la quale le misure quantistiche erano invece il risultato di una media universale.

Decisi così di scrivere una prima bozza di un breve articolo sulla questione, e nel testo espressi anche la mia critica circa la validità dell'idea delle misure universali. Prima di rendere pubblica la versione definitiva dell'articolo, postandolo sul grande archivio degli articoli scientifici della Cornell University (*arXiv.org*), lo inviai a Diederik, per stimolare una sua possibile reazione circa le critiche che in esso avevo espresso.

La sua risposta non si fece attendere. Subito espresse un notevole interesse circa la possibilità di identificare altre nozioni, come quella della robustezza, per spiegare l'emergenza delle misure quantistiche e delle probabilità quantistiche, ma mi invitò al contempo a una certa prudenza. Dal suo punto di vista, infatti, non era necessario contrapporre la nozione di robustezza a quella di misura universale: entrambe valevano la pena di essere approfondite e avevano un loro interesse, ma non andavano per questo considerate necessariamente concorrenti. Poteva benissimo essere, mi disse, che le misure quantistiche erano universali *e* al contempo massimamente robuste.

Alla risposta di Diederik seguì un lungo e nutrito scambio di messaggi, nel corso del quale cercai di meglio comprendere la nozione, assai sottile, di misura universale, pur rimanendo piuttosto scettico circa la possibilità non solo di dare un senso fisico alla nozione, ma altresì di metterla in corrispondenza quantitativa con le misure quantistiche. Questo soprattutto perché, per farlo, bisognava risolvere una questione molto spinosa, rimasta irrisolta sin dal 1889: il famoso *paradosso di Bertrand*.

Era infatti a causa di questo paradosso che la nozione di misura universale non poté ricevere una formulazione sufficientemente chiara ed esaustiva, quando Diederik la formulò negli anni Novanta: ogni volta che si cercava di definirla in modo matematicamente più preciso, subito ci si scontrava con le difficoltà espresse da questo famoso problema, che giaceva ai fondamenti della *teoria delle probabilità*.

Al termine di questo primo lungo scambio di idee, Diederik mi propose di continuare la nostra discussione, ma questa volta con l'obiettivo di riassumere le conclusioni cui saremmo giunti in un possibile articolo scritto a quattro mani. Accettai questa sua proposta con entusiasmo, anche perché più andavo avanti a discutere con lui e più comprendevo di non aver realmente compreso che cosa fosse una misura universale.

La nostra discussione proseguì per qualche tempo, pressappoco nel modo seguente. Ogni volta che cercavo di mettere in luce delle possibili inconsistenze nella nozione di misura universale, Diederik mi rispondeva rivoltando ognuna delle mie argomentazioni, e ogni volta mi ritrovavo un po' più confuso. Continuavo sì a credere che vi fosse un problema nella nozione, ma ne ero sempre meno sicuro.

Va detto che nel corso degli anni Diederik aveva già affrontato il problema di questa particolare media universale da diverse angolature, anche collaborando per qualche tempo con un matematico esperto di teorie probabilistiche, o proponendo il soggetto a un suo dottorando (*Bart D'Hooghe*). Ma ogni volta, immancabilmente, si presentavano dei problemi matematici insormontabili, legati ai fondamenti stessi della matematica.

Ad esempio, se si partiva dalla teoria degli insiemi, per definire una media universale bisognava scegliere un metodo per definire l'insieme delle misure su cui effettuare la media. In questo modo però, il risultato della media, che a sua volta è una misura, dipendeva dal metodo scelto, cosicché si doveva nuovamente scegliere un metodo per effettuare la media sui diversi modi di scegliere un insieme, e così via, dando vita a una rovinosa regressione all'infinito.

Quando mi spiegò tutte queste difficoltà, per non dire impossibilità, mi ricordo che di fronte alle mie perplessità Diederik disse qualcosa che mi colpì molto, ossia: *che non dovevamo in nessun modo subordinare la fisica alla matematica*! Nella fattispecie, la nozione di media universale poteva benissimo possedere un senso fisico profondo anche se non era possibile darle un senso matematico preciso.

Non ricordo bene se fu proprio quella sua frase a fornirmi l'impulso necessario a provare qualcosa di diverso, ma anziché affrontare il problema direttamente, cosa che sembrava impossibile fare, cercai di costruire un "modello giocattolo", ultra-semplificato, in cui il problema fosse facilmente trattabile. A dire il vero, la mia motivazione nel fare questo era inizialmente quella di trovare un controesempio. Infatti, pensai, se l'idea alla base delle misure universali si fosse rivelata inesatta in un contesto semplificato, a fortiori doveva esserlo in un contesto generale.

Ma a mia grande sorpresa il modello giocattolo corroborava la tesi di Diederik, e quello fu il punto di partenza che ci permise in seguito di generalizzare l'approccio e ottenere una soluzione completa del problema dell'equivalenza tra le misure universali e le misure quantistiche. Insomma, Diederik aveva avuto ragione sin dal principio circa la validità della nozione e circa la sua piena compatibilità con la nozione di robustezza: le misure quantistiche sono delle misure universali (o meglio, un tipo particolare di misure universali) *e* al contempo delle misure massimamente robuste.

Il mio dissenso iniziale era stato però utile, poiché aveva generato una dinamica costruttiva che è poi sfociata in una soluzione completa del problema della misura quantistico. Ma non solo: grazie al collegamento tra misure universali e paradosso di Bertrand, ci rendemmo presto conto che con la stessa nozione (di media universale) eravamo anche in grado di risolvere questo importante problema, che da più di un secolo minava i fondamenti stessi della teoria delle probabilità.

Infine, essendo Diederik uno dei pionieri della cosiddetta *cognizione quantistica*, campo d'indagine multidisciplinare in cui la matematica quantistica viene usata per modellizzare i processi cognitivi umani, ci rendemmo altresì conto che il nostro risultato offriva una spiegazione molto convincente del perché le probabilità quantistiche erano così efficaci nella modellizzazione dei processi cognitivi umani. Lo erano perché, semplicemente, gli scienziati cognitivisti, nei loro esperimenti, effettuavano senza rendersene conto delle misure universali e che le misure quantistiche sono delle misure universali.

Insomma, con la stessa “fava universale” avevamo preso tre grossi “piccioni”!

DIEDERIK: È stato un giorno fortunato quando Massimiliano mi ha contattato, facendomi parte del suo scetticismo circa la nozione di *misura universale* e la congettura che avevo enunciato in alcuni miei articoli, ossia che le *probabilità quantistiche* altro non fossero che delle *medie universali* su tutti i possibili tipi di probabilità non-classiche, e che di conseguenza potessero essere interpretate come le probabilità di una sorta di *teoria non-classica del primo ordine*.

Nel formulare la congettura, l’analogia che avevo in mente era come il primo termine di una serie di Taylor costituisse una *prima approssimazione* di una qualsiasi funzione olomorfa (vale a dire, infinitamente differenziabile), e che nell’ambito dei *modelli probabilistici non-classici* tale ruolo fosse assunto, per l’appunto, dalle probabilità quantistiche. Se tale ipotesi si fosse dimostrata corretta, avrebbe potuto spiegare il successo delle probabilità quantistiche in un modo simile a come le funzioni lineari – che sono il primo termine nelle serie di Taylor delle funzioni olomorfe – hanno successo nel modellizzare situazioni dove la relazione funzionale non è conosciuta, come avviene negli approcci statistici che fanno uso di regressioni lineari.

Tuttavia, il giorno in cui Massimiliano mi ha contattato, e abbiamo iniziato a discutere di questa congettura, non vi avevo riflettuto da più di un decennio. La mia mente era pertanto impegnata in questioni molto diverse, ma subito fu nuovamente stimolata dalle sue osservazioni. Come egli ricorda nella sua prefazione, avevo già tentato assiduamente di ottenere una dimostrazione della congettura, – in un primo momento collaborando con un probabilista matematico e in seguito proponendo il problema come dottorato di ricerca a uno dei miei studenti, *Bart D’Hooghe*, – ogni volta però inciampando su alcuni aspetti del paradosso di Bertrand.

Personalmente, ciò che mi ha permesso di continuare a credere nella correttezza della congettura è stata la mia *intuizione fisica* che se un tale *mucchio* – per non chiamarlo *insieme*, altrimenti veniamo subito colpiti dal paradosso di Bertrand – di modelli di probabilità non-classiche esistono nella realtà fisica, allora una qualche sorta di media deve necessariamente poter emergere in termini statistici in questa realtà fisica, quale conseguenza della nostra mancanza di conoscenza del modello probabilistico non-classico che governerebbe ogni specifica situazione. È da questa convinzione che deriva anche molto probabilmente l'affermazione che *non dovremmo subordinare la fisica alla matematica*, che ha agito come una sfida e ha portato Massimiliano a cercare un modello giocattolo.

Figura 2. B. Hooghe.

In ogni caso, come si dice, "il resto è storia". Infatti, Massimiliano, con mia grande ammirazione e stupore, dopo che il suo modello giocattolo ha confermato la congettura, ha trovato una strada verso una dimostrazione generale della stessa, rendendo poi possibile, per l'appunto, *prendere tre piccioni con una sola fava universale*.

Capitolo I

Il paradosso di Bertrand

Come indicato nel titolo, e nella prefazione, il tema centrale di questo libro è la nozione di *misura universale* (o *media universale*). Il nostro obiettivo è quello di spiegare in che modo questa nozione fondamentale permette di risolvere tre importanti problemi, in tre diversi campi della conoscenza: il problema della misura (o problema dell'osservazione), nella teoria quantistica; il paradosso di Bertrand, nella teoria delle probabilità; e il problema dell'irragionevole efficacia delle probabilità quantistiche, in psicologia sperimentale.

Cominceremo occupandoci del famoso paradosso di Bertrand, che sin dal 1889 minaccia la validità del cosiddetto *principio di indifferenza*, su cui si fonda tutto il calcolo delle probabilità. *Joseph Louis François Bertrand* (1822-1900) è stato un celebre matematico francese che ha contribuito a numerosi campi dello scibile umano: teoria dei numeri, geometria differenziale, teoria delle probabilità, economia e termodinamica. Nel suo famoso libro sulla teoria delle probabilità ha enunciato il seguente problema (Bertrand, 1889):

Se tracciamo in modo casuale una corda su un cerchio, qual è la probabilità che sia più lunga del lato di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio?

A questo suo quesito, apparentemente innocente, Bertrand ha poi fornito *tre diverse risposte*, associate a *tre distinti valori* per la probabilità in questione. E poiché queste sue risposte sembravano fondarsi, tutte e tre, su un ragionamento perfettamente corretto e logico, questo spiega perché il suo problema sia stato susseguentemente definito (da *Poincaré*) un *paradosso*.

La *prima soluzione* proposta da Bertrand consiste nello scegliere un punto arbitrario sul cerchio, considerandolo uno dei vertici di un triangolo equilatero inscritto. Questo punto, che descrive uno dei due punti di intersezione della corda con il cerchio, viene mantenuto fisso, mentre il secondo varia (cosicché la corda può muoversi come una sorta di pendolo).

Figura 1.2. J. L. F. Bertrand.

Si osserva allora che considerando tutti i punti possibili sul cerchio (relativi a questo secondo punto di intersezione), la corda ruoterà di un angolo totale di 180°, ma che solo le corde che intersecano l'arco di cerchio sotteso da un angolo di 60° rispetto al vertice del punto fisso (vedi la Figura 1.2) soddisferanno la condizione di essere più lunghe del lato del triangolo equilatero inscritto. Pertanto, la probabilità P cercata è data dal rapporto:

$$P = \frac{60°}{180°} = \frac{1}{3}$$

La *seconda soluzione* proposta dal matematico francese consiste nello scegliere prima una direzione arbitraria e quindi considerare tutte le corde che sono parallele a tale direzione. Muovendole lungo il cerchio, si osserva allora che quelle che intersecano il suo diametro (ad esse perpendicolare) lungo un segmento centrale la cui lunghezza è pari a metà del diametro (vedi la Figura 1.3) soddisfano la condizione di essere più lunghe del lato del triangolo equilatero inscritto. Pertanto, questa volta la probabilità cercata è: