Aoi

Stefano Martire, Alfredo Marzocchi

Salendo su un foglio di carta

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-2451-2

I edizione: gennaio 2020

Indice

Introduzione

Alfredo e Stefano Potenziale lettore...

Potenziale Lettore Dite a me?

Alfredo e Stefano Sì, buongiorno. Sai perché abbiamo scritto questo libro?

Potenziale Lettore Come faccio a saperlo? L'ho preso in mano solo ora...

Alfredo e Stefano Be'... neanche noi lo sappiamo bene.

Potenziale Lettore Ah.

Alfredo e Stefano Sai che è un libro per divulgare la Matematica?

Potenziale Lettore L'ho pensato, un po' vedendo le figure, e per questo stavo leggendo l'introduzione per capire meglio di che si tratta... però poi vi ho incontrato e ho capito che non ne caverò molto.

Alfredo e Stefano Magari sì. Ti piace la Matematica?

Potenziale Lettore Un po' mi attira, ma anche mi spaventa. Tutti quei conti... e se ne sbagli uno sei finito! 4 nella verifica.

Alfredo e Stefano Tranquillo: qui non ci sono verifiche. E neanche tanti conti. Solo idee. Sai che ci sono tante idee in Matematica?

Potenziale Lettore Sì, sì, però sono cose teoriche, astratte, no? Saranno cose per geni.

Alfredo e Stefano Niente affatto. Bisogna crederci un po', perché il linguaggio è severo, ma una volta imparato si leggono cose bellissime. E sono cose che rendono possibili tantissime applicazioni alla nostra vita. Pensa ad internet, alle trasmissioni criptate, ma anche alle cure mediche.

Potenziale Lettore Sì lo so che dietro a internet c'è la matematica.

Alfredo e Stefano Non farlo.

Potenziale Lettore Cosa non farlo?

Alfredo e Stefano Non tirare fuori il cell. Continua a leggere.

Potenziale Lettore Ma...

ALFREDO E STEFANO I messaggi li leggi dopo, dai... senti, noi abbiamo fatto un esperimento.

POTENZIALE LETTORE Quale? Sono proprio curioso.

ALFREDO E STEFANO Dato che di idee in Matematica ce ne sono molte, ma che spesso sono un po' difficili da cogliere, proprio per via del linguaggio severo, abbiamo pensato di cercare di renderle un po' più digeribili.

POTENZIALE LETTORE Non mi sembra niente di nuovo. Ci sono tanti libri di divulgazione matematica. Perché il vostro dovrebbe essere un esperimento?

ALFREDO E STEFANO Non sappiamo se è o sarà innovativo. Però volevamo provare a spiegare certe cose in maniera un po' diversa, un po' più narrata, capisci? Non come il prof che ti spiega con parole più semplici, ma come qualcosa che ti capita e ti fa capire...

POTENZIALE LETTORE Ah.

ALFREDO E STEFANO Per questo abbiamo usato stili diversi, inserito parti narrative, mantenendo alcune zone dove puoi trovare una spiegazione classica, però cercando anche di divertirti un po'. Speriamo di esserci riusciti.

POTENZIALE LETTORE Quindi state dicendo che con la Matematica ci si può divertire.

ALFREDO E STEFANO Se non c'è la verifica sì. Noi per esempio ci siamo divertiti, anche se la verifica in realtà ce l'abbiamo. Sei tu.

POTENZIALE LETTORE Eh eh... Quindi vi posso dare 4 se ve lo meritate?

ALFREDO E STEFANO Certo. Però ci piacerebbe che tu lo facessi a ragion veduta, dopo aver letto il libro. Perché se sei in una libreria e stai leggendo un libro di matematica significa che sei curioso. E noi alle persone curiose ci teniamo, perché possono diventare buoni matematici.

POTENZIALE LETTORE Ho capito. Ci proverò. Adesso però basta con questa introduzione che mi fate perdere la voglia di continuare.

ALFREDO E STEFANO No, certo. Buona lettura, e viva la Matematica!

1. Infiniti numeri primi

Trovare analogie tra un'equazione di secondo grado e il nostro vivere di tutti i giorni, messo da parte l'adorabile moto di una palla in caduta libera, è effettivamente complicato. Da questo e altri dilemmi che compongono la domanda di un liceale medio "ma perché studio Matematica" deriva, molto probabilmente, il totale disinteresse dei più verso il meraviglioso Discorso dei Numeri. Ma se la Matematica andasse ricercata nelle nostre giornate in una forma più semplice? Senza integrali e logaritmi, ma considerandola nel suo particolarissimo modo di procedere, nella logica essenziale che la rappresenta. Se i numeri e le equazioni fossero soltanto un pretesto?

Stabilire o dedurre cosa sia vero e cosa falso è forse il primo obbiettivo di un matematico. Un *teorema* è proprio questo: il dichiarare che una o più *ipotesi* implicano necessariamente una certa affermazione, una certa verità (tecnicamente chiamata, l'affermazione, *tesi*).

> Se bevo un litro di cicuta, muoio.
>
> Se passo alla pagina successiva di questo libro e non sono stato truffato dagli autori, allora troverò frasi e parole differenti.

sono due esempi di teoremi, mentre

> Se esco senza giubbotto d'inverno, mi ammalo.

non lo è, perché la correlazione tra l'esporsi al freddo senza indossare un cappotto e l'ammalarsi non è immediata: potrebbe andare tutto bene. Partendo da quelle ipotesi, quindi, non è possibile dimostrare quella tesi, l'"ammalarsi per forza". In alternativa potremmo dire che quest'ultimo è sì un teorema, però *falso*[1].

1. Oppure, come accade in alcuni contesti, si possono chiamare "enunciati" le affermazioni in generale, tenendo la più specifica parola "teorema" solo per le affermazioni *vere*.

Anche se i concetti studiati diventano sempre più complicati (finanche, purtroppo o per fortuna, alla comparsa di qualche numero) lo schema ipotesi–tesi rimane lo stesso fino al Premio Nobel[2]. Ma come si dimostra effettivamente un teorema? In che modo bisogna procedere per giungere alle conclusioni di volta in volta desiderate? Qui le faccende possono complicarsi parecchio, da cui la distribuzione non gratuita di lauree in Matematica e via dicendo. Vi è però una strategia, una delle possibili, tanto elementare e intuitiva quanto efficace e interessante anche a livelli molto avanzati, della quale vorrei darvi un'idea con una semplice ma fiabesca applicazione.

Partiamo con un esempio chiarificatore. Ciò che accade tipicamente durante le indagini su un delitto è il dover dimostrare che un certo interrogato abbia detto la verità oppure no. Sentita la sua spiegazione del misfatto, dunque, il detective ha il compito di verificare l'alibi con il fine ultimo di risolvere il caso. Se non è proprio così che funziona perdonatemi ma io sono solito parlare con i numeri e loro non mentono mai.

"Gianni ha mentito" è un teorema a tutti gli effetti (vero o falso è da vedere). Infatti, in casi come questi dove non si vedono le ipotesi e quindi l'implicazione di cui parlavamo prima, è perché sono in un certo senso sottintese. In generale, si possono sempre riformulare queste affermazioni in modo da rivelare la struttura classica "ipotesi–tesi". Nel nostro caso potrebbe essere: "Se xxx è il racconto di Gianni, allora xxx non è quello che è accaduto realmente" che è appunto la versione estesa di "Gianni ha mentito".

Fatte queste premesse, una strada molto intelligente da percorrere potrebbe essere non quella di dimostrare direttamente che Gianni ha mentito, ma piuttosto quella di partire dalle sue ipotesi, dal suo racconto e arrivare con qualche passaggio a una conclusione *assurda*, a un paradosso che sappiamo di per certo non poter essere vero, come per esempio: il trovarsi in due luoghi molto lontani quasi alla stessa ora; l'essere passato davanti a una telecamera pubblica le cui registrazioni però rivelano altro. In questo modo avremmo dimostrato che la sua spiegazione del fattaccio — potremmo dire "il suo teorema" — è necessariamente falsa, in quanto porta ad affermare fatti palesemente falsi. Sarebbe dunque chiaro a tutti che l'indiziato

2. Che in verità per la Matematica non esiste #haters.

in questione ha dichiarato il falso e il teorema "Gianni ha mentito" verrebbe dimostrato.

L'indiziato si dichiara non coinvolto e fornisce una spiegazione;

La spiegazione porta a conclusioni assurde

$\Rightarrow$ [3]

La spiegazione è falsa, cioè l'indiziato ha mentito.

È chiaro che, nella situazione precedente, si potrebbe e si dovrebbe proseguire con quell'andazzo fino a che il colpevole non viene trovato, proseguendo nella dimostrazione di tutti gli altri teoremi legati a tutti gli altri indiziati. Non è tuttavia interesse nostro includere un romanzo giallo in questo libro che vorrebbe parlare di altro.

L'esempio del detective è stato scelto solo come incipit per dare un'idea del dove possiamo arrivare ragionando in quel modo. Questa cosa di negare la tesi (negare che abbia mentito) e accorgersi che *invece* — dopo poche o molte indagini — deve essere per forza vera perché altrimenti incorreremmo in contraddizioni è nota come "dimostrazione per assurdo di un teorema". Non servendosi di sofisticati concetti di Logica risulta evidentemente applicabile anche in contesti molto umani e molto quotidiani (senza necessariamente pensare a tribunali e supercriminali). "Anche", non "solo": tale modo di ragionare ci permette infatti di ottenere risultati meravigliosi pure in Matematica (in effetti, in tutte queste righe, solo di Matematica si è parlato) e ciò che segue ne è uno storico esempio.

L'infinità dei numeri primi

Non è difficile immaginare che, essendo infiniti i numeri, anche quelli primi[4] lo siano. Se però ci viene la malsana idea di mettere bene in chiaro la questione (e quindi di dimostrare il teorema "i numeri primi

3. Questa freccia significa che ciò che sta prima *implica* ciò che sta dopo.

4. Giusto per avere ben chiara la questione: un numero si dice *primo* quando è divisibile solo per 1 e per se stesso. 5 e 7 sono quindi primi, 8 no perché è divisibile per 2.

sono infiniti"[5]), è presto visto che le insidie sono molte più di quelle che sembrano.

Chiaramente l'iniziare a contare tutti i numeri primi che troviamo lungo il cammino è una pessima idea: sia perché capire se un numero è divisibile per qualcosa diventa sempre più difficile man mano che andiamo avanti a contare (ad un certo punto l'utilizzo di un computer diventa necessario), sia perché se i numeri primi sono effettivamente infiniti, dove pensiamo di arrivare contandoli? Ed ecco che il procedere *per assurdo* diventa un'opzione interessante. Infatti:

> Facciamo finta che i numeri primi non siano infiniti

e vediamo cosa succede.

Tanto per cominciare, se non sono infiniti esisterà un numero primo più grande di tutti, che chiamiamo genericamente P (non sapendo quale esso sia). Ma allora la "lista di tutti i numeri primi" è effettivamente stilabile. Sarà del tipo:

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots, P.$$

Quanti sono non ci interessa, l'importante è il sapere che possiamo effettivamente pensare di maneggiarli tutti. Di questi numeri ci interessa fare il prodotto. Molto semplicemente e senza calcolarlo davvero (i matematici non fanno mai i conti):

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdot \dots \cdot \times P.$$

Mettiamoci d'accordo e chiamiamo questo numero R, così da non doverlo riscrivere tutte le volte in quella forma prolissa.

Ultimo sforzo di immaginazione: a esso va aggiunto 1. Ricapitolando, il numero a cui dobbiamo prestare attenzione è il risultato dell'operazione $R + 1$, ovvero:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdot \dots \cdot \times P + 1.$$

È abbastanza immediato notare che $R + 1$ non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti. Proviamo infatti a metterci nei panni

5. Che è un teorema, sì sì. Per vederlo nella forma di implicazione si potrebbe scrivere così "se p è un numero primo qualsiasi, allora esiste sempre un altro numero primo più grande di lui".

del numero 2: prima che a R aggiungessimo 1, ciò che avevamo era un multiplo di 2. Infatti, R era il risultato di una moltiplicazione di tanti numeri, tra cui 2. Ma se R è un multiplo di 2, $R+1$ non può esserlo; detto in altri termini: $R+1$ non è divisibile per 2. Il motivo? Se si ha tra le mani un multiplo di 2 (come R), il prossimo lo si troverà aggiungendoci 2. Con un $+1$ si ottiene un numero che non è più divisibile per 2 (come invece era R). Riassunto della situazione:

$R+1$ non è divisibile per 2.

Un ragionamento del tutto analogo può essere intrapreso e portato a termine anche dal punto di vista di $3, 5, 7$ eccetera, fino all'ultimo numero primo P. Ma questo cosa significa? Scritto nuovamente in corsivo per richiamare la vostra attenzione:

$R+1$ non è divisibile né per 2, né per 3, né per 5 eccetera fino a P

A questo punto i casi sono due:

a) $R+1$ non è effettivamente divisibile per nessun numero primo;
b) $R+1$ è divisibile per un numero primo più grande di P (che quindi non è nella nostra lista) ma ovviamente più piccolo di $R+1$ stesso.

Nel caso *a*) abbiamo vinto subito. Se davvero $R+1$ non è divisibile per nessun altro numero primo (e quindi per nessun altro numero oltre a 1 e se stesso) significa che abbiamo trovato un nuovo numero primo (appunto $R+1$) più grande di P. Ma questa conclusione è assurda, nel senso di "contraddittoria con le ipotesi iniziali", perché il tutto era partito supponendo che P fosse il numero primo più grande di tutti.

Nel caso *b*)[6] in verità la faccenda è simile: come scritto sopra, avremmo che $R+1$ sarebbe divisibile per un numero primo fuori dalla nostra lista e quindi più grande di P, dato che essa — la lista — era composta da tutti i numeri primi fino a P. Quindi anche questa conclusione è assurda, per lo stesso motivo della prima.

6. Accade davvero! $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1$ per esempio viene divisibile per 19.

Non potendo quindi supporre che i numeri primi siano in quantità finita senza incorrere in contraddizioni, abbiamo dimostrato per assurdo che i numeri primi devono essere necessariamente infiniti.

Credo che, oltre all'impeccabile tecnica dimostrativa[7], in questo teorema ci sia da apprezzare anche un qualcosa di più umano: in queste ultime pagine abbiamo parlato e scritto di infiniti in uno spazio finito (la nostra mente o appunto le righe del libro). Con abili mosse dell'intelletto, ben lungi dall'essere banali giochi di parole, abbiamo risolto una questione che, al naturale, avrebbe richiesto il mettersi a contare tutti i numerini speciali che esistono. E se bisogna stupirsi di piccole cose, pensate a quando queste piccole cose si portano l'infinito appresso…

7. Che, fan fact, risale all'Antica Grecia di Euclide.

2. Euclide

Lei correva avanti a lui, sulla spiaggia, poco lontano dal Faro. Lei era più giovane, e lui non era vecchissimo come forse ce l'immaginiamo, anzi non era affatto vecchio, tant'è che stava rincorrendo una bella ragazza. I suoi occhi non si erano ancora abituati al sole dell'equinozio di primavera, e ai bagliori che esso generava sulle onde: nella Biblioteca c'era buio, per proteggere i papiri dalla luce, e quindi lui guardava verso il basso.

Euclide guardava i ciottoli della spiaggia, erano tanti… praticamente infiniti: forse erano quelli stessi ciottoli che Telemaco calpesterà in Irlanda, duemila anni dopo, ma a questo Euclide non pensava. Euclide pensava alla ragazza che lo precedeva, che correva senza notare i ciottoli, per la quale aveva abbandonato per un paio d'ore il suo posto in Biblioteca per un bagno in mare.

Ma, come spesso accade quando si pensa a tutt'altro, l'attenzione ti prende da una direzione diversa. Euclide notò una cosa curiosa nei sassolini: ve n'erano sei disposti come un rettangolo 2×3… era strano, di solito sono messi diversamente. E lì commise un errore, un incredibile errore: pensò per un attimo (ma senza pensarci in realtà) che dopo il 3 venisse il 5, non il 4. Ma era convinto: e si immaginò che sotto quei sei sassolini vi fossero altre cinque copie dei sei sassolini, quindi in tutto 30, a forma di parallelepipedo. Ovviamente non potevano esserci, ma da questa immagine nella sua mente Euclide capì che 30 era un multiplo sia di 2 che di 3 che di 5. Perché aveva dimenticato il 4? Perché da giorni si concentrava sui numeri primi, e 4 non è un numero primo. E di fatto 5 è il successivo di 3, se si prendono solo i numeri primi.

Alzò un attimo lo sguardo per cercare lei, che si era voltata per aspettarlo. Che bella che era! Che occhi profondi, neri come alcuni di quei ciottoli… e le piaceva la sua matematica! Lo guardava con sguardo di rimprovero misto a comprensione, qualcosa del tipo "ma guarda se questo deve pensare ai sassi… avrà di sicuro in mente qualcosa con le sue figure geometriche".

E invece no: Euclide aveva capito che $2 \times 3 \times 5$ era multiplo sia di 2 che di 3 che di 5, *e allora* che anche 210, che è $2 \times 3 \times 5 \times 7$, era multiplo sia di 2, sia di 3, sia di 5 e sia di 7… e così via. E 211, il successivo, era primo. E dopo? C'è 11… 210 per 11 fa 2100 più 210, quindi 2310… quanto diventavano grandi quei numeri… ma mai quanto i ciottoli della spiaggia… o forse sì.

E quindi 2311 *non* era un multiplo né di 2, né di 3, né di 5, né di 7, né di 11… (Euclide non la pensò così: pensò probabilmente "di nessuno di quelli lì", ma il senso era quello; e tutto ciò mentre guardava lei e le sorrideva).

Lei era arrivata. Si era tolta la tunica e lo aspettava in acqua. E lui non pensò più né ai numeri primi, né ai papiri né alla Biblioteca. Per quelli, c'era tutto il tempo.

3. Compleanni

La professoressa Bernelli entrò in classe e subito ci fu silenzio. Ma non perché fosse particolarmente temuta, pur essendo una prof di matematica (il che le conferiva una condizione iniziale intrinseca di autorità e austerità), ma perché, oltre a ciò che portava con sé di solito, cioè i libri e la borsa, oggi teneva in mano, appesa a un fiocco da pasticcere, una confezione contenente inequivocabilmente una torta. Non enorme, ma pur sempre una torta. E non essendo enorme, i più svegli degli studenti capirono subito che non era per loro. Bianchini infatti chiese subito: « Che bello prof, ci ha portato la torta? »

Le ragazze della prima fila, invece, non ebbero nessuna esitazione: doveva essere il compleanno della prof Bernelli. E sì che non era il primo anno che lei passava con loro... e quindi la faccenda della torta le incuriosì subito.

« Ma prof, oggi è il suo compleanno? » dissero quasi in coro.

« Calma, calma, » disse la professoressa Bernelli, « lasciatemi sistemare il registro elettronico e poi vi spiego ».

Bianchini allora rincarò la dose: « Ah che bello, oggi spiega e non interroga, prof »

La prof Bernelli rispose subito, mentre muoveva abilmente il mouse, « non ho detto questo, Bianchini, ma vedremo... »; contemporaneamente, un rumore sordo provocato dal piede destro di Singh che incontrava il polpaccio di Bianchini pose fine al breve dialogo.

Terminata la compilazione del registro elettronico, le ragazze della prima fila non stavano più nella pelle.

« Allora prof, oggi è il suo compleanno? »

« Sì » rispose la prof. Bernelli.

« Ma quanti anni compie, prof? »

Da dietro si cominciava a rumoreggiare. Si percepì un chiaro « non si chiedono gli anni alle signore », che in realtà preludeva a ben altre considerazioni.

« Trentaquattro » rispose, « ma non è questo il punto ».