MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

10

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

La collana è dedicata a studi e ricerche sui Fondamenti, sulla Storia e sulla Didattica della Matematica, dando rilievo agli aspetti culturali di questa disciplina, cogliendone le variegate espressioni e approfondendo la sua incidenza nella formazione umana e disciplinare. La collana, perciò, accoglie:

— studi sui Fondamenti della Matematica e la loro storia;
— ricerche di Storia della Matematica (sviluppo storico di idee e metodi, corrispondenze tra matematici, edizioni critiche di manoscritti, ecc. . .);
— proposte di percorsi da contenuti storici a una loro riproposizione didattica;
— scritti di divulgazione di contenuti matematici e della loro incidenza nello sviluppo di altre scienze;
— riflessioni sugli aspetti generali della Didattica della Matematica (dall'antropologia alle scienze psico–pedagogiche e alle neuroscienze);
— proposte di Didattica della Matematica relative a modalità differenti di attività in classe;
— proposte di Didattica della Matematica con l'uso di nuove tecnologie.

Per l'eventuale inserimento in collana, ogni opera viene sottoposta alla valutazione del Comitato Scientifico e di esperti del settore, qualora necessario.

Luigi Maierù
Emilia Florio

Le costruzioni geometriche

Un percorso storico–didattico tra i matematici arabi dei secc. IX–XIII

Parte prima

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1235-9

I edizione: marzo 2018

Indice

Introduzione

Nell'elaborazione e nella trasmissione delle idee matematiche espresse nel corso dei secoli un ruolo non secondario è svolto dalle "costruzioni", collocate per loro natura all'interno della geometria. Esse mettono in luce la capacità di rappresentazione dell'immaginazione e della fantasia e stimolano il fruitore a dare di esse una lettura che sia frutto della riflessione e del ragionamento.

Così, ogni costruzione geometrica, pur esprimendo un caso particolare (la costruzione occupa una certa parte del piano o dello spazio e ha una specifica dimensione), viene letta in ragione del carattere "simbolico", "evocativo" e frutto di elaborazione concettuale, viene cioè letta in caratteri "universali". Ad esempio, un quadrato di dimensioni fissate, disegnato su un foglio di carta, è un quadrato particolare, ma noi siamo abituati a leggere quel quadrato come "il" quadrato e a individuare in quella figura le proprietà di ogni quadrato, come l'uguaglianza dei lati, degli angoli e delle diagonali, la perpendicolarità delle diagonali, il rapporto tra diagonale e lato uguale a $\sqrt{2}$.

Questo atteggiamento di fronte a una qualunque costruzione geometrica si è mantenuto costante e inalterato nel corso dei secoli.

Il carattere "universale" viene accentuato nel momento in cui si ricerca la soluzione di un problema matematico attraverso una costruzione geometrica, la cui lettura permette di valutare se siamo realmente di fronte alla soluzione di quel problema.

Per usare un linguaggio più moderno, possiamo affermare che la costruzione è un'"icona", termine già usato da Platone verso la conclusione del libro sesto della *Repubblica*, quando pone la questione sui diversi tipi di conoscenze, sul "visibile" e sull'"intelligibile", indicate come "forme" del conoscere. Al visibile sono legate le "immagini" (le "icone"), mentre all'intelligibile sono associati i "modelli matematici"[1]: i termini "immagine" e

[1] Vedi [Platone 1991, pp. 1235b-1236a].

"modello", a loro volta, sono usati insieme nel momento in cui vengono specificati tanti caratteri della conoscenza matematica[2].

Fin dall'Antichità le costruzioni geometriche hanno un ruolo specifico nella soluzione di problemi, essendo ritenute essenziali e indispensabili nella ricerca di essa. Gradualmente viene affermato il carattere sussidiario delle stesse costruzioni nella dimostrazione di un teorema.

Fra esse vengono specificate quelle che sono ottenute tramite l'uso della riga (non graduata) e del compasso "semplice": per mezzo di questi strumenti possiamo costruire solo punti, rette e cerchi (gli *Elementi* di Euclide ne danno testimonianza). Le altre costruzioni sono ottenute facendo uso anche di strumenti diversi. Per rendersi conto di esse, basti vedere come sono risolti i problemi negli scritti di Archimede[3] e negli *Elementi conici* di Apollonio[4]. In particolare, riguardo alla costruzione della doppia media proporzionale tra due segmenti dati, troviamo due antologie che raccolgono i diversi tentativi di soluzione del problema. Alcuni di questi richiedono anche l'utilizzo di strumenti diversi dal compasso "semplice", quali lo strumento di Platone, il compasso di Isidoro di Mileto, maestro di Eutocio, per la costruzione delle parabole, il mesolabio di Eratostene, lo strumento di Nicomede per la costruzione della concoide, la riga mobile. La prima antologia si trova nei libri terzo, quarto e ottavo delle *Collezioni matematiche* di Pappo di Alessandria[5], mentre la seconda è collocata nel

[2] Vedi [Platone 1991, pp. 1236a - 1237].

[3] Negli scritti di Archimede troviamo i problemi espressi nelle propp. 2-4 del primo libro de *La sfera e il cilindro* ([Archimede 1974, pp. 80-91], [Archimede 1972, vol. I, pp. 10-23], [Archimede 1921, pp. 7-14] e [Netz 2004, pp. 41-57]), nelle propp. 1-7 del secondo libro de *La sfera e il cilindro* ([Archimede 1974, pp. 181-203], [Archimede 1972, vol. I, pp. 170-211], [Archimede 1921, pp. 90-113] e [Netz 2004, pp. 187-221]), nelle propp. 7-8-9 e 19-20 di *Sferoidi e conoidi* ([Archimede 1974, pp. 259-266, 281-285], [Archimede 1972, vol. I, pp. 284-297, 336-345] e [Archimede 1921, pp. 157-168, 184-188]) e nelle propp. 3-9 de *Le spirali* ([Archimede 1974, pp. 325-335], [Archimede 1972, vol. II, pp. 16-29] e [Archimede 1921, pp. 245-253]).

[4] Apollonio presenta e risolve problemi nelle propp. 52-60 del primo libro degli *Elementi conici* ([Apollonio 1974, vol. I, pp. 158-191], [Apollonio 1923, pp. 97-115], [Apollonio 2008, tome 1.1, pp. 194-214, 442-479] e [Apollonio 2008, tome 1.2, pp. 180-209]), nelle propp. 4 e 44-51 del libro secondo ([Apollonio 1974, vol. I, pp. 198-201, 264-305] e [Apollonio 1923, pp. 121-122, 157-180]) e nelle propp. 28-33 del libro sesto ([Apollonio 1923, pp. 527-548] e [Halley 1710, pp. 85-92]).

[5] Per il terzo libro vedi [Pappo 1965, vol. I, pp. 30-69] e [Pappo 1982, tome I, pp. 21-50], in cui sono contenute le dimostrazioni di Nicomede, di Eratostene e di Erone; per il libro quarto vedi [Pappo 1965, vol. I, pp. 176-303] e [Pappo 1982, tome I, pp. 131-235], in cui si trovano problemi che vanno da quelli che riguardano i cerchi tangenti e le spirali a quelli che toccano la costruzione di due medie proporzionali per risolvere i problemi classici della duplicazione del cubo (la soluzione di Nicomede), della quadratura del cerchio (la soluzione di Dinostrato e la critica di Sporo di Nicea) e della trisezione dell'angolo (le soluzioni di Demetrio di Alessandria, di Filone di Tiane e di Menelao). Nel libro ottavo è contenuta un'altra dimostrazione della duplicazione del cubo ([Pappo 1965, vol. III, pp. 1068-1073] e [Pappo 1982, tome II, pp. 842-845]).

commento di Eutocio di Ascalona alla proposizione II 1 de *La sfera e il cilindro* di Archimede[6]. Queste due antologie danno notevoli contributi alla conoscenza matematica e alla trasmissione di nomi e scritti di matematici, alcuni dei quali sarebbero rimasti altrimenti sconosciuti.

Le costruzioni con riga e compasso (o costruzioni euclidee) e le altre hanno in comune l'essere un mezzo necessario per risolvere problemi.

In un volume edito nel 2010 L. Maierù ha analizzato la collocazione "epistemologica" della costruzione geometrica nel discorso matematico, il vocabolario usato in rapporto a essa, i problemi di Archimede e di Apollonio e le antologie di Pappo e di Eutocio[7]. Nello stesso scritto Maierù ha privilegiato una lettura matematicamente fedele al testo originale (per quanto possibile), consapevole della possibilità di adottare chiavi di lettura differenti[8], lasciando al lettore la libertà di mettere a confronto visioni e valutazioni diverse delle costruzioni e della loro interpretazione.

Il nostro intento è continuare il discorso presentato da Maierù relativamente alla matematica greca, incentrando l'attenzione su due periodi storici, distanti tra loro nel tempo, ma strettamente legati per le tematiche e le problematiche affrontate riguardo alle costruzioni geometriche. Vogliamo cioè mettere in luce il contributo dei matematici arabi dei secc. IX-XIII nel presente lavoro e quello dei matematici del Sei-Settecento europeo, tenendo conto anche delle testimonianze che dal periodo medioevale portano all'Umanesimo, in prossimi volumi.

È noto il ruolo che le traduzioni di testi scientifici (in particolare di matematica) e il loro studio hanno nella nascita e nell'affermazione della cultura araba nel Medio Oriente e lungo le sponde del Mediterraneo[9]. Le "scuole" formatesi in questi luoghi divengono sicura fonte di irradiazione della cultura araba (scientifica e non). Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che da Pisa si reca nella città di Bugia (attuale Béjaia in Algeria), rende

[6] Vedi [Archimede 1972, vol. III, pp. 54-107], in cui sono contenute le soluzioni-costruzioni di Platone, Erone, Filone di Bisanzio, Apollonio, Diocle, Pappo, Sporo di Nicea, Menecmo, Archita, Eratostene e Nicomede.
[7] Vedi [Maierù 2010].
[8] A questo riguardo vedi i significativi contributi di studiosi diversi nei seguenti scritti: [Knorr 1986] e [Knorr 1989]; [Malpangotto 2010] e [Sidoli-Saito 2009], che presentano problematiche riguardanti le costruzioni nelle *Sferiche* di Teodosio; [Acerbi 2011], in cui sono affrontate questioni sugli specchi ustori; [Behboud 1994], [Saito 2006], [Sidoli 2004] e [Sidoli-Saito 2012], che pongono alcune questioni generali circa il ruolo delle costruzioni e la loro collocazione all'interno del discorso matematico.
[9] Innumerevoli sono gli studi in proposito; segnaliamo, in particolare, quelli di D. Gutas [Gutas 1998] e di R. Rashed ([Rashed 1989] e [Rashed 2011, pp. 43-61]).

testimonianza della portata culturale di queste scuole e del loro ruolo formativo. In questi termini si esprime all'inizio del suo *Liber Abaci*:

> Quando mio padre fu nominato, lontano dalla patria, scriba ufficiale alla dogana di Bugia per conto dei commercianti di Pisa, mi fece venire appresso a lui quando ancora ero ragazzo e, riflettendo sugli interessi e sui vantaggi futuri che ne avrei potuto avere, ha voluto che vi rimanessi per qualche tempo per studiare l'arabo e ricevere un'istruzione. Là, iniziato grazie a un insegnamento ammirabile nel sapere calcolare per mezzo di nove figure indiane, la scienza di quest'arte mi colpì profondamente più di tutto il resto e m'impegnai per meglio conoscerla, andando a studiarla in Egitto, in Siria, in Grecia, in Sicilia e presso gli abitanti della Provence, secondo il modo proprio di ciascuno[10].

Fino a qualche decennio fa era raro imbattersi in testi di matematici arabi o in studi o traduzioni dei loro scritti. Tale privilegio era riservato solo agli specialisti. In questi ultimi decenni stiamo conoscendo i nomi di tanti matematici che in un luogo o nell'altro hanno espresso le proprie elaborazioni, trasmettendole ai posteri[11]. La traduzione degli *Elementi* di Euclide, degli *Elementi conici* di Apollonio, degli scritti di Archimede e, gradualmente, di altri scritti, è stata occasione per i matematici di Bagdad, Cairo, Segovia, Toledo, Siviglia, Cordova e, infine, Palermo (alla corte di Federico II e non solo) di diventare esperti in diversi ambiti e di far nascere e sviluppare l'algebra con la quale leggere la matematica del passato (in essa hanno un ruolo primario i *Libri aritmetici* di Diofanto che gradualmente sono considerati uno scritto di algebra, non più di aritmetica).

Le loro elaborazioni eccellono in tanti ambiti, dall'algebra all'analisi dell'infinitamente piccolo e delle approssimazioni, dalla geometria elementare alla geometria "algebrica" e modulare, all'astronomia, alla meccanica. Presso i centri di cultura in Spagna si recano persone colte dell'Europa per apprendere la lingua araba e curare la traduzione di scritti dall'arabo in latino (tra esse ricordiamo Gerardo (Gherardo) da Cremona, Guglielmo da Morbeke, Adelardo di Bath). Tante biblioteche, nelle quali si conservano manoscritti, espressione del lavoro di traduzione, testimoniano questo "fenomeno" e la storia di ognuna di esse è segnata dall'acquisizione nel tempo di manoscritti di matematici arabi.

[10] [Fibonacci 1857, p. 1] e [Fibonacci 2002, p. 15].

[11] Esprimiamo la nostra sincera gratitudine a coloro che sono impegnati in opere di traduzione di manoscritti matematici di autori arabi in una lingua occidentale. In particolare siamo grati al prof. R. Rashed e alla sua équipe per ciò che ha pubblicato e per la possibilità che ci ha dato, nell'ultimo decennio, di avere con loro rapporti di collaborazione. Più volte, nello scrivere questo lavoro, il nostro ricordo è andato ad Hélène Bellosta, di cui abbiamo apprezzato la giovialità e la serietà scientifica.