

A02



*Vai al contenuto multimediale*

Raimondo Paoletti

**Fisica classica**  
Seconda parte





Aracne editrice

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

Copyright © MMXVIII  
Giacchino Onorati editore S.r.l.. unipersonale

[www.giacchinoonoratieditore.it](http://www.giacchinoonoratieditore.it)  
[info@giacchinoonoratieditore.it](mailto:info@giacchinoonoratieditore.it)

via Vittorio Veneto, 20  
00020 Canterano (RM)  
(06) 4551463

ISBN 978-88-255-1309-7

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 2018

# Indice

- 15 *Premessa*
- 17 **Capitolo I**  
*Complementi scalari e vettoriali*
- 17 Campi scalari. *Superficie di livello. Derivata di un campo scalare rispetto a una direzione.*  
Campi vettoriali. *L'operatore vettoriali gradiente. Coseni direttori di un campo vettoriale. Significato fisico del gradiente di una superficie di livello. Derivata direzionale di un campo scalare rispetto alla sua normale. Derivata direzionale di una superficie di livello rispetto a una direzione. Conclusioni.*
- 22 Divergenza di un campo vettoriale. *Campo vettoriale uniforme. Potenziale Scalare. Campo vettoriale conservativo. Divergenza. Campo vettoriale solenoidale.*  
*Campo vettoriale solenoidale.*  
Integrale di linea e circuitazione di un campo vettoriale. *Integrale di linea. Circuitazione di un campo vettoriale.*  
Linee di forza di un campo vettoriale. *Linee di forza. Criterio di Faraday. Tubo di forza.*
- 30 Flusso di un campo vettoriale che attraversa una superficie. *Superficie aperta. Superficie chiusa.*  
Il teorema della divergenza. *Flusso di un vettore solenoidale attraverso una superficie chiusa.*
- 34 Il rotore. *Proprietà del rotore.*  
Teorema della rotazione.
- 43 **Capitolo II**  
*Elettrostatica*
- 43 Carica elettrica.  
Conduttori e dielettrici  
Legge di Coulomb. *La forza di Coulomb. Forma vettoriale della forza Coulomb.*  
Costante dielettrica.  
Costante dielettrica. *Costante dielettrica assoluta. Costante dielettrica nel vuoto. Costante dielettrica relativa al vuoto. Unità di misura della delle ca-*

- rica elettrica. Valore e dimensioni della costante dielettrica nel vuoto. Significato fisico della costante dielettrica.*  
 Distribuzione statica della carica elettrica nei corpi. *Densità di carica volumetrica. Densità di carica superficiale. Densità di carica lineare.*  
 Esercizi.
- 54 Campo elettrico. *Campo elettrico nel vuoto generato da una carica puntiforme. Campo elettrico generato da più cariche puntiformi. Campo elettrico generato da distribuzione di cariche a simmetria sferica.*  
 Campo elettrico all'interno di un conduttore. *Conduttori elettrizzati. Teorema di Coulomb. Linee di forza del campo elettrico. Campo elettrico sulla superficie di un tubo di forza.*  
 Il flusso del campo elettrico nel vuoto.  
 Esercizi.
- 72 Potenziale elettrostatico del campo elettrico. *Differenza di potenziale. Potenziale elettrostatico generato da  $n$  cariche puntiformi in un punto. Potenziale elettrostatico generato da una sbarretta sottile carica. Potenziale elettrostatico generato da distribuzioni di carica superficiali. Potenziale elettrostatico generato da un corpo carico.*  
 Lavoro compiuto dalla forza elettrica su una carica. *Lavoro compiuto su cariche unitarie. Lavoro compiuto su una carica qualsiasi. Energia elettrostatica o potenziale di una carica elettrica.*  
 Superficie equipotenziale. *Tensione elettrostatica.*  
 Esercizi.
- 107 Dipolo elettrico. *Momento di dipolo. Potenziale generato da un dipolo in un punto. Energia di un dipolo in un campo elettrico esterno. Le azioni agenti su un dipolo posto in un campo elettrico esterno.*  
 Esercizi.
- 117 Il teorema di Gauss.  
 Flusso di  $\vec{E}_o$  da diversi tipi di distribuzione di carica. *Flusso generato da una carica uscente da una superficie gaussiana. Flusso di  $\vec{E}_o$  generato da una distribuzione continua di cariche uscente da una superficie gaussiana. La carica elettrica è esterna alla superficie chiusa. Il teorema di Gauss quale conferma quale distribuzione superficiale di carica nei conduttori. Conclusioni.*  
 Esercizi.
- 168 Strato.  
 Campo elettrico generato dallo strato. *Potenziale di uno strato.*  
 Doppio strato. *Campo elettrico generato dal doppio strato. Potenziale di un doppio strato.*  
 Capacità elettrostatica. *Unità di misura e dimensioni della capacità.*  
 Lavoro di carica di un conduttore.  
 Esercizi.
- 175 Induzione elettrostatica.

Condensatore. *Armature del condensatore. Capacità del condensatore. Condensatore piano.*

Energia elettrostatica di un condensatore. *Densità di energia elettrostatica.*

Condensatori collegati in serie e in parallelo. *Condensatori collegati in serie. Condensatori collegati in parallelo.*

Il vettore induzione dielettrica  $\vec{D}_o$ . *Definizione formale di  $\vec{D}_o$ . Il teorema di Coulomb applicato a  $\vec{D}_o$ . Il teorema di Gauss applicato a  $\vec{D}_o$ . La densità di energia elettrostatica. Definizione operativa di  $\vec{D}_o$ .*

Esercizi.

- 216 Effetto Volta. *I conduttori di prima specie. Legge dei contatti successivi. Estrazione degli elettroni di conduzione. Effetto termoionico. Effetto Foto – elettrico. Lavoro di estrazione degli elettroni di conduzione. Conclusioni.*

## 221 Capitolo III

### *Elettrodinamica*

- 221 Corrente elettrica continua o stazionaria. *Elettroni di conduzione. Tipi di correnti.*

Intensità di corrente continua. *Unità di misura e dimensioni dell'intensità di corrente.*

Densità di corrente.

Legame tra la corrente e il flusso della sua densità. Equazione di continuità della corrente. *Un filo conduttore è un tubo di forza.*

- 229 Leggi di Ohm. *Prima legge di Ohm. Resistenza elettrica. Seconda legge di Ohm.*

Forma vettoriale della legge di Ohm.

Resistenze collegate in serie e in parallelo. *Resistenze collegate in serie.*

*Resistenze collegate in parallelo. Reostato.*

Forma vettoriale della legge di Ohm.

Generatore elettrico. *Generatore di forza elettro-motrice. Legge di Ohm generalizzata. Campo elettro-motore.*

Leggi di Kirchhoff.

Reti elettriche. *Legge di Kirchhoff per le correnti. Legge di Kirchhoff per le tensioni.*

Esercizi.

- 250 Lavoro compiuto dalle forze elettriche. *Effetto Joule. Espressioni del lavoro compiuto dal campo elettrico  $\vec{E}$ .*

Legge di Joule.

Potenza dissipata in calore. *Applicazioni dell'effetto Joule. Riscaldamento.*

Esercizi.

- 260 Corrente elettrica quasi continua.

Carica e scarica del condensatore. *Carica del condensatore. La costante*

*di tempo di un circuito. Scarica del condensatore. Energia dissipata sulla resistenza.*

Esercizi.

283 La corrente alternata. *Circuito RC serie.*

289 Modello atomico. *Atomo. Elettroni. Numero atomico Z. Peso atomico.*

Il nucleo atomico. *Protoni e neutroni. Forze nucleari.*

Elettroliti e elettrolisi. *Elettroliti. Formazione della molecola di un elettrolita. Dissociazione elettrolitica. Elettrolisi. Voltametri.*

Equivalente chimico. *Valenza*

Le leggi di Faraday. *Costante di Faraday.*

Equivalente elettro-chimico.

La pila e l'accumulatore elettrico. *La pila.*

Accumulatori elettrici.

Batteria di pile in serie e in parallelo. *Batterie di pile. Pile in serie. Pile in parallelo. Scintilla elettrica. Arco elettrico.*

Esercizi.

## 311 Capitolo IV

### *Elettromagnetismo*

311 Magnetostatica. *Poli magnetici. Magnetostatica dei poli magnetici.*

*Magnetostatica delle correnti elettriche stazionarie.*

Magnetismo. *Differenze tra elettricità e magnetismo. Sistemi di unità di misura.*

314 La legge di Coulomb per il magnetismo. *Analogia elettromagnetica. Unità di misura dei poli magnetici.*

Permeabilità magnetica. *Permeabilità magnetica assoluta. Permeabilità magnetica.*

Divisione delle sostanze rispetto alla permeabilità magnetica. *Sostanze paramagnetiche. Sostanze diamagnetiche. Sostanze ferromagnetiche.*

317 Campo magnetico generato da un magnete. *Intensità del campo magnetico. Espressione dimensionale del campo magnetico. Linee di forza del campo magnetico.*

Momento di dipolo magnetico. *Espressione dimensionale del momento magnetico. Energia del magnete nel campo magnetico esterno.*

Classificazione delle sostanze rispetto alla permeabilità magnetica.

*Sostanze diamagnetiche. Sostanze paramagnetiche. Sostanze ferromagnetiche.*

Induzione magnetica. *Induzione magnetica generata da un polo magnetico. Magnetismo residuo. Forza coercitiva. Isteresi magnetica. Dimensione dell'induzione magnetica.*

Intensità dell'induzione magnetica.

325 Campo magnetico generato da un circuito percorso da corrente. *Direzione, del campo magnetico. Linee di forza di  $\vec{H}_0$ . Verso di  $\vec{H}_0$ .*

Magnetismo indotto da un circuito percorso da corrente.

- 330 Forza esercitata da  $\vec{H}_0$  su un circuito percorso da corrente.  
Seconda formula di Laplace.  
Forza di Lorentz. *Forza di Lorentz agente su una carica puntiforme. La forza di Lorentz non compie lavoro. La forza di Lorentz agente su una corrente.*  
Esercizi.
- 341 La legge di Biot e Savart. *Espressione dimensionale della permeabilità magnetica  $\mu_0$ .*  
La prima formula di Laplace.  
Campo magnetico generato da configurazioni circuitali tipiche. *Filo rettilineo di lunghezza indefinita. Spira circolare. Il punto P si trova a distanza z dal centro della spira. Solenoide.*  
Esercizi.
- 367 Il teorema di equivalenza di Ampere. *Momento magnetico della spira.*  
Le forze elettrodinamiche agenti fra circuiti elettrici.
- 381 Il flusso del campo magnetico. *Unità di misura del flusso dell'induzione magnetica. Flusso concatenato con un circuito elettrico.*  
La circuitazione del campo magnetico. *Percorso chiuso non concatenato con il circuito. Percorso chiuso concatenato con il circuito. Percorso chiuso concatenato a volte con il circuito.*  
Teorema della circuitazione o legge di Ampere.  
Il potenziale magnetico. *Funzione monodroma. Funzione polidroma.*  
Esercizi.
- 404 Circuiti percorsi da corrente immersi nei mezzi.  
Polarizzazione magnetica. *Correnti di polarizzazione. Polarizzazione magnetica del mezzo.*  
Divisione delle sostanze rispetto alla suscettività magnetica. *Suscettibilità magnetica. Sostanze diamagnetiche. Sostanze paramagnetiche. Sostanze ferromagnetiche. Isteresi magnetica. Curva di magnetizzazione.*
- 408 Il teorema di Larmor.  
Correnti atomiche.  
Momento magnetico dell'atomo. *Magnetone di Bohr.*
- 415 Capitolo V  
*Campi elettromagnetici variabili*
- 415 Legge di Faraday-Neumann-Lenz (F.N.L.). *Legge di Faraday. Legge di Neumann-Legge di Lenz. Corrente complessiva. Conclusioni.*  
Campo elettrico indotto. *Campo elettrico nei casi non stazionari. Circuito chiuso.*  
*Circuito aperto. Campo elettrico generalizzato.*  
Forma differenziale della F.N.L. *Relazione tra campo elettrico e campo magnetico. Variazione di flusso concatenato con il circuito.*  
Esercizi.

- 455 Autoinduzione. *Coefficiente di autoinduzione. Coefficiente di auto induzione di un solenoide. Circuito RL serie.*  
 Problema energetico.  
 Energia e densità del campo magnetico. *Energia del campo magnetico. Densità dell'energia del campo magnetico.*  
 Energia assorbita da sostanze sottoposte a campi magnetici variabili. *Ciclo di isteresi. Correnti di Foucault*  
 Circuito RLC serie. *Corrente in transitorio. F.E.M. sinusoidale.*
- 487 Densità di corrente di spostamento. *Corrente di spostamento.*  
 Errore che si commette nell'applicare le equazioni che descrivono i campi Elettromagnetici stazionari ai campi variabili. *Errore percentuale.*

## 493 Capitolo VI

### *Proprietà magnetiche della materia*

- 493 Circuiti elettrici nei mezzi.  
 La polarizzazione magnetica. *Correnti di polarizzazione. Polarizzazione magnetica del mezzo. Suscettività magnetica.*  
 Classificazione delle sostanze in funzione della loro suscettività magnetica. *Sostanze diamagnetiche. Sostanze paramagnetiche. Sostanze ferromagnetiche. Isteresi Magnetica. Curva di magnetizzazione. Magnetismo residuo. Forza coercitiva.*
- 498 Il teorema di Larmor.  
 Correnti atomiche.  
 Momento magnetico dell'atomo. *Magnetone di Bohr.*

## 505 Capitolo VII

### *Equazioni di Maxwell e loro applicazioni alle onde piane.*

- 505 Equazioni di Maxwell. *Equazioni di Maxwell nei mezzi. Equazioni di Maxwell nel vuoto. Osservazioni finali.*  
 Onde piane. *Il caso di onde piane.*  
 Onde piane polarizzate linearmente. *Conclusioni. Equazione delle onde. Onda sinusoidale.*
- 516 Energia ceduta, impulso trasmesso all'elettrone da un'onda piana. *Energia ceduta all'elettrone.*  
 Energia trasportata da un'onda piana. *Densità di energia trasportata. Impulso trasmesso all'elettrone. Rapporto tra l'impulso trasmesso e l'energia ceduta.*  
 Energia irradiata da un sistema di cariche in movimento. *Formula di Larmor. Oscillatore hertziano.*

Generazione di onde sferiche. *Superficie d'onda. Potenza assorbita dallo oscillazione. Significato delle onde piane.*

## 529 Capitolo VIII

### *La luce*

- 529 Velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. *Velocità della luce.*  
Indice di rifrazione. *Onda incidente. Onda riflessa. Onda rifratta. Indice di rifrazione. Indice di rifrazione assoluto. Indice di rifrazione relativo. Angolo limite o critico. Limiti della legge sugli indici di rifrazione.*  
La dispersione ottica. *Spettro.*  
Corpi trasparenti e corpi opachi.
- 545 Interferenza della luce. *Sorgenti di luce coerenti.*  
Polarizzazione della luce. *Polarizzazione ellittica. Polarizzazione lineare. Polarizzazione circolare. Polarizzazione della luce naturale.*  
Diffrazione della luce. *La diffrazione della luce.*  
Il principio di Huyghens-Fresnel. *Riflessione e rifrazione.*

## 557 Capitolo IX

### *Ottica geometrica*

- 557 Il problema generale dell'ottica.  
L'approssimazione dell'ottica geometrica. *Ottica geometrica. Raggio luminoso. Cammino ottico.*
- 560 Specchio piano. *Fascio stigmatico o omocentrico. Immagine della sorgente. Fascio astigmatico o non omocentrico. Punti coniugati*  
Diottro piano. *Lastra a facce piane e parallele. Il prisma ottico.*  
Diottro sferico. *Diottro sferico convesso. Diottro sferico concavo.*  
Teoria di Gauss. *Equazione del diottro. Fuochi. Distanza focale. Potere diottrico. Punti oggetto e punti immagine. Limiti di approssimazione della teoria di Gauss. Spazio oggetto e spazio immagine. Punti coniugati rispetto a un diottro. Ingrandimento lineare del diottro. Immagine di un segmento.*  
Lo specchio sferico. *Specchio sferico concavo – Specchio sferico convesso.*  
Trasmittanza e riflettenza. *Le equazioni di Fresnel.*  
Esercizi.
- 591 I sistemi ottici centrati.  
Punti principali, punti nodali e punti cardinali. *Punti principali. Costruzione dell'immagine di un segmento. Punti nodali. Punti cardinali. Costruzione della immagine di un segmento tramite i punti nodali.*

Lo splendore della sorgente e dell'immagine. *Lo splendore.*

Lenti spesse e lenti sottili. *La lente. Lente spessa. Lente sottile. Diottria.*

*Conclusione.*

Esercizi.

**Fisica classica**  
Seconda parte



## Premessa

Così come l'aver dedicato il 1° Cap. di Fisica Classica Parte I alle grandezze fisiche scalari e vettoriali ha fornito gli strumenti analitici atti ad affrontare lo studio degli argomenti trattati in quel corso, dedicare il 1° Cap. di Fisica Classica Parte II ai complementi scalari e vettoriali fornirà gli strumenti analitici atti ad affrontare lo studio degli argomenti trattati in questo corso. Anche se alcuni argomenti trattati in questo 1° Cap. richiedono conoscenze di analisi matematica mediamente avanzate, poiché nello svolgimento di questo corso verranno richiamati i concetti e le relazioni in esso trattati, si consiglia il lettore di non trascurarne lo studio.



## Complementi scalari e vettoriali

### 1.1. Campi scalari. Derivata di una grandezza scalare rispetto a una direzione. Campi vettoriali. Gradiente di uno scalare. Significato fisico del gradiente di una superficie di livello

#### Campi scalari

Una grandezza fisica scalare  $s$ , che è funzione delle coordinate spaziali  $x, y, z$  e generalmente indicata con  $s(x, y, z)$ , che è definita all'interno di una certa regione dello spazio, in cui ad ogni punto è associabile un suo valore, rappresenta un *campo scalare*. Ad esempio, in una data regione dello spazio la temperatura  $T$ , generata da una sorgente di calore, rappresenta il campo scalare  $T(x, y, z)$ .

**Superficie di livello** - Il luogo geometrico dei punti in cui il generico campo scalare  $s(x, y, z)$  considerato assume un valore costante:

$$s(x, y, z) = \text{cost} \quad (1.1.1)$$

è chiamato *superficie di livello*. Più precisamente, essendo la costante che figura nella (1.1.1) arbitraria, essa rappresenta una famiglia di infinite superfici di livello. Ad esempio, una superficie di livello del campo scalare  $T(x, y, z)$  è rappresentata da una superficie sferica, nel cui centro è posta una sorgente di calore tale che in ogni suo punto la temperatura  $T$  è costante. La (1.1.1) si dice a un sol valore se per ogni punto dello spazio di definizione passa una ed una sola superficie di livello.

**Derivata di un campo scalare rispetto a una direzione** - Dato il campo scalare  $s(x, y, z)$ , definito in una regione dello spazio, partendo da un suo punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , spostiamoci di un trattino infinitesimo  $d\vec{l}$ . Indicati con  $dx, dy, dz$  i moduli delle sue componenti lungo gli assi coordinati  $x, y, z$ , e con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  i rispettivi versori unitari,  $d\vec{l}$  è dato dalla somma vettoriale:

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (1.1.2)$$

Se il campo scalare  $s(x, y, z)$  è continuo e derivabile, anch'esso può subire una variazione infinitesima  $ds$ , che è data dal suo differenziale totale:

$$ds = \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial z} dz \quad (1.1.3)$$

il cui valore dipende dal modulo e dalla direzione di  $d\vec{l}$ .

Se  $s(x, y, z)$  è una superficie di livello, essendo essa una costante, le sue derivate parziali saranno nulle, di conseguenza sarà nulla anche la (1.1.3).

## Campi vettoriali

**L'operatore vettoriale gradiente** - L'operatore vettoriale chiamato *gradiente*, che può essere indicato con *grad* o con *nabla*, il cui simbolo è  $\nabla$  (che è quello che noi utilizzeremo) è definito da:

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.1.4)$$

che, se applicato al campo scalare  $s(x, y, z)$  fa ottenere il campo vettoriale  $\vec{v}(x, y, z)$  la cui espressione è:

$$\nabla s(x, y, z) = \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} = \vec{v}(x, y, z) \quad (1.1.5)$$

che, indicati con  $v_x, v_y, v_z$  i moduli delle sue componenti:

$$v_x = \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial s(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.1.6)$$

assume la forma compatta:

$$\nabla s(x, y, z) = \vec{v}(x, y, z) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (1.1.5)'$$

il cui modulo è:

$$v(x, y, z) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.1.7)$$

Dalla (1.1.3) segue che la variazione infinitesima  $ds$  del campo scalare  $s(x, y, z)$ , dovuta a un suo spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$ , è data dal prodotto scalare tra il campo vettoriale  $\vec{v}(x, y, z)$  e lo spostamento  $d\vec{l}$  che, essendo

nulli i prodotti scalari tra le componenti ortogonali, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v}_x \vec{i} \cdot d\vec{x} \vec{i} &= v_x dx \cos 0^\circ = v_x dx; & \vec{v}_y \vec{j} \cdot d\vec{x} \vec{i} &= v_y dx \cos 90^\circ = 0 & \vec{v}_z \vec{k} \cdot d\vec{x} \vec{i} &= v_z dx \cos 90^\circ = 0 \\ \vec{v}_x \vec{i} \cdot d\vec{y} \vec{j} &= v_x dy \cos 90^\circ = 0; & \vec{v}_y \vec{j} \cdot d\vec{y} \vec{j} &= v_y dy \cos 0^\circ = v_y dy & \vec{v}_z \vec{k} \cdot d\vec{y} \vec{j} &= v_z dy \cos 90^\circ = 0 \\ \vec{v}_x \vec{i} \cdot d\vec{z} \vec{k} &= v_x dz \cos 90^\circ = 0; & \vec{v}_y \vec{j} \cdot d\vec{z} \vec{k} &= v_y dz \cos 90^\circ = 0 & \vec{v}_z \vec{k} \cdot d\vec{z} \vec{k} &= v_z dz \cos 0^\circ = v_z dz \end{aligned}$$

In generale, la variazione infinitesima del campo scalare  $s(x, y, z)$  è data da:

$$ds = \vec{\nabla} \cdot d\vec{l} = \left( v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) \cdot \left( dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \right) = v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (1.1.8)$$

**Coseni direttori di un campo vettoriale** - Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono gli angoli che il campo vettoriale  $\vec{v}$  forma con gli assi coordinati, i suoi coseni direttori sono dati dai rapporti tra i moduli delle sue componenti e il suo modulo  $v$ :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \Rightarrow v_x = v \cdot \cos \alpha; \quad v_y = v \cdot \cos \beta; \quad v_z = v \cdot \cos \gamma \quad (1.1.9)$$

per cui, la variazione di  $ds$  (1.1.8) può essere scritta anche nella forma:

$$ds = v (\cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz) \quad (1.1.10)$$

**Significato fisico del gradiente di una superficie di livello** - Come indicato in fig.1.1.1, a partire dal punto  $P_0$ , spostiamoci di un tratto infinitesimo  $d\vec{l}$  lungo una superficie di livello. Essendo il campo scalare  $s(x, y, z) = \text{cost}$ , e quindi il suo differenziale nullo, tale sarà anche la variazione  $ds$  (1.1.8):

$$ds = \vec{\nabla} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.1.11)$$

Essendo il modulo di  $d\vec{l}$ , e per ipotesi quello di  $\nabla s = \vec{v}$ , diversi da zero, il prodotto scalare (1.1.11) si annulla solo se i due vettori sono ortogonali, come indicato in fig.1.1.1.

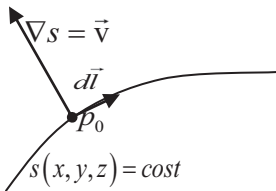


fig.1.1.1

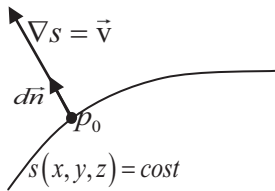


fig.1.1.2

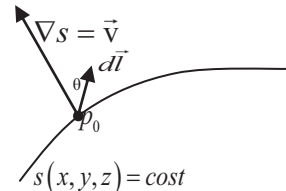


fig.1.1.3

**Nota:** Tra i vari simboli che indicano il prodotto scalare, in questo corso noi utilizzeremo il punto in grassetto  $\cdot$ .

Dato che il risultato ottenuto è valido qualunque sia lo spostamento  $d\vec{l}$ , che avviene sulla superficie di livello del campo scalare  $s$ , ciò significa che il corrispondente campo vettoriale  $\vec{v}$  è ortogonale ad esso. Ad esempio, il raggio che descrive una circonferenza, il cui modulo è costante, variando con continuità in direzione e verso, rappresenta una grandezza fisica vettoriale.

**Derivata direzionale di una superficie di livello rispetto alla sua normale**

– Se, come indicato in fig.1.1.2, lo spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$ , che in questo caso è indicato con  $d\vec{n}$ , è normale alla superficie di livello, essendo l'angolo compreso fra i due vettori nullo, si ha:

$$ds = \vec{v} \cdot d\vec{n} = v \, dn \cos 0^\circ = v \, dn \quad (1.1.12)$$

per cui, dividendo ambo i membri per  $dn$ , si ottiene:

$$\frac{ds}{dn} = v \quad (1.1.13)$$

detta derivata direzionale della superficie di livello rispetto alla normale  $\vec{n}$ .

**Derivata direzionale di una superficie di livello rispetto a una direzione -**

Come indicato in fig.1.1.3, se lo spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$  avviene in una direzione diversa da quella lungo la superficie di livello e da quella ad essa ortogonale, per la (1.1.8) la variazione infinitesima  $ds$  subita dal campo scalare  $s$  è espressa da:

$$ds = d\vec{l} \cdot \vec{v} = dl \, v \cos \theta \quad (1.1.14)$$

che, dividendo ambo i membri per  $dl$ , per la (1.1.13), si ottiene la *derivata direzionale del campo scalare  $s$*  rispetto ad una direzione qualsiasi:

$$\frac{ds}{dl} = v \cos \theta \quad (1.1.15)$$

**Conclusioni** - Poiché  $\cos \theta$  può variare tra 0 e 1, la derivata direzionale rispetto a una direzione qualsiasi è massima quando coincide con la normale  $\vec{n}$  alla superficie di livello, è nulla quando è parallela ad essa, è data dalla (1.1.15) nei casi intermedi. Ad esempio, si consideri un ambiente isolato, al centro del quale è posta una sorgente di calore, la cui temperatura costante è misurata con un termometro. Se si sposta il termometro in regioni di spazio man mano più distanti dalla sorgente, ci aspettiamo che esso misuri temperature man mano più basse che, per la simmetria del luogo, sono le stesse lungo le infinite superfici sferiche concentriche, che si susseguono a

partire dalla sorgente di calore. Per cui, la temperatura ambiente è il campo scalare  $T(x, y, z)$ , il cui valore dipende dalle sue coordinate spaziali. Le superfici sferiche concentriche alla sorgente di calore rappresentano le superfici di livello del campo scalare  $s(x, y, z) = T$ , gli spostamenti  $d\vec{l}$  lungo esse comportano una variazione  $dT = 0$ ; quelli ortogonali ad esse una variazione  $dT = dn \cdot v$  e quelli rispetto a una direzione qualsiasi una variazione  $dT = dl \cdot v \cos \theta$ .

**Esempio 1.1.1** – Se  $s(x, y, z) = 1/r$  è un campo scalare in cui  $r$  rappresenta la distanza del punto considerato dall'origine del sistema di riferimento, calcolare il modulo del gradiente, i coseni direttori e la variazione infinitesima  $ds$ , che si ha a seguito di uno spostamento infinitesimo  $d\vec{l}$  sulla sua superficie.

In funzione delle componenti spaziali, il campo scalare  $s$  è dato da:

$$s(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Per la (1.1.6), i moduli delle componenti del campo vettoriale  $\vec{v}$  sono:

$$v_x = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \frac{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{x}{r^3}$$

$$v_y = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = -\frac{y}{r^3}$$

$$v_z = \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = -\frac{z}{r^3}$$

per la (1.1.5) il gradiente del campo scalare  $s$  è il campo vettoriale  $\vec{v}$ , ossia:

$$\nabla s = \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k} = -\frac{1}{r^3} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

il cui modulo è:

$$v = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$$

Note le componenti e il modulo di  $\vec{v}$ , per la (1.1.9), i suoi coseni direttori sono: