MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL BIOLOGY
AND NUMERICAL ANALYSIS

BIOMATHEMATICS AND NUMERICAL ANALYSIS BOOK SERIES

*3*

*Direttore*

Ezio Venturino
Università di Torino

*Comitato scientifico*

Leonard Peter Bos
Università di Verona

Luigi Brugnano
Università di Firenze

Alberto d'Onofrio
International Prevention Research Institute

Stefano De Marchi
Università di Padova

Mario Giacobini
Università di Torino

Horst Malchow
Universität Osnabrück

Piero Manfredi
Università di Pisa

Sergei Petrovskii
University of Leicester

MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL BIOLOGY
AND NUMERICAL ANALYSIS

BIOMATHEMATICS AND NUMERICAL ANALYSIS BOOK SERIES

Essentially, *all models are wrong*, but some are useful.

George E.P. Box

The purpose of this book series is twofold.

On one hand, to bring together works discussing various aspects of mathematical models with life science applications, encompassing all fields within this realm: population theory, cell dynamics, epidemiology, ecology, metapopulations, regional dynamics and geographical invasions, individual and collective animal movement, eco–epidemiology, spread of epidemics, pattern formation, evolutionary dynamics. Also other topics not included in the above list could be considered. We would like to emphasize interdisciplinary approaches, comparing modeling techniques generally applied in ecology and those used in other life sciences.

On the other hand, we welcome contributions in all fields of numerical techniques, such as, for instance, numerical methods in approximation theory, differential equations, linear algebra, computer aided geometric design, optimization.

*Vai al contenuto multimediale*

Maria Carmela De Bonis
Giuseppe Maria Mastroianni
Incoronata Notarangelo

# Elementi di teoria dell'approssimazione polinomiale

Appunti dalle lezioni

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVIII
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1177-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 2018

# Indice

# Introduzione

La teoria dell'approssimazione è un importante capitolo della matematica e, in diverse forme, è presente in vari contesti scientifici. In particolare, l'approssimazione polinomiale è cruciale in analisi numerica. Infatti, la costruzione di procedure stabili e convergenti nella quadratura meccanica, nell'approssimazione di classi di funzioni e delle loro derivate e, più in generale, nella risoluzione numerica di equazioni funzionali, ha come base teorica la teoria dell'approssimazione polinomiale.

Con questa motivazione proponiamo la presente monografia che, avendo un'esposizione scarna ed essenziale, ha il carattere di "appunti dalle lezioni". Proporremo successivamente un secondo libro in cui affronteremo i problemi sopra esposti.

Passando al contenuto, il primo capitolo è dedicato all'approssimazione di funzioni periodiche mediante polinomi trigonometrici, teoria sviluppata nella prima metà del '900 e di cui esponiamo i tratti essenziali. Nel secondo capitolo trattiamo l'approssimazione mediante polinomi algebrici di classi di funzioni con dominio limitato, in cui è definita una metrica pesata. Estendiamo i risultati del primo capitolo, ma diamo anche ampio spazio alle disuguaglianze polinomiali, a teoremi di immersione, alle somme di Fourier in sistemi di polinomi ortogonali e all'interpolazione di Lagrange. Infine il terzo capitolo è dedicato all'approssimazione di funzioni con dominio non limitato in spazi $L^p$ pesati. Una bibliografia sufficientemente ampia è anche inclusa.

Le notazioni utilizzate sono standard. In particolare, se $A, B > 0$ sono quantità che dipendono da alcuni parametri, diremo che $A$ è equivalente a $B$, in simboli $A \sim B$, se esiste una costante positiva $\mathcal{C}$, indipendente dai parametri di $A$ e di $B$, tale che: $\mathcal{C}^{-1}A \leq B \leq \mathcal{C}A$. Inoltre, denoteremo con $\mathcal{C}$ una costante positiva che assume valori differenti in formule differenti e scriveremo $\mathcal{C}(a, b, \ldots)$ per indicare che $\mathcal{C}$ dipende soltanto dai parametri $a, b, \ldots$ e $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}(a, b, \ldots)$ per indicare che $\mathcal{C}$ è indipendente dai parametri $a, b, \ldots$.

Parte del contenuto di questo libro è tratto dalle lezioni che il secondo autore ha tenuto nell'ambito del corso di laurea magistrale in Matematica dell'Università degli Studi della Basilicata. È anche doveroso ricordare che i primi "appunti", successivamente ampliati, furono redatti dagli studenti di quei corsi. A loro dedichiamo questo libro in segno di gratitudine.

Ringraziamo il gruppo di Analisi Numerica dell'Università degli Studi della Basilicata per il loro aiuto e incoraggiamento. Inoltre ringraziamo la casa editrice Aracne per aver accettato di pubblicare questo manoscritto, e in particolare il suo team per il supporto tecnico che ci ha fornito per l'impaginazione dello stesso. Infine saremo molto grati ai lettori che vorranno segnalarci errori o refusi.

*Maria Carmela De Bonis,*
*Giuseppe Mastroianni e*
*Incoronata Notarangelo*

## Capitolo I

# Approssimazione di funzioni periodiche

In questo capitolo esporremo i risultati principali sull'approssimazione di funzioni periodiche mediante polinomi trigonometrici, come ad esempio disuguaglianze polinomiali, stime della migliore approssimazione, teoremi di immersione fra spazi funzionali, ...

Questo capitolo è inteso come modello base che sarà esteso successivamente ad altre classi di funzioni.

## I.1. Cenni sui polinomi trigonometrici

La successione di funzioni

$$\mathcal{T} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin mx, \cos mx, \ldots\}$$

è chiamata *sistema trigonometrico.*

Dalle formule di Werner

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}, \qquad \text{(I.1.1)}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$$

e

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}, \qquad \text{(I.1.2)}$$

per $h, k > 0$, segue

$$\int_0^{2\pi} \cos hx \cos kx \,\mathrm{d}x = \delta_{hk}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin hx \sin kx \,\mathrm{d}x = \delta_{hk}\pi$$

e

$$\int_0^{2\pi} \sin hx \cos kx \,\mathrm{d}x = 0,$$

dove $\delta_{hk}$ denota il simbolo di Kronecker. Pertanto $\mathcal{T}$ è un sistema ortogonale e, quindi, è linearmente indipendente.

Chiamiamo *polinomio trigonometrico a coefficienti reali di grado al più* $m$ la combinazione lineare

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k,\ b_k \in \mathbb{R}, \quad \text{(I.1.3)}$$

e denotiamo con $\mathbb{T}_m$ l'*insieme dei polinomi trigonometrici di grado al più* $m$. Se $|a_m| + |b_m| > 0$ il grado di $T_m$ è esattamente $m$.

Moltiplicando ambo i membri della $(I.1.3)$ per $\cos hx$, $h = 0, \ldots, m$, ed integrando, si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_m(x) \cos kx \,\mathrm{d}x, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Analogamente, moltiplicando ambo i membri della $(I.1.3)$ per $\sin hx$, $h = 1, \ldots, m$, ed integrando, otteniamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_m(x) \sin kx \,\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, m.$$

I coefficienti $a_k$ e $b_k$ sono detti *coefficienti di Fourier* di $T_m$.

Ovviamente

$$T_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_k = b_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

e ciò riprova l'indipendenza lineare del sistema trigonometrico.

Ricordando l'uguaglianza

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

possiamo scrivere

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_m(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_m(x)\sin kx\,\mathrm{d}x.$$

Quindi se $T_m$ è un polinomio dispari si ha

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

e

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T_m(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, m,$$

cioè

$$T_m(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sin kx.$$

Analogamente, se $T_m$ è un polinomio pari otteniamo

$$b_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T_m(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

e

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx.$$

**Proposizione I.1.1.** *Un polinomio trigonometrico pari di grado $m$ può anche rappresentarsi come un polinomio algebrico di grado $m$ in $\cos x$, cioè*

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \cos^k x. \qquad \text{(I.1.4)}$$

*Dimostrazione.* Usando le formule di Eulero, per $k = 1, 2, \ldots, m$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos kx &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^k}{2} \\
&= \frac{1}{2}[(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^k + (\cos x - \mathrm{i}\sin x)^k] \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^{k-j} x \sin^j x \left( \frac{\mathrm{i}^j + (-\mathrm{i})^j}{2} \right) \\
&= \sum_{\substack{j \leqslant k \\ j \text{ pari}}} \binom{k}{j} (-1)^{\frac{j}{2}} \cos^{k-j} x \, \sin^j x \\
&= \sum_{\substack{j \leqslant k \\ j \text{ pari}}} \binom{k}{j} (-1)^{\frac{j}{2}} \cos^{k-j} x \, (1 - \cos^2 x)^{\frac{j}{2}},
\end{aligned}$$

da cui segue la $(I.1.4)$. □

**Proposizione I.1.2.** *Ogni polinomio trigonometrico di grado m è univocamente determinato dai valori che esso assume in* $2m + 1$ *punti a due a due distinti in* $[0, 2\pi)$ *(o in ogni intervallo di lunghezza* $2\pi$*).*

*Dimostrazione.* Siano $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$ i valori che un polinomio

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

assume nei punti $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2m}$. Il sistema di equazioni lineari

$$T_m(\theta_i) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m,$$

nelle incognite $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ ha la seguente matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & \ldots & \cos m\theta_0 & \sin m\theta_0 \\
\frac{1}{2} & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \ldots & \cos m\theta_1 & \sin m\theta_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2} & \cos\theta_{2m} & \sin\theta_{2m} & \ldots & \cos m\theta_{2m} & \sin m\theta_{2m}
\end{pmatrix}$$

il cui determinante, usando la formula di Goncharov (si veda ad esempio [45, p. 41]), è uguale a

$$\frac{1}{2^{m+1}} \prod_{i<j} \left( 2 \sin \frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)$$

ed è non nullo, essendo i punti $\{\theta_i\}_{i=0,1,\ldots,2m}$ a due a due distinti. Conseguentemente, il polinomio $T_m$ è univocamente determinato. □

Nel caso in cui $\alpha_i = 0$, per $i = 0, 1, \ldots, 2m$, allora tutti i coefficienti di $T_m$ sarebbero nulli e $T_m$ non avrebbe grado $m$. In altre parole un polinomio di grado $m$ non può avere più di $2m$ zeri.

Vale inoltre il seguente teorema.

**Teorema I.1.3.** *Un arbitrario polinomio trigonometrico $T_m$ di grado $m$, non identicamente nullo, ha $2m$ zeri in ogni intervallo di ampiezza $2\pi$ (ciascuno contato con la sua molteplicità).*

*Dimostrazione.* Ricordando che

$$\cos kx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2} \quad \text{e} \quad \sin kx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}},$$

dalla $(I.1.3)$ segue

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left[ a_k \left( \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2} \right) + b_k \left( \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}} \right) \right] .$$

Inoltre, ponendo

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2} \quad \text{e} \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2},$$

abbiamo

$$T_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx} \sum_{k=0}^{2m} c_{k-m} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k .$$

Da quest'ultima relazione, ponendo $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, otteniamo

$$T_m(x) z^m = \sum_{k=0}^{2m} c_{k-m} z^k,$$

dove la quantità a secondo membro è un polinomio algebrico di grado al più $2m$ in $z \in \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$. Poiché per ipotesi $T_m$ non è identicamente nullo, usando il *teorema fondamentale dell'algebra*, avrà $2m$ zeri contati con la loro molteplicità. □

Le seguenti identità saranno utili in seguito.

**Proposizione I.1.4.** *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sum_{i=0}^{m} \cos i\alpha = \frac{\sin(m+1)\frac{\alpha}{2} \cos m\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \tag{I.1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sin i\alpha = \frac{\sin(m+1)\frac{\alpha}{2} \sin m\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \tag{I.1.6}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la $(I.1.5)$. Usando l'identità $(I.1.2)$, otteniamo

$$\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)\alpha = 2\cos i\alpha \sin\frac{\alpha}{2},$$

cioè

$$\cos i\alpha = \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \cos i\alpha &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=0}^{m} \left[\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \left[\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right], \end{aligned} \tag{I.1.7}$$

e, usando la $(I.1.2)$, segue la $(I.1.5)$. Per quanto riguarda la $(I.1.6)$, applicando la $(I.1.1)$, otteniamo

$$\cos\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(i - \frac{1}{2}\right)\alpha = -2\sin i\alpha \sin\frac{\alpha}{2},$$

cioè

$$\sin i\alpha = -\frac{\cos\left(i + \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(i - \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\sin i\alpha &= -\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{i=0}^{m}\left[\cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}\right]\end{aligned}$$

e dalla $(I.1.1)$ segue la $(I.1.6)$. □

Osserviamo che dalla $(I.1.7)$ otteniamo

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}\cos i\alpha=\frac{\sin(2m+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{I.1.8}$$

e

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}\cos i\alpha+\frac{\cos m\alpha}{2}=\frac{\sin m\alpha}{2\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

**Proposizione I.1.5.** *Per ogni* $\alpha\in\mathbb{R}$ *vale l'identità*

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sin(2k+1)\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2 m\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{I.1.9}$$

*Dimostrazione.* Moltiplicando la somma a primo membro per $\sin\frac{\alpha}{2}$ si ha

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\sin(2k+1)\frac{\alpha}{2}\\ &=\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}+\cdots+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{(2m-1)\alpha}{2}\right]\end{aligned}$$

e, usando la $(I.1.1)$,

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2}\\ &=\frac{[1-\cos\alpha]+[\cos\alpha-\cos 2\alpha]+\cdots+[\cos(m-1)\alpha-\cos m\alpha]}{2}\\ &=\frac{1-\cos m\alpha}{2}=\sin^2\frac{m\alpha}{2},\end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

□

### *I.1.1. Alcune rappresentazioni dei polinomi*

Abbiamo definito un polinomio trigonometrico $T_m$ a coefficienti reali e di grado al più $m$ mediante la formula

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) T_m(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) T_m(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ora, poiché

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) T_m(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(x-t) T_m(t)\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

si ha

$$T_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos k(x-t) \right] T_m(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ricordando la $(I.1.8)$, possiamo scrivere

$$K_m(x-t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos k(x-t) = \frac{\sin(2m+1)\frac{(x-t)}{2}}{2 \sin \frac{(x-t)}{2}}$$

e dunque

$$T_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_m(x-t) T_m(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_m(t) T_m(x-t)\, \mathrm{d}t,$$

che è una differente rappresentazione di un arbitrario polinomio trigonometrico $T_m$ di grado al più $m$. La seconda uguaglianza segue dalla ben nota formula

$$\int_0^{2\pi} f(t) g(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, \mathrm{d}t,$$

dove $x \in \mathbb{R}$, $f$ e $g$ funzioni periodiche di periodo $2\pi$ continue.

La funzione $K_m$ è detta *nucleo di Dirichlet* e, in particolare,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_m(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Sia ora $f$ una funzione in $L^p$, cioè

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x < +\infty, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Se nelle precedenti formule rimpiazziamo il polinomio $T_m$ con $f$, otteniamo un polinomio trigonometrico, in generale diverso dalla funzione $f$. Allora introduciamo il polinomio $S_m(f,x)$ definito da

$$S_0(f,x) = \frac{a_0}{2},$$

$$S_m(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_m(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{I.1.10}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

e chiamiamo $S_m(f)$ l'$m-$*esima somma di Fourier* di $f$ che, ovviamente, è unica per $f$ fissata.

Per ottenere un'altra rappresentazione dei polinomi trigonometrici consideriamo i $2m+1$ punti equispaziati dell'intervallo $[0, 2\pi)$

$$\left\{ t_i = \frac{2\pi i}{2m+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m \right\}$$

e introduciamo le funzioni

$$D_{m,i}(x) = \frac{2}{2m+1} K_m(x - t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m.$$

Si vede facilmente che $D_{m,i}(t_k) = \delta_{ik}$ e quindi $\{D_{m,i}(x)\}_{i=0,1,\ldots,2m}$ è una base per $\mathbb{T}_m$. Allora ogni polinomio $T_m$ assume la forma

$$T_m(x) = \sum_{i=0}^{2m} D_{m,i}(x)\gamma_i$$

per opportuni $\gamma_i,\ i = 0, 1, \ldots, 2m.$ Poiché risulta $\gamma_i = T_m(t_i)$, allora ogni polinomio $T_m$ può scriversi in modo unico come

$$T_m(x) = \sum_{i=0}^{2m} D_{m,i}(x) T_m(t_i).$$

Ovviamente si ha

$$\sum_{i=0}^{2m} D_{m,i}(x) = 1.$$

Ricordando poi che

$$\begin{aligned}\frac{2}{2m+1} K_m(x - t_i) &= \frac{2}{2m+1} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos k(x - t_i) \right] \\ &= \frac{2}{2m+1} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos kt_i \cos kx + \sum_{k=1}^{m} \sin kt_i \sin kx \right],\end{aligned}$$

sostituendo nella somma e ponendo

$$A_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m} \cos(kt_i) T_m(t_i)$$

e

$$B_k = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m} \sin(kt_i) T_m(t_i),$$

otteniamo

$$T_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

che è una diversa espressione del polinomio $T_m$.

Se nelle precedenti formule rimpiazziamo il polinomio $T_m$ con un'arbitraria funzione $f$ continua in $[0, 2\pi]$ otteniamo il polinomio

$$\sum_{i=0}^{2m} D_{m,i}(x) f(t_i)$$