MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

13

Direttore

Luigi Maierù
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Comitato scientifico

Aldo Brigaglia
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Palermo

Bruno D'Amore
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Luca Dell'Aglio
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

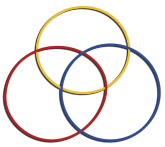
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Emilia Florio
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università della Calabria

Massimo Galuzzi
Dipartimento di Matematica
Università degli studi di Milano

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA



La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegate espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

— studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
— ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc...);
— proposte di percorsi dai contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
— scritti di divulgazione dei contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
— riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico-pedagogiche e alle neuroscienze);
— proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività didattiche in una classe di alunni;
— proposte di Didattica della Matematica con l'uso costante di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

Vai al contenuto multimediale

Alejandro Javier Cuneo
Ruggero Ferro

Logica matematica classica elementare

Potenzialità e limiti dei linguaggi, in particolare di quelli formali

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXIX
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1761-3

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento anche parziale, con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.

Non sono assolutamente consentite le fotocopie senza il permesso scritto dell'Editore.

I edizione: febbraio 2019

Indice

9 *Premessa*
15 *Prerequisiti*
25 1. *L'esigenza di studiare un linguaggio formale*
31 2. *Le strutture*
35 3. *Il linguaggio*
39 4. *I termini*
41 5. *Le formule atomiche*
45 6. *Le formule*
55 7. *Le variabili*
61 8. *La quantificazione*
65 9. *Formule e loro interpretazione*
77 10. *Stenografia e linguaggio formale*
79 11. *La trasmissione e l'ascolto di messaggi, isomorfismo ed elementare equivalenza*
85 12. *Sostituzioni*
91 13. *Uguaglianza come simbolo logico*
95 14. *Ricchezza di un linguaggio e strutture cui è adatto*
99 15. *Validità, conseguenza logica e soddisfacibilità*
101 16. *Difficoltà nel riconoscere verità e validità*
107 17. *Il metodo degli alberi di confutazione*
119 18. *Caratteristiche del metodo degli alberi di confutazione*
125 19. *Soddiasfacibilità degli insiemi di Hintikka*
129 20. *La completezza del metodo degli alberi di confutazione a blocchi*
131 21. *Il problema della decidibilità del metodo degli alberi di confutazione a blocchi*
135 22. *Analisi della finita soddisfacibilità*
141 23. *La compattezza e alcune sue conseguenze*
145 24. *Limiti di effettività del metodo*
149 25. *Primi limiti dei linguaggi formali*
157 26. *Alcune teorie categoriche*

163 27. *Ulteriori conseguenze del teorema di compattezza*
167 28. *Immersione di una struttura in un'altra, sottostrutture, sottostrutture elementari*
177 29. *Teoremi di Lowenheim e Skolem*
181 30. *Paradosso di Skolem*
189 31. *Proprietà di consistenza*
201 32. *Interpolazione*
221 33. *L'esigenza di rendere pratico il metodo degli alberi di confutazione*
227 34. *Regole per l'analisi esaminando una sola formula alla volta*
229 35. *Una strategia per le regole di analisi esaminando una sola formula alla volta*
243 36. *Un controllo sintattico per la validità*
257 37. *Calcolo con i sequenti*
267 38. *Come ridurre il numero delle regole di deduzione*
271 39. *Calcolo predicativo*
289 40. *La completezza del calcolo predicativo*
301 41. *Linguaggi del secondo ordine*
319 42. *Logica proposizionale*
323 43. *Alcune considerazioni su quanto fatto finora*
327 44. *Valutazioni e calcolo proposizionale*
337 45. *Forme normali*
343 46. *Funzioni di Skolem*
347 47. *Il teorema di Herbrand*
351 48. *La regola di risoluzione*
359 49. *Eliminazione dei quantificatori*
363 50. *Teorie dell'aritmetica*
375 51. *Il problema dell'effettività*
383 52. *Limiti delle teorie assiomatizzabili*
389 53. *Conclusione*
391 *Appendice*
401 *Bibliografia*
403 *Indice analitico*

Premessa

Gli inizi dello studio della logica si perdono nella civiltà greca. I massimi filosofi greci ne parlano già compiutamente indicando anche principi logici e regole logiche. La stessa parola trae origine dal vocabolo greco "logos", di ben difficile traduzione, poiché è usato in contesti non sempre omogenei. Già la traduzione latina in "Verbus" non è la più felice, indicando più la rappresentazione linguistica dell'attività del pensiero, che non l'attività stessa; ma questa distinzione tra oggetto e sua rappresentazione non era molto sentita dagli antichi.

Oggi si potrebbe dire che la logica voleva essere lo studio di come si argomenta, di come si ragiona. Ma questa indicazione pone subito seri problemi. Con che ragionamento si studia il ragionamento? Sembra che questa domanda evidenzi una circolarità inaccettabile, che ci richiede di precisare meglio cosa debba intendersi per logica.

Spesso si sente definire l'uomo come animale razionale, ma, se ci chiediamo cosa vuole dire, dovremmo precisare cosa intendiamo per razionale, e a volte ci viene risposto che la razionalità è quell'attività che distingue l'uomo dagli altri animali. Combinando le due affermazioni si ottiene che l'uomo è un animale che ha una sua tipica attività (la razionaliastà) che lo distingue dagli altri animali. Alla fine non sappiamo più né cosa s'intenda per uomo, né cosa si intenda per razionale.

A proposito della nozione di tempo, Sant'Agostino sostanzialmente osservava che, se ci viene chiesto cosa vuole dire tempo cronologico, ciascuno di noi è convinto di averne una nozione molto chiara, ma, se ci si domanda davvero cosa s'intende, si deve riconoscere che ci è molto difficile rispondere, e quasi ci si convince di non sapere di cosa si sta parlando. Abbiamo richiamato quest'osservazione perché crediamo che si applichi bene anche a varie altre nozioni, oltre che alla nozione di tempo, tra le quali anche le nozioni di razionale e, in particolare, di logica, che ci interessa ora.

Quanto cercheremo di studiare, dovrebbe portare a specificare ambiti esatti, entro i quali cercare di dare un significato accettabilmente preciso al termine logica, sfruttando un'attenta analisi del linguaggio, che diverrà oggetto di studio. Allo scopo, i simboli e le successioni di simboli che saranno accettati dovranno essere completamente precisate portando a un linguaggio artificialmente costruito, che viene anche chiamato linguaggio formale.

Di fatto si può affermare che la logica intende studiare potenzialità e limiti dei linguaggi, in particolare dei linguaggi formali. Si arriverà a

concludere che i linguaggi non permettono di precisare il significato di nozioni che possono accogliere un numero arbitrariamente grande d'istanze. D'altre parte, quando alcune nozioni sono note e si accetta che certe affermazioni colgano correttamente loro aspetti rilevanti, diventa utile poter determinare le conseguenze di quelle affermazioni. Se poi il processo di ottenere le conseguenze può essere automatizzato, esso può essere delegato a macchine che allevino il lavoro umano, svolgendolo con rapidità e affidabilità molto maggiori. Per automatizzare la ricerca delle conseguenze di date affermazioni, è necessario un linguaggio formale su cui può operare un calcolo con regole puramente sintattiche, ma corrispondenti a quanto si vuole significare: i linguaggi formali studiati dalla logica riescono a dare un notevole contributo permettendo di elaborare un calcolo logico che pure sarà oggetto dello studio che s'intende affrontare.

La logica, oggi, si situa all'incrocio tra filosofia, matematica e informatica. Infatti, da una parte usa modalità matematiche per sviluppare la propria analisi sul linguaggio e dall'altra vuole applicare i risultati di tale analisi proprio alla comprensione del fenomeno matematica, cioè a una filosofia della matematica, e, magari, anche ad una filosofia della conoscenza, e, nel fare ciò, giunge a sviluppare calcoli logici utili all'automazione della ricerca delle conseguenze logiche di affermazioni. Ma questi sono traguardi ambiziosi e chissà se effettivamente raggiungibili. Quello di cui ci si accontenterà è acquisire una conoscenza precisa e giustificata di varie affermazioni cui è giunta la logica e del calcolo logico, calcolo su cui basare l'automazione della consequenzialità e affermazioni che hanno una notevole rilevanza nelle discussioni sulla conoscenza (in particolare sulla conoscenza matematica), tali da influenzare un possibile modo di considerare questo problema.

Nell'uso quotidiano la parola "logica" assume molti significati diversi in diversi contesti. A volte, per "affermazione logica" viene inteso qualcosa che s'impone per la sua stessa costruzione interna, anche se raramente si va a vedere qual è effettivamente la sua costruzione interna e se essa giustifica l'imporsi dell'affermazione. A volte la qualificazione di logicità di qualche affermazione sta a indicare che chi parla la ritiene così importante da dover essere accettata anche dagli altri, e quasi usa questa qualificazione perché l'altro sia costretto moralmente ad accettare l'affermazione, pena il dimostrarsi illogico, che è un attributo negativo, anche se non si sa cosa vuole realmente dire. I significati assunti dalla parola "logica" nei vari contesti non si limitano a questi indicati: un elenco esaustivo è praticamente impossibile, e fuori posto in questa circostanza, così ci si è limitati ai soli indicati.

Comunque lo studio della logica porta con sé un'attenzione ai problemi filosofici da cui è nata: al problema della conoscenza, al pro-

blema della giustificazione delle affermazioni. Così questo studio incontra difficoltà analoghe a quelle che s'incontrano in studi filosofici. D'altra parte, a causa dell'approccio matematico a molti problemi, sorgono anche le difficoltà usuali di una trattazione matematica di un argomento: nello studio si potrà procedere lentamente analizzando bene ogni parola e ogni legame tra affermazioni, e curando di fare propri i risultati acquisiti, perché su questi si baseranno i prossimi. Parlando di modalità matematica utilizzata per questo studio non intendiamo certo quella falsa visione della matematica in cui tutto si riduce a calcoli e a regole di calcolo, ma pensiamo alla elaborazione di concetti che si fa in matematica, alla giustificazione della loro importanza dimostrando i risultati a cui si può giungere appoggiandosi su di essi.

I concetti elaborati dalla mente umana hanno bisogno di ricevere dei nomi per essere comunicati, ma questi nomi vengono scelti tra parole già note, anche se queste hanno un significato diverso da quello nuovo che si vuole comunicare, ma parole note che rievochino alcuni aspetti comuni con la nozione che si sta introducendo o problematiche che si vogliono organizzare con i nuovi concetti. Per esemplificare quanto appena detto, si pensi alla parola "continuo", che nel linguaggio comune significa qualcosa che non si interrompe o che prosegue (ma i due significati sono già molto diversi). Questa nozione comune, che ci viene dall'esperienza, non è poi così precisa e ci si potrebbe trovare in difficoltà nell'usarla in casi critici. Appunto per superare tali vaghezza e difficoltà nei casi critici, la matematica ha elaborato, attraverso successivi affinamenti nel tempo, una nozione di continuità più raffinata e precisata mediante una definizione molto precisa che presuppone varie altre conoscenze specifiche. Ma, invece di inventare un nuovo nome per la nozione sviluppata, ha continuato a chiamarla continuità per indicare qual era la problematica fondamentale cui si rivolgeva. Così, quando s'incontra questo vocabolo in una trattazione matematica, bisogna considerarlo con il senso precisato nel contesto: può essere fonte di gravi equivoci volersi agganciare alla personale idea che ci si è fatti del significato di quella parola attraverso il suo uso comune.

L'osservazione appena esposta è ancora più rilevante nello studio che si vuole iniziare, perché molte delle parole che si useranno hanno già connotazioni forti nel linguaggio comune, anche se saranno usate con significati che verranno via via precisati al meglio. Anche se l'uso dello stesso termine che si usa in altre situazioni familiari vuole indicare legami con i significati acquisiti dall'uso corrente in quelle situazioni, non bisogna farsi fuorviare da quei significati, ma cercare di cogliere cosa si vuole dire nel contesto in cui vengono usati, seguendo attentamente come vengono introdotti.

In concreto le pagine seguenti richiederanno un buon impegno, accessibile a chiunque vi voglia dedicare un po' di tempo ed energie. Oltre all'esposizione dei vari problemi, concetti e risultati, verranno proposte domande e attività che riguardano il contenuto presentato.

Giusto per avviare l'attività, proponiamo fin da ora alcuni temi:

1) Scrivere varie frasi in cui compare la parola "logica", possibilmente con diversi significati attribuiti a tale parola, e sostituire la parola "logica" in quelle frasi con altre parole, quelle che sembrano più adeguate in quel contesto.

2) Esporre in una ventina di righe al massimo cosa ciascuno intende per logica.

Alla fine dello studio qui intrapreso, sarà interessante esaminare la vostra attuale elaborazione dei temi proposti, e confrontarla con le posizioni che avrete maturato sugli stessi temi. Analogamente, vi invitiamo, quando avrete completato la lettura di questo volume, a riconsiderare criticamente la citazione che introduce la presentazione di questa collana: essa vede la matematica come la parte esatta del pensiero, ma le vostre visioni di matematica e di pensiero corrisponderanno proprio a quelle qui adombrate?

Speriamo di riuscire a coinvolgere il vostro interesse per la disciplina, in modo che la soddisfazione per ciò che si riuscirà ad acquisire compensi le fatiche del percorso.

Esistono molti ottimi manuali di logica, e lo studio che seguirà approderà agli stessi risultati conseguiti negli altri testi. Nello studiare gli altri testi spesso ci siamo domandati come mai si seguiva un certo percorso, o come si poteva esprimere più esplicitamente il significato di ciò che veniva introdotto. Non sappiamo quanto sia di aiuto al lettore cercare di indicare una possibile risposta alle domande che via via ci sorgevano: lo sforzo che ciascuno può compiere in questo senso, senza alcuna guida, potrebbe fare acquisire con maggiore partecipazione personale le nozioni presentate solo attraverso le loro proprietà. Inoltre uno dei punti di forza della presentazione matematica è proprio quello di precisare aspetti accettati di certe nozioni e su questi basare quanto viene sviluppato, in modo che possa valere qualunque sia il significato che uno attribuisce alle nozioni di partenza, purché quel significato sia compatibile con gli aspetti accettati che sono stati presentati. Addirittura si può contribuire allo sviluppo di una teoria matematica anche senza aver colto completamente quali nozioni si vogliono indicare mediante certi nomi: basta sapere che si parla di qualcosa con certe caratteristiche e queste devono essere sufficienti per gli sviluppi successivi. Tuttavia crediamo che alcuni potrebbero desiderare un'indicazione più precisa del possibile significato delle nozioni di cui si vuole parlare, quasi per fare mente locale, per avere un'idea di ciò di cui si potrebbe stare parlando. Ecco un'analogia che potrebbe facilita-

re la comprensione di ciò che stiamo cercando di dire. La geometria s'interessa di certi enti che hanno certe proprietà fondamentali e, da queste, cerca di dedurne molte altre, magari importanti e quanto più esplicative possibile della situazione in cui ci si trova. Tuttavia all'uomo torna conveniente pensare che gli enti che si stanno considerando sono spazi di una certa dimensione con punti, rette, e quanto altro possa essere utilmente esaminato. Per dimostrare le proprietà di un tale mondo si dovrà fare riferimento esclusivamente agli aspetti fondamentali accettati inizialmente, tuttavia l'aver fatto mente locale su particolari enti può essere di grande aiuto nel coglierne le ulteriori proprietà. Per non parlare della applicabilità delle nozioni matematiche possibile solo se a esse viene attribuito uno specifico significato (non necessariamente unico). Nel caso particolare della teoria matematica che è la logica, questa ricerca di significato è opportuna anche per giustificare la scelta dei nomi che si usano per le varie nozioni e per cogliere il legame che c'è, ed anche gli aspetti di differenziazione, tra queste nozioni e il significato che le parole che le rappresentano hanno nel linguaggio comune.

In quanto sarà presentato, si è cercato di indicare, per varie espressioni che verranno considerate, anche un possibile significato, almeno un significato che gli autori intravedono e che considerano rilevante, magari paradigmatico. Così si cercherà di introdurre motivazioni che gli autori colgono per vari sviluppi e acclarazioni su nozioni delle quali in genere ci si limita a indicare solo le caratteristiche da cui sia possibile dedurre i risultati che interessano. Non crediamo che questa dichiarazione d'intenti possa essere ora del tutto chiara a qualcuno che affronta per la prima volta questa disciplina, ma pensiamo che potrà esserlo sempre di più ritornandovi a vari stadi man mano che si prosegue nello studio del materiale proposto.

Com'è stato dichiarato nel titolo, ci si limiterà solo alla parte elementare della logica matematica classica. Ci sono molti altri sistemi logici, ma si ritiene che la logica classica sia una base imprescindibile. Inoltre, volendo capire limiti e potenzialità del linguaggio, non sono fondamentali sistemi logici che si basano su aspetti formali di nozioni non precisabili con il linguaggio, pur essendo molto utili per automatizzare l'elaborazione di aspetti rilevanti di quelle nozioni. Avendo cercato di approfondire criticamente i temi trattati, ci pare già abbastanza oneroso considerare la parte elementare di questi studi, e a questa ci limiteremo.

Volendo utilizzare questo testo per un insegnamento iniziale di logica matematica a livello universitario, il docente dovrà tralasciare vari capitoli che non ritiene indispensabili per rientrare nei dovuti limiti di impegno e di tempo