CALCOLI SUBLIMI

COLLANA DI ANALISI MATEMATICA

1

CALCOLI SUBLIMI

COLLANA DI ANALISI MATEMATICA

L'Analisi matematica è una sinfonia coerente dell'universo.

David Hilbert

"Calcolo sublime" è uno dei nomi con cui era storicamente indicata la disciplina oggi nota come Analisi matematica. Si tratta di una disciplina che riveste un ruolo importante nella didattica di base delle facoltà scientifiche ed è, naturalmente, anche un settore scientifico in continuo sviluppo.

La collana accoglie volumi che documentano questi aspetti e si articola su due livelli: in primo luogo testi di didattica istituzionale, indirizzati a studenti e docenti delle facoltà scientifiche; in secondo luogo, testi di didattica avanzata, che facciano il punto dello stato dell'arte su argomenti di livello superiore, fino al confine della ricerca contemporanea, in questo senso l'esempio tipico è quello delle note di corsi di dottorato o di scuole avanzate.

In questo modo sarà possibile andare incontro ai diversi tipi di richieste e aspettative di chi ha a che fare con l'Analisi matematica nella propria esperienza di studi, dallo studente al ricercatore.

Vieri Benci

Alla scoperta dei numeri infinitesimi

Lezioni di analisi matematica esposte
in un campo non–archimedeo

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1897-9

I edizione: novembre 2018

Indice

Introduzione

> L'infinitamente piccolo è una quantità matematica che ha tutte le proprietà in comune con le quantità finite... Accettare il concetto di infinitamente piccolo è tutt'altro che facile. Tuttavia se si riesce a pensare in modo coraggioso e libero, l'iniziale diffidenza si tramuterà presto in una piacevole certezza. La maggior parte delle persone sono disposte ad accettare l'infinito nello spazio e nel tempo, e non solamente una "grandezza illimitata", ma avranno difficoltà ad accettare l'infinitamente piccolo, nonostante il fatto che l'infinitamente piccolo abbia il medesimo diritto di esistere dell'infinitamente grande.
>
> Paul Du Bois-Reymond
> *Über die Paradoxen des Infinitär-Calcüls*, 1877

La Matematica Non Archimedea (NAM) è una branca della matematica basata sull'uso dei numeri infiniti ed infinitesimi. Io credo che sia un campo estremamente ricco ed interessante e che nel futuro avrà notevoli sviluppi. In molte circostanze la NAM permette di costruire modelli della realtà in modo più semplice ed elegante della matematica tradizionale.

Durante la storia del pensiero la natura dell'infinitamene grande e dell'infinitamente piccolo è stata investigata da filosofi e scienziati e l'uso dei numeri infinitesimi, a partire da Leibnitz e Newton, ha contribuito allo sviluppo non solo della matematica moderna, ma di tutta la scienza occidentale dal Settecento fino all'inizio del Novencento. Ma nei primi anni del secolo scorso gli infinitesimi sono stati banditi dal regno della matematica pura in quanto considerati poco rigorosi ed inappropriati per gli uteriori sviluppi di questa disciplina.

Queste parole di Berthrand Russel esprimono il comune sentire della comunità matematica che è diventato prevalente nel corso degli anni:

> Gli infinitesimi, per spiegare la continuità, devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori (*Principles of Mathematics*, 1903 [1]).

Ne è risultato che la matematica non archimedea è stata dimenticata fino agli anni Sessanta, quando Abraham Robinson ha pubblicato il suo famoso libro *Non Standard Analysis* [14].

Questo libro vuole rappresentare un contributo alla diffusione della NAM ed è molto ispirato alle idee dell'Analisi Non Standard anche se se ne distanzia in alcune questioni essenziali. Infatti l'introduzione alla NAM qui presentata si basa sulla Teoria Alfa (vedi [6], [7], [1]).

Le peculiarità di questa presentazione sono le seguenti:

— inizialmente viene introdotto un numero infinito chiamato $\boldsymbol{\alpha}$ che gioca un ruolo analogo a quello che l'unità immaginaria i compie nello studio dei numeri complessi;

— il campo numerico che ne viene fuori è chiamato campo dei *numeri euclidei* ed è denotato dalla lettera $\mathbb{E}$; ogni numero euclideo può essere definito mediante una somma *iperfinita* di numeri reali. Il nome deriva dal fatto che questo campo descrive meglio di quanto non facciano i numeri reali la retta della *geometria euclidea* ; in realtà $\mathbb{E}$ descrive la retta euclidea non-archimedea

Paul Du Bois-Reymond (1831-1889).

come è stata concepita da Veronese alla fine dell'Ottocento ([15]; vedi anche Levi-Civita [13] per una presentazione analitica della retta di Veronese). Rimandiamo a [9] e [10] per una riflessione storico-critica di questo punto;

— lo strumento tecnico che permette di sviluppare il calcolo infinitesimale è l'α-limite. Quest'ultimo si differenzia dal limite di Cauchy-Weierstrass per il fatto che *ogni* successione di numeri reali ammette un limite, finito od infinito. Questà proprietà dell'α-limite facilita molto la dimostrazione dei teoremi e la manipolazione dei concetti dell'analisi infinitesimale. Inoltre, questo approccio, se paragonato alle usuali introduzioni all'Analisi non Standard, si avvicina molto di più ai metodi tradizionali. Mi auguro che ciò permetta di costruire un ponte tra il vecchio ed il nuovo e avvicini il maggior numero di persone alla NAM. Il fatto che ogni successione ammette l'α-limite implica che ogni funzione è derivabile ed integrabile anche se nei casi "patologici" queste nozioni vanno trattate con cautela. In ogni caso esse rappresentano un punto di vista più ampio.

Dedico questo libro ai professori dell'università e soprattutto a quelli dei licei che desiderano esplorare e far esplorare ai loro allievi le bellezze del mondo dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo. Per questo motivo il libro è stato concepito come un normale manuale di Analisi I per il primo anno di università e, per completezza, sono trattati anche alcuni argomenti che si trovano in un qualunque altro manuale di analisi.

Pisa, gennaio 2018