Aoi

Vai al contenuto multimediale

Alessio Drivet

La ricerca operativa

Finalità e metodi

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-2101-6

I edizione: dicembre 2018

A Giovanna

Non sono "nato" matematico. Sono cioè uno che non parla la matematica come madre lingua, ma piuttosto con un accento straniero. Non sono infatti interessato alle proprietà matematiche in sé, ma solo alle sue applicazioni, mentre un matematico si preoccuperebbe di migliorare la matematica (attraverso teoremi e dimostrazioni). Mi sono reso conto di essere incapace di concentrarmi per decifrare anche una sola equazione se non sono motivato da un problema reale (e da un minimo di avidità).

Nassim Nicholas Taleb*, Giocati dal caso*

Indice

Introduzione

Parlare di Ricerca Operativa imporrebbe l'esplicitazione di cosa si intende con questo termine, però non è facile dare una risposta univoca.

Non è un caso che gli studiosi non si sono ancora messi d'accordo se la Ricerca Operativa è un metodo scientifico oppure l'applicazione di un metodo scientifico.

Secondo l'AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa): "la Ricerca Operativa studia, progetta ed impiega modelli matematici, metodi quantitativi, strumenti software avanzati, simulazione ed altre tecniche analitiche per affrontare e risolvere problemi complessi ed identificarne le soluzioni".

L'aspetto più interessante è il carattere di multidisciplinarietà, carattere che si evidenzia esaminando le principali aree applicative:

- Logistica;
- Produzione;
- Servizi;
- Ambiente;
- ICT.

Nel testo la Ricerca Operativa è vista come disciplina autonoma e non solo come Matematica Applicata a problemi economico-aziendali.

Poiché lo scopo del testo è quello di fornire, in modo accessibile, una prima guida alle tematiche della Ricerca Operativa, nei capitoli si è cercato di non appesantire il discorso con eccessivi formalismi mentre l'attenzione si è focalizzata sia sul concetto di modello che sugli algoritmi. Per questo motivo il ricorso a definizioni e teoremi è limitato mentre molti argomenti sono introdotti a partire da esempi.

La quasi totalità degli esercizi, posti all'interno di ogni capitolo, sono presentati in forma di situazioni problematiche, in modo da stimolare il lettore a costruire (e risolvere) un modello sufficientemente realistico.

Ovviamente i problemi più complessi richiedono l'utilizzo di software specialistico (es.: LINGO) oppure adattato (es.: Excel con Solver). In questo modo ci si può concentrare sugli aspetti concettuali piuttosto che sulla parte meramente esecutiva.

Naturalmente, per affrontare il tema, si suppone che il lettore abbia già acquisito un certo bagaglio di conoscenze matematiche, la cui trattazione esula, evidentemente, dagli scopi del testo.

Sommariamente si possono indicare come prerequisiti:

- Sommatorie
- Algebra lineare
- Funzioni
- Matematica finanziaria
- Probabilità
- Statistica
- Grafi

Capitolo I

Finalità e metodi

1.1. Introduzione

L'esistenza stessa dell'uomo è indissolubilmente legata alla soluzione di problemi, siano essi di natura tecnica, filosofica, economica ecc.

Una categoria di problemi particolarmente rilevante è sicuramente quella che caratterizza le scelte di carattere "economico". Anche rimanendo a livello individuale un semplice esempio chiarirà la varietà e complessità di questa tematica.

Esempio 1

L' estate scorsa un mio amico ha passato le vacanze in Gran Bretagna e, al ritorno, mostrandomi le foto, mi ha raccontato in sintesi i problemi che ha dovuto affrontare e risolvere.

Innanzitutto ha dovuto scegliere i mezzi di trasporto per le sue ferie; oltre ad utilizzare la propria autovettura aveva la possibilità di andare in treno, in pullman o in aereo fino a Londra e proseguire poi con i mezzi pubblici o affittando un'automobile.

Un altro problema è stato quello di preparare la valigia in modo intelligente, cercando cioè di portare indumenti e calzature adeguate al clima estremamente variabile, senza peraltro sovraccaricarsi.

Giunto sul luogo si è trovato di fronte ad una prima colazione, il breakfast inglese, molto abbondante (succo d'arancia, corn flakes o muesli, uova e pancetta, salsicce, toast, burro e marmellata, the) e quindi ha dovuto fare delle scelte in modo da avere una dieta con certe caratteristiche.

Fra i suoi ricordi, uno spazio particolare è dedicato al racconto entusiastico della metropolitana londinese, sia pur con i problemi legati alla fila per comprare i biglietti e alla difficoltà iniziale di muoversi seguendo le indicazioni della piantina con la rete del metro

Se esaminiamo questi frammenti di esperienza, possiamo notare qualcosa che trascende il semplice resoconto di un turista. In questo racconto di viaggio sono, infatti, presenti buona parte dei problemi che affronteremo in seguito: scelta tra alternative (i mezzi di trasporto), ottimizzazione in presenza di eventi aleatori (preparazione della valigia), combinazione di risorse (il breakfast), code (fila per il biglietto), percorsi su un grafo (la metropolitana).

L'esempio è forse banale, ma pone con assoluta evidenza la specificità di questi problemi e la necessità di identificare metodi e tecniche risolutive adeguate.

Tra le varie scienze che si occupano di problemi economici, cercando soprattutto di dare ad essi risposte operative, un ruolo importante ha quella disciplina che è nota con il nome di *Ricerca Operativa* (R.O.). Essa ha una storia piuttosto recente, sebbene l'uomo abbia avuto a che fare con problemi di questo tipo fin dall'antichità. Si è sviluppata, infatti, durante la Seconda guerra mondiale (il termine R.O. sembra sia stato usato per la prima volta intorno al 1939) per determinare scientificamente la soluzione ottimale a problemi di carattere militare.

In quel periodo, negli Stati Uniti, piccoli gruppi di scienziati, con conoscenze ed esperienze diverse, furono fatti lavorare insieme per la soluzione di un problema rimasto famoso.

Esempio 2

Per limitare le perdite causate dagli attacchi dei sommergibili tedeschi, è più conveniente impiegare grossi convogli marittimi fortemente scortati, oppure piccoli convogli con scorte limitate? I ricercatori trovarono che il rapporto tra il numero n di sommergibili tedeschi affondati e il numero m di mercantili americani affondati dipendeva, tramite una costante k, dal quadrato del numero s delle navi di scorta secondo la relazione:

$$n/m = k\, s^2$$

da ciò si poté dedurre che conveniva aumentare le navi di scorta e, infatti, le perdite di naviglio diminuirono.

Il successo di questa collaborazione fu sfruttato in ambiti aziendali e all'inizio degli anni '50 l'industria americana e quella inglese cominciarono ad assorbire tecnici provenienti dall'organizzazione militare. La necessità di ricostruire gli impianti e di introdurre nuove tecnologie era un compito immane e richiedeva atteggiamenti nuovi. Non si trattava solo di gestire l'esistente, ma di avvicinarsi ai problemi della ricostruzione con un'ottica globale che tenesse conto dell'intera organizzazione vista come un sistema di relazioni complesse in cui si dovevano contemperare esigenze talvolta contrapposte.

In seguito questa disciplina fu accettata anche in campo accademico e nell'amministrazione pubblica anche se con definizioni abbastanza disparate: analisi operativa, analisi dei sistemi, scienza della direzione ecc.

Indipendentemente dalle definizioni presentate è utile sottolineare gli elementi caratteristici di questa nuova scienza. Riprendendo una definizione di *R.L.Ackoff - M.W.Sasieni* possiamo considerare la Ricerca Operativa come *l'applicazione del metodo scientifico da parte di gruppi interdisciplinari a problemi che implicano il controllo di sistemi organizzati*.

Questo approccio, tipicamente anglosassone, si discosta dalla posizione di chi tende ad enfatizzare soprattutto l'aspetto matematico della R.O. e quindi tende a ridurre i problemi al “tipo di matematica” occorrente a risolverli.

Dal punto di vista della definizione la R.O. è quindi da considerarsi solo uno strumento di una disciplina più vasta che ha al suo centro *l'analisi dei sistemi* e come cardine operativo la *costruzione e soluzione di modelli* cioè di rappresentazioni significative della realtà.

Sull'approccio sistemico non possiamo soffermarci e rimandiamo alle numerose opere sull'argomento; per quanto concerne l'importanza dei modelli, invece, vogliamo ricordare la nota analogia tra il ricercatore di R.O. e l'astronomo. L'astronomo si trova nella condizione di chi può osservare un sistema, ad esempio quello solare, ma non può manipolarlo. Per ovviare a ciò egli costruisce delle rappresentazioni del sistema e del suo funzionamento (Legge di Newton, leggi di Keplero, ecc.) sulle quali conduce la ricerca. Lavora, insomma, su un modello.

L'operatore di R.O. deve fare la stessa cosa: ad esempio, sarebbe estremamente oneroso per una società aeroportuale decidere la costruzione di una seconda pista “per vedere cosa succede” e decidere in seguito se il raddoppio è economicamente conveniente oppure è da evitare. È sicuramente meglio ricorrere, ad esempio, ad una procedura che simuli, con l'ausilio di strumenti matematici, il funzionamento di una pista d’atterraggio.

Naturalmente, affinché i modelli siano utili, devono essere facili da capire e da usare ma allo stesso tempo devono dare una rappresentazione completa e realistica dell'ambiente, incorporando tutti gli elementi fondamentali che permettono di *prendere una decisione*.

Riassumendo, potremo scrivere il diagramma di Figura 1.1.:

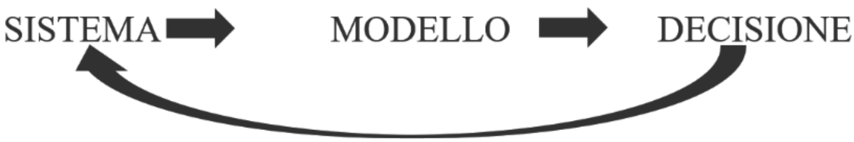

Figura 1.1. Modello decisionale.

Per chiarire meglio questa sequenza ci avvarremo di un esempio.

Esempio 3

Analisi del sistema

L'amministrazione della città X decide di rivedere la situazione attuale dei trasporti urbani sia per ripianare un deficit oneroso sia perché sono pervenute un numero crescente di proteste, oltre a servizi giornalistici sfavorevoli e dichiarazioni negative di politici.

Il problema può essere considerato da numerosi punti di vista: utenti degli autobus, enti interessati all'integrazione con il trasporto urbano (treni, autolinee extraurbane), politici, giornalisti. Soffermandoci solo sugli aspetti che competono all'amministrazione, osserviamo la presenza di un numero elevato di variabili in gioco: profitti e perdite, numero dei passeggeri, tempi d’attesa dei passeggeri, tempi di viaggio, prezzo del biglietto, frequenze dei guasti, utilizzazione dei mezzi, consumi energetici, ecc.

Nella definizione di una politica dei trasporti possiamo evidenziare anche delle *contraddizioni* tra i diversi *obiettivi* realizzabili: ridurre il prezzo del biglietto per invogliare l'utenza è in conflitto con l'esigenza di ridurre il deficit; aumentare i tempi di revisione preventivi per limitare i guasti è in conflitto con la richiesta di un maggior numero di autobus in circolazione. Talvolta migliorare una delle qualità esaminate può peggiorarne altre. Così, ad esempio, diminuire il numero di fermate per ridurre il tempo di viaggio può far aumentare il tempo necessario per raggiungere da casa la fermata più vicina.

Risulta quindi chiaro che è necessario semplificare il problema definendo il soggetto decisore e il suo *obiettivo prioritario*. Supponiamo che tale obiettivo sia stato definito in termini di massimizzazione dell'incasso e l'attenzione sia rivolta alla definizione di una tariffa ridotta da adottare durante ore non di punta per stimolare i viaggi e aumentare così l'incasso.

Le variabili sono costituite dal numero n dei passeggeri e dalla tariffa x del biglietto, i vincoli sono dati dal fatto che il prezzo ridotto non può essere più elevato della tariffa intera e che probabilmente esiste una relazione che lega il numero di passeggeri alla tariffa del biglietto.

Costruzione e soluzione del modello

Stabilito che l'obiettivo è la *massimizzazione dell'incasso nelle ore non di punta,* indicheremo con z l'incasso totale e, poiché, esso si può esprimere come il numero di passeggeri n per la tariffa ridotta x avremo:

$$z = n \cdot x$$

Tale funzione sarà sottoposta a certi vincoli, in particolare la tariffa sarà compresa tra 0 e il valore del prezzo intero del biglietto (supponiamo sia solo di 1€), il numero dei passeggeri sarà un numero naturale legato al prezzo del biglietto. In simboli:

$$\begin{aligned} &0 \le x \le 1 \\ &n = f(x) \qquad\qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

Per determinare quale tipo di funzione leghi le due variabili n e x è necessario procedere ad un'indagine di tipo statistico.

L'amministrazione assegna il compito ad una società specializzata che, con una serie di interviste, raccoglie le intenzioni di un campione di viaggiatori.

Sulla base dei dati, presenta all'amministrazione una Tabella in cui sono riportate le stime del numero di passeggeri in relazione con l'ipotetico prezzo del biglietto.

Tabella 1.1. Dati raccolti.

x (prezzo in €)	n (passeggeri in migliaia)
0,50	20,1
0,60	17,4
0,70	14,9
0,80	12,6
0,90	10,0
1,00	9,9

Riportati sul grafico di Figura 1.2., i dati mostrano un forte andamento lineare e quindi possiamo calcolare la retta di regressione.

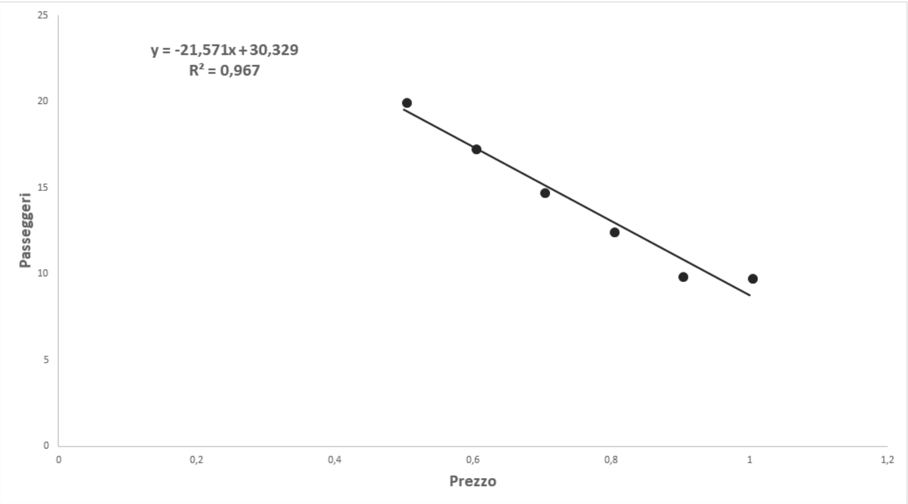

Figura 1.2. Grafico prezzo-passeggeri.

Dai dati risulta che

$$n = -21{,}571\ x + 30{,}329$$

Al termine di questa fase il modello matematico del nostro problema ha assunto la sua struttura definitiva:

$$z = n \cdot x$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$n = -21{,}571\ x + 30{,}329$$

Osserviamo che uno dei due vincoli è espresso sotto forma di uguaglianza e quindi riduce le variabili del problema da due ad una.

L'incasso è funzione della sola tariffa ridotta:

$$z = (-21{,}571\ x + 30{,}329)\ x = -21{,}571\ x^2 + 30{,}329\ x$$

e la relazione è espressa da una parabola con la concavità rivolta verso il basso e il vertice nel punto di coordinate: V (0,703 ; 10,661)

L'andamento della funzione si può vedere nella Figura 1.3.

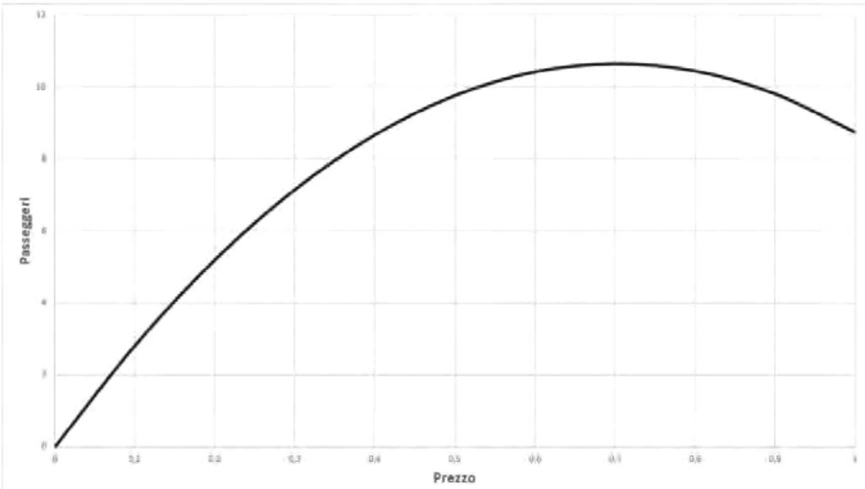

Figura 1.3. Grafico incasso.

La funzione incasso è quindi una funzione continua della tariffa e raggiunge il valore massimo per x= 0,703 €.

Abbiamo cioè, che in corrispondenza alla tariffa ridotta l'incasso totale è massimo e corrisponde a 10661 €.

Decisione

A questo punto possiamo fare un'ulteriore considerazione: la funzione di fatto non è continua in quanto è impensabile che il prezzo del biglietto possa assumere un qualsiasi valore reale compreso tra 0 e 1.

Potremo quindi imporre la realistica restrizione che il prezzo del biglietto sia una variabile discreta che assume solo valori multipli di 0,10 €.

Il valore ottimale per la tariffa ridotta non soddisfa tale esigenza: dovremo accontentarci di un valore ottimo scegliendo tra i valori consentiti più prossimi a 0,703. Osservando che l'incasso assume il valore di 10660 € per la tariffa 0,70 € e il valore di 10457 € per la tariffa 0,80 € sceglieremo la prima tariffa.

1.2. Il processo di presa di decisioni

Nell'esempio 3 del paragrafo precedente abbiamo esplicitato una sequenza di passaggi che costituiscono un processo di *presa di decisioni*. Separando le varie fasi possiamo rilevare le caratteristiche salienti di questo processo utilizzando il sintetico schema rappresentato in Figura 1.4.

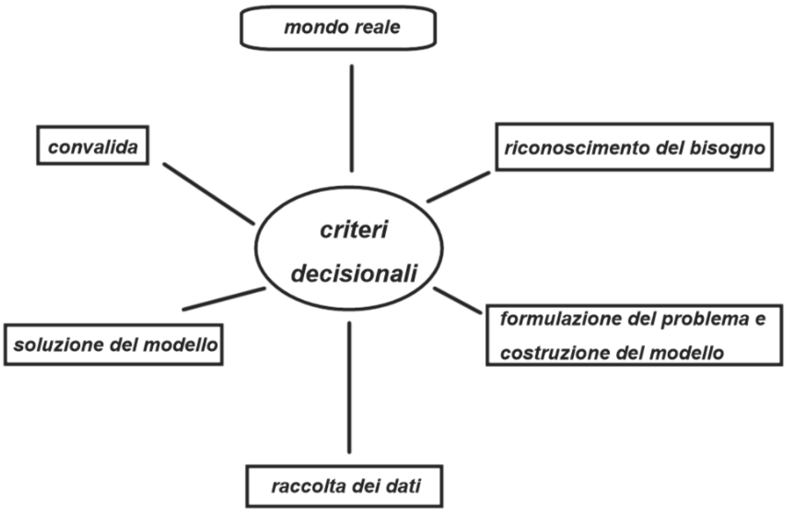

Figura 1.4. Modello decisionale.