NOTEBOOK

I QUADERNI DI EJTP

3

Logo: Julian Voss–Andreae, *Black Quantum Buddha* in black–oxidized stainless (27" or 69 cm tall).

NOTEBOOK

I QUADERNI DI EJTP

La più bella e profonda emozione che possiamo provare è il senso del mistero. Sta qui il seme di ogni arte, di ogni vera scienza.

Albert Einstein

Ogni giornale scientifico durante la sua storia ha avuto occasione di ricevere articoli: talvolta particolarmente lunghi per essere considerati tali, talvolta troppo brevi rispetto all'approfondimento necessario che la trattazione di uno specifico argomento avrebbe richiesto.

Oltre la pratica scientifica quotidiana, composta da teorie, commenti e calcoli, alcuni contributi propongono una visione diversa di taluni argomenti, oppure richiedono un approfondimento. A volte i contributi di un autore hanno bisogno di essere raccolti in una sintesi uniforme e complessa per mostrare l'efficacia della proposta.

Nasce così, come una costola della rivista « Electronic Journal of Theoretical Physics », "Notebook. I Quaderni di EJTP", una collana di monografie, dedicate a temi fondazionali della fisica, idealmente legata alla rivista, ma sostanzialmente indipendente. La collana accoglie opere di carattere internazionale, che trattano temi legati a tutti i campi della fisica, con particolare riguardo alla fisica teorica e alla filosofia della fisica.

Clemente Tortora

Tra Erlangen e Göttingen

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1527-5

I edizione: giugno 2018

Indice

Il significato dei "gruppi" nella fisica moderna

La teoria della relatività di Einstein e la teoria quantistica sono state le due grandi rivoluzioni della fisica del '900, delle cui conseguenze filosofiche ed epistemologiche si continua e si continuerà ancora a parlare e a scrivere negli anni a venire.

Molti dei fondamenti teorici di queste due rivoluzioni però erano già presenti nella matematica del secolo precedente, a cominciare dai lavori di Gauss, con le geometrie non eulidee, per finire con l'influsso della scuola di pensiero di F. Klein e S. Lie, con i gruppi di simmetrie. Che l'algebra dei gruppi, in particolare dei gruppi di Lie, sia il fondamento di tutta la fisica teorica, si è cominciato a comprendere durante il corso dello sviluppo della fisica nel corso di tutto il novecento fino adesso e oggi ci troviamo di fronte a un inversione di tendenza nella ricerca teorica che è andata consolidandosi nel corso degli anni per affermarsi compiutamente in tempi recenti con la teoria quantistica dei campi e, da ultima, la gravità quantistica. Una rivoluzione, se si vuole, di tipo epistemologico.

La rivoluzione consiste nel fatto che, prima, il fisico, come Giano bifronte, con una faccia guardava alla natura e con l'altra cercava nel suo baule degli attrezzi gli strumenti necessari per spiegarla, considerando la matematica uno strumento; dopo, ha cominciato prima a cercare nel suo baule e poi con l'altra faccia è andato alla ricerca di una immagine per quello che vi aveva trovato: la matematica non è più uno strumento, ma diventa essa stessa il motivo e il senso della ricerca in fisica teorica; il fisico cerca ciò che la matematica gli dice di cercare.

Ora, la domanda fondamentale è: perché la matematica viene sempre prima? Qual è il senso della realtà che emerge oggi dalla fisica?

Ringrazio particolarmente il prof. Ignazio Licata per la sua gentile collaborazione alla stesura del paragrafo 4.2, dedicato al gruppo di Fantappiè e all'Universo Arcaico.

Capitolo I

Gruppi e geometrie

> Perché vale in generale l'atteggiamento di considerare le questioni della matematica o della scienza da un punto di vista storico?...Io credo che oggi più che mai abbiamo bisogno di questo modo di vedere le cose. In particolare per quanto riguarda la scienza molto dipende da quanto i suoi rappresentanti siano capaci di considerare se stessi e la loro sfera di azione come elementi di una lunga serie di sviluppi, e fino a che punto siano in grado di trarre un insegnamento per il presente e per il futuro dalla consapevolezza di questo legame.
>
> — Richard Courant

1.1. la caduta del mito euclideo

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Così Galileo definiva, ne *Il saggiatore*, quella che all'epoca si chiamava filosofia naturale e oggi si chiama fisica teorica. Egli la identificava con la natura: la natura è scritta, e, quindi, comunica, in lingua matematica.

Galileo fonda la fisica sulle proprietà di *omogeneità* del tempo ed *isotropia* e *omogeneità* dello spazio, proprietà di *simmetria* dello spazio e del tempo.

Unita a queste simmetrie c'è anche l'ipotesi della "piattezza" dello spazio, cioè lo spazio a curvatura nulla, che allora non si immaginava essere un ipotesi, perché lo spazio fisico era inteso quello in cui valgono gli assiomi della geometria euclidea, che pertanto era semplicemente la geometria; per Galileo, e tutti i fisici che vennero dopo di lui fino ad Einstein, le pagine su cui leggeva i caratteri con cui si esprime la natura erano una metafora dello spazio euclideo; l'idealizzazione, sulla base dell'evidenza dell'esperienza comune, delle proprietà dello spazio fisico reale.

Tra la fine del settecento e l'inizio dell'ottocento, però, i matematici cominciarono a dubitare della veridicità assoluta del V postulato di Euclide, quello delle parallele. In realtà, questo postulato non aveva mai convinto i matematici, a cominciare dallo stesso Euclide. C'è infatti una vasta letteratura su come si è tentato attraverso i secoli di dimostrare il postulato nell'ambito dei rimanenti quattro, ma essendo stati sempre infruttuosi questi tentativi, ci si rese conto alla fine che probabilmente il postulato delle parallele avrebbe potuto essere indipendente dagli altri e che perciò avrebbero potuto esserci geometrie alternative, altrettanto logicamente coerenti di quella euclidea, negando il V postulato.

Il primo esempio di una siffatta geometria *non euclidea* fù la geometria iperbolica di *K.F. Gauss*, il quale, per la sua solita discrezione per il timore delle "strida dei beoti", si lasciò precedere da *J. Bolyai* e *N. Lobachevsky*. Dopo, ne vennero altre di geometrie non euclidee e sono geometrie, queste, globali, come si direbbe oggi, a cui si unirono poi i risultati di carattere "locale" in geometria differenziale ottenuti dallo stesso Gauss (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828), in cui egli generalizzò il concetto di curva, evidenziando che, come un vettore, le cui componenti cartesiane, espresse in funzione di una variabile u, definiscono una curva nello spazio, così il vettore $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e}_1 + y(u,v)\vec{e}_2 + z(u,v)\vec{e}_3$, le cui componenti cartesiane sono funzioni dei due parametri u e v, rappresenta una superficie.

Infatti, supponiamo che u abbia un valore fisso, poniamo u_0, allora $\vec{r}(u_0,v)$ rappresenta la curva $u = u_0$. Analogamente u_1 definisce un'altra curva $\vec{r}(u_1,v)$, così al variare di u, $\vec{r}(u,v)$ rappresenta una curva che si sposta nello spazio, generando la superficie S. La stessa superficie si ottiene col medesimo ragionamento esteso alla coordinata v e le curve $u = u_0$, $u = u_1 \ldots$, $v = v_0$, $v = v_1 \ldots$ rappresentano curve (*linee* *parametriche*) sulla superficie. Assegnando valori definiti ad u e v, otteniamo le curve $u = u_0$ e $v = v_0$, che si intersecano in un punto (u_0, v_0) sulla superficie. La coppia di numeri (u, v) definisce allora un nuovo sistema di coordinate: le *coordinate curvilinee* sulla superficie.

Tra i due sistemi di coordinate esistono le seguenti relazioni differenziali tra x, y, z e le coordinate curvilinee u e v:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

oppure, con simboli differenziali più concisi:

$$dx = x_u du + x_v dv; \quad dy = y_u du + y_v dv; dz = z_u du + z_v dv$$

Il passo successivo di Gauss fù quello di determinare le proprietà della superficie S in funzione delle coordinate curvilinee (u, v).

Se l'elemento di linea in coordinate cartesiane è dato da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Gauss provò, in base alle relazioni sopra, che in coordinte curvilinee è dato da:

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \tag{1.1}$$

dove:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2; \quad F = x_{uv} + y_{uv} + z_{uv} \tag{1.2}$$

e la curvatura totale da:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{1.3}$$

dove L, M ed N sono i determinanti:

$$L = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} x_{vv} & v_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Le (1.4) e le (1.2) contengono gli elementi differenziali, che legano x, y e z con u e v.

In seguito, con quella che egli chiamò *equazione caratteristica*, Gauss dimostrò che la quantità $LN - M^2$, che compare nella formula (1,3) per la curvatura della superficie, può anche essere espressa solo tramite E, F e G e questo significa che anche se queste tre funzioni, che compaiono nell'espressione per il ds nella (1,1), sono dipendenti da x, y e z, purtuttavia, una volta determinate le linee parametriche, le proprietà geometriche della superficie sono di fatto determinate unicamente da E, F e G.

Se la superficie è così definita, essa è con tutta evidenza indipendente dallo spazio tridimensionale euclideo da cui si è partiti, vive di vita propria e la sua geometria intrinseca è chiaramente non euclidea. Si impone allora, evidentemente, anche il problema delle linee minime sulla superficie, *le geodetiche*, analoghe alle rette dello spazio tridimensionale euclideo, di cui Gauss stesso diede una formulazione, servendosi del calcolo variazionale.

Le ricerche di Gauss sulla geometria differenziale costituiscono di per se stesse una pietra miliare. Ma le loro implicazioni erano molto più profonde di quanto egli stesso si rendesse conto. Precedentemente, le superfici erano state studiate come figure dello spazio euclideo tridimensionale. Gauss, invece, dimostrò che la geometria di una superficie poteva essere studiata concentrandosi sulla superficie stessa. Se si introducono le coordinate u e v che provengono dalla rappresentazione parametrica

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \qquad \text{(I)}$$

della superficie nello spazio tridimensionale e si usano le funzioni E, F e G determinate in tal modo, si ottengono tutte le proprieta euclidee della superficie. Tuttavia, date queste coordinate u e v sulla superficie e l'espressione di ds^2 in termini di E, F e G come funzioni di u e v, tutte le proprieta della superficie seguono da questa espressione. Questo fatto suggerisce due idee fondamentali. La prima è che la superficie può essere considerata di per se stessa come uno spazio in quanto tutte le sue proprieta sono determinate dal ds^2 e ci si puo dimenticare del fatto che la superficie giaccia in uno spazio a tre dimensioni. Che tipo di geometria possiede la superficie se viene considerata di per se stessa come uno spazio? Se si prendono come « rette » della superficie le geodetiche, allora la sua geometria è non euclidea.

Così, se la superficie della sfera viene studiata di per se stessa come spazio, essa ha la sua propria geometria e anche se si usano come coordinate dei punti la latitudine e la longitudine solite, la geometria della superficie non è euclidea perche le « rette » o geodetiche sono gli archi di cerchio massimo della superficie. Tuttavia, la geometria della superficie sferica è euclidea se essa viene considerata come superficie dello spazio a tre dimensioni. La minima distanza fra due punti della superficie è allora il segmento di retta della geometria euclidea tridimensionale (anche se non giace sulla superficie). Le ricerche di Gauss implicavano l'esistenza di geometrie non euclidee, almeno sulle superfici considerate per se stesse come spazi. Non è chiaro se Gauss si sia accorto di questa interpretazione non euclidea della sua geometria delle superfici.

Si puo andare anche oltre. Si potrebbe pensare che le funzioni E,F e G di una superficie siano determinate dalle sue equazioni parametriche (I). Si potrebbe però partire con la superficie, introdurre le due famiglie di linee coordinate e poi scegliere le funzioni E, F e G di u e v in modo quasi arbitrario.

La superficie ha allora una geometria determinata da queste funzioni E, F e G. Questa geometria è *intrinseca* alla superficie e non ha alcuna relazione con lo spazio che la circonda. Di conseguenza, la stessa superficie può avere geometrie *diverse* a seconda della scelta delle funzioni E, F e G.

Le implicazioni sono più profonde. Se si possono scegliere diverse terne di funzioni E, F e G determinando in tal modo geometrie diverse sulla stessa superficie, perché non è possibile scegliere funzioni distanza diverse nel nostro ordinario spazio a tre dimensioni? La funzione distanza usuale è ovviamente, in coordinate ortogonali, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e questa scelta è obbligatoria se si parte con la geometria euclidea perché non è altro che la formulazione analitica del teorema di Pitagora. Tuttavia, con le stesse coordinate cartesiane ortogonali per i punti dello spazio, si potrebbe scegliere un'espressione diversa per il ds^2 e ottenere per quello stesso spazio una geometria non euclidea molto diversa.

Questa estensione a spazi qualsiasi delle idee elaborate da Gauss nel corso dello studio delle superfici fu effettuata e sviluppata da Riemann[1].

Bernhard Riemann, successore di Gauss sulla cattedra di matematica a Gottingen, ne generalizzò i risultati per spazi a n dimensioni.

Nel caso n=3. le coordinate cartesiane (x, y, z) di un qualsiasi punto sono funzioni delle tre variabili u_1, u_2 e u_3 :

$$x = x(u_1, u_2, u_3); \quad y = y(u_1, u_2, u_3); \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{1.5}$$

Seguendo Gauss, se alternativamente $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ e $u_3 = c_3$, dove c_1, c_2 e c_3 sono costanti, allora le (1,5) rappresentano evidentemente delle superfici: le *superfici coordinate*; infatti, l'intersezione di ciascuna coppia di queste superfici definisce la *curva coordinata* corrispondente.

Se le curve coordinate formano angoli retti nei punti di intersezione, allora il sistema di coordinate curvilinee è *ortogonale*, ma i sistemi ortogonali appaiono ora sistemi molto speciali, essendo le modalità di

1. M. Kline, *Storia del Pensiero Matematico*, II vol., Einaudi.

intersezione praticamente infinite, per cui il ds, in funzione di u_1, u_2 e u_3, sarà dato in generale da:

$$ds^2 = \vec{dr} \cdot \vec{dr} = (du_1\vec{e_1} + du_2\vec{e_2} + du_3\vec{e_3})(du_1\vec{e_1} + du_2\vec{e_2} + du_3\vec{e_3}) =$$
$$= (du_1)^2\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + du_1du_2\,\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + du_1du_3\,\vec{e_1} \cdot \vec{e_3} \cdots = \textstyle\sum_{i,k} g_{ik}du_idu_k \qquad (1.6)$$

dove $g_{ik} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_k}$ e $\vec{e_i}$ sono i versori tangenti alle curve coordinate nel punto di intersezione, che dipendono dalle coordinate cartesiane x, y e z. Se e solo se g_{ii}=g_{kk}=1 e g_{ik}=g_{ki}=0 il sistema è ortogonale. In due dimensioni le g_{ik} si riducono a tre elementi distinti che corrispondono a E, F e G della (1,1) di Gauss per le superfici e questo significa che anche in tre dimensioni il ds formalmente è determinato dalle famiglie di linee coordinate u_1, u_2 e u_3, dipendenti funzionalmente da x, y e z, come nella (1,3), ma non univocamente in quanto i tre parametri possono essere scelti anche indipendentemente da x, y e z, come con le superfici. In altri termini, il *tensore metrico* g_{ik} può essere scelto in modo intrinseco allo spazio delle coordinate curvilinee u_1, u_2 e u_3, indipendentemente dallo spazio cartesiano ortogonale, e ogni scelta della terna di linee coordinate determina la geometria di quel particolare spazio.

Le stesse considerazioni per le tre dimensioni valgono ovviamente anche per n dimensioni qualsiasi e così, come vi sono vari spazi a 3 dimensioni con caratteristiche geometriche proprie, ve ne saranno anche per n dimensioni. Riemann chiamò *varietà n dimensionale*, appunto, i diversi spazi a n dimensioni.

1.2. Il programma di Erlangen di F. Klein: gruppi e simmetrie

Alla fine dell'ottocento, le geometrie erano ormai più di una e questo induceva i matematici a domandarsi anche che cosa fosse, in fondo, una geometria; quali siano le proprietà specifiche di una certa geometria che la differenziano dalle altre. La risposta a questa domanda venne da F. Klein, il quale era stato introdotto alla teoria dei gruppi da S. Lie. Questi, infatti, seguiva in analisi il metodo dei gruppi di simmetrie, che Galois aveva applicato alle radici delle equazioni polinomiali, con l'obiettivo di determinare le condizioni di integrabilità di un sistema differenziale, studiando il gruppo delle simmetrie delle sue soluzioni. Klein colse l'idea di Lie dei gruppi continui di trasformazioni per mostrare come fosse possibile spostare la questione dei fondamenti della geometria dal terreno delle *relazioni* tra elementi di figure geometriche a quello delle *trasformazioni* di oggetti geometrici.

Infatti, nella prolusione che tenne nel 1872, in occasione della sua nomina a professore ordinario all'Università di Erlangen, F.Klein illustrò il suo programma di ricerca, conosciuto come il "*programma di Erlangen*", nel quale propose di classificare le varie geometrie secondo le classi di trasformazioni, che vi lasciano invariate certe proprietà, e definire una geometria proprio in base alle sue simmetrie: una data geometria, dunque, non sarebbe altro che ciò che resta invariante rispetto al "*gruppo*" di trasformazioni che la contraddistingue.

In questo modo la classificazione delle trasformazioni in gruppi e sottogruppi diventa una classificazione delle diverse geometrie, sia di quella euclidea che di quelle non euclidee, nell'ambito della geometria proiettiva, che Klein giudicava la geometria più generale delle altre dal punto di vista gruppale. In Francia il programma di Klein fu seguito da H. Poincaré e più tardi da E. Cartan.

Il primo ad utilizzare il termine "gruppo" in matematica fù proprio E. Galois, per definire l'insieme delle permutazioni delle radici delle equazioni polinomiali, quindi l'idea di gruppo fù inizialmente associato alle permutazioni.

Consideriamo, come esempio, tre oggetti qualsiasi che indichiamo con (a,b,c) e prendiamo questa disposizione iniziale per trovare tutte le possibili permutazioni che si possono ottenere scambiando tra di loro a, b e c, sapendo già che le permutazioni di tre oggetti debbono essere in tutto $3!=6$. La permutazione identica la indichiamo nel modo seguente:

$$P_1 = I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Le successive allora le possiamo elencare così:

$$P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} P_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$