Aoi

Vai al contenuto multimediale

VII Giornata nazionale di Analisi non standard per le scuole superiori

Atti del convegno
Venezia 30 settembre 2017

a cura di

Paolo Bonavoglia

Contributi di

Leonardo Aldegheri
Vieri Benci
Paolo Bonavoglia
Sergio Casiraghi
Andrea Centomo
Ruggero Ferro
Richard O'Donovan
Lucia Rapella
Bruno Stecca
Daniele Zambelli
Roberto Zanasi

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1166-6

I edizione: febbraio 2018

Piuttosto ci sono buone ragioni per credere che in una versione o in un'altra la NSA sarà l'analisi del futuro.

Kurt Gödel, *Princeton, 1973*

Indice

9 Prefazione
Paolo Bonavoglia

11 In principio era Zenone di Elea
Paolo Bonavoglia

21 Infinitesimi in natura
Vieri Benci

35 Nonstandard Analysis in the Classroom ultrasmall numbers vs limits: a comparison
Richard O'Donovan

45 Limiti e continuità
Andrea Centomo

53 Formula per il calcolo delle derivate di ordine superiore
Sergio Casiraghi

65 Videolezioni di Analisi non standard
Lucia Rapella

77 Un percorso di analisi infinitesimale nella scuola
Daniele Zambelli

87 Aspetti geometrici di alcuni teoremi del calcolo integrale
Roberto Zanasi

99 L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi
Leonardo Aldegheri, Bruno Stecca

113 Numeri reali, iperreali, infinitesimi, infiniti da INVENTARE o da COSTRUIRE?
Ruggero Ferro

VII Giornata nazionale di Analisi non standard per le scuole superiori
ISBN 978-88-255-1166-6
DOI 10.4399/97888255116661
pp. 9-10 (febbraio 2018)

Prefazione

PAOLO BONAVOGLIA*

1. Dal 2011 al 2017

Il 20 novembre 2011 si teneva a Venezia nei locali del Liceo Convitto "Marco Foscarini" una giornata di studio sull'uso dell'analisi non standard nelle scuole superiori. L'idea era nata nell'ambito della lista "Cabrinews" che riunisce molti docenti di matematica di ogni ordine scolastico dalla secondaria di primo grado (scuola media) all'università.

Alcuni interventi di Giorgio Goldoni, noto anche con lo pseudonimo di professor Apotema e di chi scrive, richiamarono l'attenzione sui vantaggi che la NSA può offrire come primo approccio all'analisi; il prof Tito Pellegrino dell'Università di Modena e Reggio, incuriosito dalla cosa, lanciò l'idea di una giornata di studio sull'argomento.

Considerato che il Convitto Foscarini disponeva delle risorse necessarie, aula magna con videoproiettore, mensa, apertura anche la domenica, ottenuta l'approvazione e l'appoggio dell'allora rettore prof. Rocco Fiano, lanciai la candidatura del Foscarini, che fu accettata.

Inizialmente si pensava a una riunione tra pochi, una decina/ventina di insegnanti, ma alla fine arrivarono 46 adesioni e si dovette usare l'aula magna del convitto. La giornata suscitò interesse sufficiente a incoraggiarci a continuare, nel 2012 fu Giorgio Goldoni a organizzare una II giornata di studio al planetario di Modena, nel 2013 la III giornata tornò a Venezia, nel 2014 fu organizzata dalla Mathesis di Vicenza, nel 2015 dalla Mathesis di Verona e nel 2016 si tenne a Lucca organizzata dal CAFRE dell'Università di Pisa.

In tutti questi anni la giornata ha visto una crescita pressoché costante del numero di interventi, dal 2015 anche di docenti universitari, e soprattutto è cresciuto il numero di docenti che stanno sperimentando

* Paolo Bonavoglia, già docente del liceo classico "Marco Foscarini", Venezia.

la NSA nell'insegnamento dell'analisi nelle scuole secondarie di secondo grado.

2. La VII giornata

Nel 2017 la giornata è tornata alle sue origini e cioè al convitto-liceo Foscarini di Venezia; un ritorno reso possibile dalla disponibilità del rettore prof. Massimo Zane, che è anche intervenuto con un breve discorso di apertura, dalla collaborazione del prof. Alvise Varagnolo che ha partecipato alla giornata nel ruolo di moderatore, e, non ultimo dal patrocinio del dipartimento di informatica dell'Università di Verona e del Piano Nazionale per le lauree scientifiche, assicurati dal prof. Sisto Baldo dell'Università di Verona.

Il tavolo dell'accoglienza è stato affidato a quattro studenti del Foscarini: Maria Cecilia Benacchio, Fabio Cerchiai (3AO), Chiara Moretti e Carolina Tiozzo (3BO) che hanno svolto impeccabilmente tale compito. Con l'occasione è stata offerta in omaggio a tutti i partecipanti una copia del libro *Nonstandard Analysis* di Jaap Ponstein, tradotto in italiano da Sergio e Lucia Casiraghi. La maggior parte degli intervenuti ha poi usufruito della mensa del convitto per il pranzo.

La giornata ha visto dieci relazioni che hanno spaziato su diversi aspetti della NSA, dai collegamenti con il calcolo della probabilità, a considerazioni generali sui numeri reali ed iperreali, alle relazioni di docenti della secondaria relative ad effettive sperimentazioni della NSA nelle classi reali.

Ora quelle relazioni sono raccolte in forma di testo in questo volume degli atti, con la speranza di far conoscere al maggior numero possibile di docenti le potenzialità della NSA nell'ambito della didattica nelle scuole superiori.

VII Giornata nazionale di Analisi non standard per le scuole superiori
ISBN 978-88-255-1166-6
DOI 10.4399/97888255116662
pp. 11-19 (febbraio 2018)

In principio era Zenone di Elea

Alle origini del calcolo infinitesimale

PAOLO BONAVOGLIA*

1. Dov'era Elea? Grecia classica? Asia Minore?

In un liceo un ovvio punto di partenza per lo studio dell'analisi matematica sono i paradossi di Zenone, in genere già noti allo studente che li ha studiati nel programma di filosofia; ma anche in un istituto tecnico la cosa può funzionare come occasione per introdurre un po' di storia del pensiero.

I paradossi più utili, più del secondo, il più famoso, quello di Achille e la tartaruga, sono il primo e il terzo. In realtà le opere di Zenone sono andate perdute e i quattro paradossi ci sono noti per quel che ne dice Aristotele nella sua Fisica, dove per la verità li menziona per confutarli. Paradossale destino quello di Zenone di Elea, quello di essere noto per essere stato confutato!

Zenone di Elea, ma dove era questa città o isola Elea? Devo confessare di averlo ignorato fino a poco tempo fa, e di avere scoperto che molti lo ignoravano come me.

Grecia classica? Asia Minore, come Efeso e Alicarnasso? Isola dell'Egeo, come Samo?

No! Magna Grecia, provincia di Salerno, qualche decina di km a sud di Eboli e dei templi di Paestum.

Figura 1. Dov'era Elea?

Considerato che l'altro grande precursore dell'analisi è Archimede di

* Paolo Bonavoglia, già docente del liceo classico "Marco Foscarini", Venezia.

Siracusa, senza dimenticare Pitagora che era nativo di Samo ma operò a Crotone, si può dire che la culla dell'analisi matematica fu in quella che oggi si chiama Italia meridionale.

2. Il primo paradosso la dicotomia

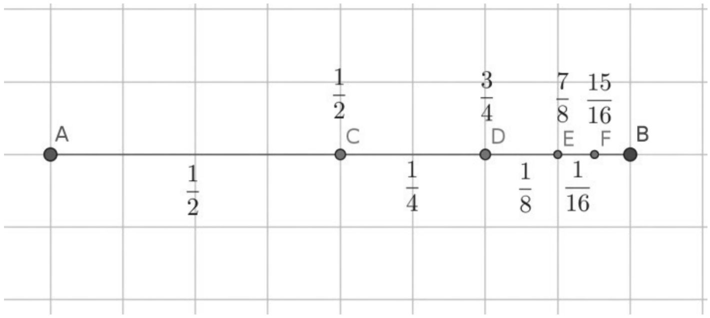
> Ci sono quattro argomenti di Zenone sul movimento che mettono in difficoltà chi tenta di risolverli. Il primo riguarda l'inesistenza del movimento, perché il mobile prima di arrivare alla fine del tragitto deve passare per la metà di esso. [Aristotele, *Fisica* VI.9]

Questo primo paradosso è spesso ricordato come quello della dicotomia, del tagliare in due.

Ci sono almeno due interpretazioni di questo paradosso; chiamando Achille il *mobile* nominato da Aristotele, sono:

Achille per percorrere un segmento AB dovrà prima raggiungere il punto medio di AB, chiamiamolo C; poi dovrà raggiungere il punto medio del rimanente segmento CB, chiamiamolo D … e così via; quindi non arriverà mai in B.

Achille per percorrere un segmento AB dovrà prima raggiungere il punto medio di AB, chiamiamolo C; ma prima di raggiungere C dovrà raggiungere il punto medio di AC chiamiamolo D … e così via; quindi Achille non riesce nemmeno a lasciare A. *Inesistenza del movimento*.



2.1. *Enunciati alternativi*

Il paradosso può enunciarsi in tanti modi alternativi:

Achille non riesce neanche a partire: come appena detto Achille non può raggiungere la metà, e nemmeno il quarto e nemmeno l'ottavo ...

Non uscirò mai da questa aula: infatti dovrò prima raggiungere la metà della distanza dalla porta, e poi la metà del rimanente …

Questo convegno non avrà mai fine: infatti, se mancano sette ore alla fine, dobbiamo prima arrivare a 3h30m dalla fine, poi a 1h45m …

Sui paradossi di Zenone si sono scritti fiumi di inchiostro, soprattutto nel tentativo di risolverli o di confutarli, primo tra tutti lo stesso Aristotele.

Interpretando fisicamente il paradosso, la confutazione più ovvia sta nel dire che non è possibile la suddivisione all'infinito del segmento AB; prima o poi ci si troverà nell'impossibilità di suddividere ulteriormente l'intervallo in intervalli più piccoli; si arriverà ad atomi di spazio o quark o qualcosa di simile.

Altra spiegazione è che se Achille percorre spazi uguali in tempi uguali, il paradosso vale anche per il tempo …

Interpretando geometricamente il paradosso, la prima confutazione è quella di Aristotele, che afferma che non ha senso pensare la retta o il segmento di retta come un insieme di punti indivisibili.

2.2. *Il punto di vista aritmetico*

Depurando il paradosso dalle interpretazioni fisiche e matematiche, resta un paradosso sui numeri razionali.

Consideriamo per esempio la strada mancante ad Achille per raggiungere il traguardo B; questa può esprimersi come una sequenza di infiniti numeri razionali, questa:[1]

$$\delta =< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots >$$

Considerando ora le posizioni successive di Achille, queste formano una seconda analoga sequenza di razionali, la seguente:

$$\alpha =< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots >$$

La posizione di B viceversa è stabile (a differenza del secondo paradosso dove è mobile anche se lentamente … la tartaruga):

$$1 = \; < 1, 1, 1, 1, 1 \ldots >$$

[1] I tre puntini di sospensione sono qui lasciati all'intuito dello studente; ovviamente si potrebbe far ricavare la formula generale come utile esercizio.

Queste tre sequenze sono un buon punto di partenza per introdurre i numeri iperreali, in un modo che mi sembra il più accessibile per studenti liceali, per i quali l'approccio logico-assiomatico può risultare troppo astratto. In fondo gli studenti sono già abituati a vedere i numeri reali individuati da sequenze di infinite cifre decimali

La prima sequenza individua un numero iperreale δ che diremo *infinitesimo* o infinitamente vicino a zero, nozione che verrà poi precisata in modo più rigoroso; in simboli scriveremo:

$$\delta \simeq 0$$

La seconda sequenza individua un numero iperreale α che diremo *infinitamente vicino* ad 1, in simboli scriveremo:

$$\alpha \simeq 1$$

La terza sequenza non è altro che il modo di rappresentare il numero 1 tra gli iperreali.

Qualcuno potrebbe obiettare: "Ha senso chiamare numeri queste sequenze?".

In effetti per parlare di numeri ci aspettiamo che sia possibile operare su di essi: sommarli, sottrarli, moltiplicarli … conservando le normali proprietà dei numeri: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e di quello inverso, distributiva del prodotto ecc.; aspettiamo inoltre che sia possibile confrontare due numeri e poter decidere se sono uguali o quale dei due sia maggiore.[2]

Ora è facile mostrare che è possibile sommare, sottrarre, moltiplicare … queste sequenze, semplicemente sommando, sottraendo, moltiplicando i singoli termini ed è anche possibile confrontarle anche se questo presenta qualche difficoltà supplementare.

Usando come esempio i tre numeri definiti sopra è immediato verificare che:

$$\alpha + \delta = 1$$
$$\delta = 1 - \alpha$$

Più problematico confrontare numeri; è facile accettare la disuguaglianza:

$$\alpha < 1$$

[2] In effetti accettiamo di chiamare numeri anche i complessi per i quali si può stabilire quando sono uguali ma non quale di due sia maggiore.

infatti ogni elemento di α è minore di 1; abbiamo l'unanimità; analogamente si verifica che è $\delta > 0$.

Ma come verificare che $\delta < \frac{1}{4}$? In questo caso i primi due elementi di α sono maggiori di $\frac{1}{4}$ il terzo è uguale, tutti gli altri, e sono infiniti, sono minori; non abbiamo più l'unanimità ma una maggioranza infinita! Può certamente bastare per accettare la disuguaglianza $\delta < \frac{1}{4}$!

Analogamente si può verificare che $\delta < \frac{1}{N}$ per qualsiasi N naturale. Abbiamo trovato, quasi per caso, un risultato molto importante; il numero δ gode di questa proprietà, per ogni N naturale:

$$0 < \delta < \frac{1}{N}$$

che è precisamente la definizione di numero infinitesimo data da Leibniz. Abbiamo quindi giustificato il nome di numero infinitesimo (o infinitamente piccolo) dato a δ.

3. Il terzo paradosso, della freccia

> Zenone sbaglia a ragionare quando sostiene che la freccia scagliata è immobile. [...] Questo è falso perché il tempo come del resto ogni altra grandezza non si compone di istanti indivisibili. [...]
>
> Il terzo è quello, appena menzionato, della freccia che, se pur scagliata sta ferma. Ma una siffatta conclusione dipende dall'assunzione che il tempo sia costituito da istanti: se non si concede questo il ragionamento non tiene. [Aristotele, *Fisica* VI.9]

Mentre preparavo questa relazione e ragionavo su questo paradosso della freccia, mi capitò sott'occhio la foto di un aereo, e mi venne subito in mente che se Zenone fosse vissuto ai tempi di oggi avrebbe preso a simbolo della velocità l'oggetto più veloce tra quelli comuni, nel mondo antico era certo la freccia, oggi è certo l'aereo.

E la foto dell'aereo riassume il terzo paradosso in termini moderni; l'aereo nella foto sembra immobile, sospeso a mezz'aria, pure sappiamo che un aereo in atterraggio ha una velocità sull'ordine dei 200 km/h circa 60 m/s. Com'è possibile che appaia così nitido e fermo mentre è così veloce?

Figura 2. L'aereo è immobile.

Il fotografo risponderebbe: è una foto *istantanea*.

Ecco la parola chiave: istante. L'aereo appare fermo perché la foto ha fermato l'istante. Ma che cos'è un istante? Qual è la sua misura?

Se si risponde: l'istante è un tempo di durata zero, questo equivale all'istante indivisibile che Aristotele considera come errore. E ne nasce il paradosso.

Nel caso della foto istantanea è facile verificare che l'istante non ha durata zero; in termini fotografici si chiama tempo di esposizione, in questo caso era di 1/800 di secondo, tempo molto piccolo, al quale corrisponde uno spostamento di pochi cm impercettibile a una tale distanza per l'occhio anzi per il cervello umano, ma pur sempre diverso, maggiore di zero.

La parola chiave è *impercettibile* e in fondo il concetto di infinitesimo altro non è che l'astrazione di quello di impercettibile.

Tornando al ragionamento di Zenone quando dice che in un istante, indivisibile e quindi di durata nulla, la freccia è ferma, ha spostamento nullo, detto in simboli:

$$\Delta t = 0 \rightarrow \Delta s = 0 \rightarrow v = 0$$

Ma dal punto di vista moderno questa deduzione è sbagliata, confonde la velocità con lo spostamento; la velocità è invece il quoziente tra spostamento e tempo impiegato e quindi si dovrebbe piuttosto scrivere:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

in altri termini la velocità viene ad essere indeterminata, e con questo il paradosso invece che essere risolto si è aggravato.

Newton e Leibniz risolvono il problema in un certo senso tornando ad Aristotele: l'istante non può essere indivisibile, non è un tempo zero, ma un tempo infinitamente piccolo, infinitesimo. Quindi la velocità istantanea non è zero diviso zero, ma

$$v = \frac{ds}{dt}$$

dove *ds* e *dt* sono uno spostamento infinitesimo e un tempo infinitesimo. A prima vista potrebbe sembrare un espediente che non risolve nulla.

È invece la soluzione del problema; aggiungendo alla già ricordata definizione di infinitesimo di Leibniz (maggiore di zero e minore di ogni numero reale) il cosiddetto *principio di estensione* e cioè che le regole dell'algebra ordinaria si estendono anche ai numeri iperreali è possibile calcolare la velocità istantanea, matematicamente la derivata. Ma di questo e del problema della tangente si è parlato già molte volte in questi convegni.

Che poi questi infinitesimi equivalgano del tutto a quelli visti più sopra lo abbiamo già verificato.

Ci si può chiedere: è didatticamente utile e opportuno introdurre anche la rappresentazione degli iperreali come sequenze infinite di numeri reali, che nasconde molte insidie? In effetti per molti anni non lo ho fatto partendo dal terzo paradosso e introducendo gli infinitesimi come sopra, come variabili.[3]. Quello che a me sembra un buon motivo per farlo lo vedremo al prossimo paragrafo.

4. Ma esistono veramente i numeri iperreali?

Nonostante tutto è frequente sentirsi rivolgere la domanda: "Ma esistono veramente questi numeri iperreali? Si possono scrivere?" o altre simili, per esempio: "Ma se l'insieme dei reali è completo, come può esistere un insieme maggiore dei reali" o ancora: "Nel mondo reale non

[3] In effetti l'approccio all'analisi da me usato in classe ricorda quello di [Kline, 1977], basato su un approccio intuitivo all'analisi, anche se si tratta ancora di un manuale di analisi standard.

esistono grandezze infinitamente piccole o infinitamente grandi, quindi non hanno significato!"

Ma dubbi analoghi potrebbero essere posti a proposito dei reali; nel mondo reale si può mai misurare un intervallo di tempo o una lunghezza che sia esattamente un numero reale come $\sqrt{3},\ \ e^2, \frac{\pi}{3}$??

Forse è il fatto di poter rappresentare i numeri reali in forma decimale, simile a quella dei razionali[4], a dare una sensazione di *concretezza* di *esistenza*, dimenticando che quei puntini di sospensione … non si potranno mai togliere!

Se si chiede a uno studente liceale che cosa sia un numero reale si ottiene quasi sempre la risposta: "un numero con infinite cifre decimali" anche se lo studente ha a suo tempo studiato la definizione con le classi contigue; ma è la notazione decimale che resta più impressa e dà la sensazione che i reali siano qualcosa di accettabile.

Ecco il buon motivo di cui parlavo per introdurre gli iperreali come sequenze infinite di reali, in analogia con la rappresentazione dei reali con sequenze infinite di cifre decimali. In fondo i soli numeri che gli antichi greci accettavano erano gli interi, e i razionali intesi come rapporti tra interi.

E allora concludo ricordando la famosa affermazione di Leopold Kronecker:

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

"I numeri interi li ha creati il buon Dio, tutto il resto è opera dell'uomo"; e se a "buon Dio" sostituiamo "madre natura" ecco un buon motivo per averli chiamati numeri naturali.

5. Riferimenti bibliografici

ARISTOTELE, *Fisica,* Bompiani, Milano 2014. —— *Vol. VI-9.*

GOLDBLATT R., *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York 1998.

HENLE J.M, KLEINBERG E.M., *Infinitesimal Calculus*, Dover, New York 1979-2003

[4] Più corretto sarebbe definire gli iperreali come classi di equivalenza di sequenze infinite equivalenti secondo un qualche ultrafiltro; ma a livello scolastico si può evitare, un po' come si fa per i numeri razionali che dovrebbero identificarsi non con frazioni, ma con classi di equivalenza di frazioni.

KLINE M., *Calculus, An Intuitive and Physical Approach*, Dover, New York 1977.

RUSSEL B., *La conoscenza del mondo esterno*, Newton Compton, Roma 1971.

BONAVOGLIA P., *Calcolo infinitesimale NSA,* http://nsa.mateweb.eu/, 2017

—, *Percorso per quinto anno di liceo*, http://nsa.mateweb.eu/percorso_5anno.html, 2017