Aoi

Vai al contenuto multimediale

Mario Rosalino Abundo

Esercizi e temi d'esame di calcolo delle probabilità e statistica

Per la laurea in Ingegneria

V edizione

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1046-1

V edizione: gennaio 2018

a Laura, Paolo e Marco

INDICE

Prefazione

Questa raccolta di esercizi e problemi completamente risolti di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* (CPS) si rivolge agli studenti della laurea triennale in Ingegneria. Gli esercizi riportati sono in gran parte quelli assegnati alle prove di verifica in itinere e alle prove di esame di CPS, per i corsi di laurea in Ingegneria presso l'Università di Roma *Tor Vergata*, negli a.a. compresi tra il 2000/01 e il 2004/05 e negli a.a. 2011/12, 2012/13. Questa V edizione riporta anche i temi assegnati nelle prove degli a.a. 2013/14 e 2014/15; come nella precedente edizione, compaiono esercizi sulle variabili aleatorie multidimensionali. E' inclusa anche una breve appendice sulla proprietà di mancanza di memoria di una variabile aleatoria.
Negli scorsi anni, i corsi di CPS sono stati tenuti da Barbara Torti e dal sottoscritto, e talvolta da qualche collega del Dipartimento di Matematica dell'Università *Tor Vergata*, che ha anche contribuito alla realizzazione dei temi d'esame.
Questo libro comprende esercizi e problemi tipici di esame, ripartiti per argomenti, in base alle tre diverse parti del corso di CPS: *Probabilità discreta, Variabili aleatorie continue (uni e multidimensionali),* e *Convergenza e problemi di stima*. Per i problemi proposti in prove ufficiali, è riportata la data nella quale essi sono stati assegnati. Le prove di verifica in itinere si riferiscono a parti del corso, mentre la prova scritta finale verte su tutto il programma; essa consiste tipicamente di tre problemi: uno di probabilità discreta, uno sulle variabili aleatorie continue, ed un terzo su problemi di convergenza e approssimazione. Il volume è suddiviso in due parti; nella prima sono riportati gli enunciati dei problemi, suddivisi in tre capitoli, uno per ognuno dei tre argomenti di cui sopra. Nella seconda parte, sono riportate le soluzioni relative ai problemi contenuti nella prima parte, sempre suddivise in tre capitoli.

Il presente libro non ha la pretesa di essere un compendio di esercizi di *Calcolo delle Probabilità e Statistica* per l'Università; esistono infatti testi ben più completi sull'argomento (si veda, ad esempio, P. Baldi, R. Giuliano, L. Ladelli: *Laboratorio di Statistica e Probabilità*, McGraw–Hill, 1995). Questa raccolta intende essere, piuttosto, un utile sussidio per gli studenti che debbono testare la loro preparazione alla prova scritta d'esame.

In questa quinta edizione, revisionata ed ampliata con l'introduzione di alcuni esercizi assegnati nelle prove d'esame degli a.a. 2013/14 e 2014/15, sono stati corretti vari errori di stampa, ancora rimanenti nelle precedenti edizioni; ringrazio chiunque vorrà segnalarmi eventuali errori, incompletezze ed omissioni, ancora presenti nel testo.

Roma, Gennaio 2018

Mario Abundo

PARTE I

Enunciati degli esercizi

Capitolo 1

Esercizi di Probabilità discreta

▷ **Esercizio 1.1**
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eventi; provare che (disuguaglianze di Boole):

$$(i)\ P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

$$(ii)\ P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

▷ **Esercizio 1.2**
Si considerino n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tra loro indipendenti. Trovare la probabilità che nessuno di essi si verifichi.

▷ **Esercizio 1.3**
Risolvere l'esercizio precedente, senza l'ipotesi di indipendenza degli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

▷ **Esercizio 1.4**
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti e $P(A_i) = p,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Se a è un assegnato numero positivo, trovare il più piccolo intero positivo n per cui $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq a$.

▷ **Esercizio 1.5**
Trovare quali dei seguenti due eventi ha maggior probabilità di accadere:
$A_1 =$ "esce almeno un asso nel lancio simultaneo di quattro dadi"; $A_2 =$ "esce almeno un doppio asso in 24 lanci di una coppia di dadi".

▷ **Esercizio 1.6**
Una scatola contiene 5 pedine doppie del gioco del *domino* (una pedina si dice doppia se su entrambi i suoi lati, sinistro e destro, è segnato lo stesso numero); si sa che la prima pedina è un doppio 1, la seconda un doppio 2, e le altre pedine nella scatola sono, rispettivamente, un doppio 3, un doppio 4 e un doppio 5. Si estraggono a caso dalla scatola due pedine, senza rimpiazzo.
(i) Calcolare la probabilità che la prima pedina estratta sia contrassegnata con un numero pari.
(ii) Calcolare la probabilità che la seconda pedina estratta sia contrassegnata con un numero pari.
(iii) Calcolare la probabilità che entrambe le pedine estratte siano contrassegnate con numeri pari.

▷ **Esercizio 1.7**
Due giocatori di tiro al piattello sparano allo stesso bersaglio. Si sa che il primo concorrente spara in media 9 colpi, durante lo stesso tempo in cui il secondo ne spara 10. La precisione dei due giocatori non è la stessa: mediamente, su 10 colpi sparati dal primo concorrente, 8 colpiscono il bersaglio, su altrettanti sparati dal secondo giocatore solo 7 colpiscono il bersaglio. Durante il gioco, il bersaglio è stato colpito da un proiettile, ma non si sa chi abbia sparato. Qual è la probabilità che abbia sparato il secondo concorrente?

▷ **Esercizio 1.8**
Una macchina produce una vite al secondo. Nella fabbrica ci sono occasionali cadute di tensione, che si verificano ogni secondo con probabilità 0.09. Quando c'è una caduta di tensione, la macchina si arresta, perchè c'è un controllo elettronico. Qual è la probabilità che la macchina produca k viti, dopo che è stata messa in funzione?

▷ **Esercizio 1.9**
Siano X, Y due v.a. indipendenti con la stessa distribuzione geometrica. Calcolare $P(X = Y)$ e $P(X \geq 2Y)$.

▷ **Esercizio 1.10**
Una scatola contiene due schede: una di esse ha entrambi i lati rossi, mentre l'altra ha un lato rosso e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è rosso. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia rosso?

▷ **Esercizio 1.11**
La probabilità che un bimbo esposto ad una malattia contagiosa la contragga è p.

(i) Se $p = 1/5$, qual è la probabilità che il dodicesimo bimbo esposto è il terzo a contrarla?
(ii) Se si considera un campione di 5000 bambini e $p = 1 \cdot 10^{-3}$, qual è la probabilità che il numero di bimbi che contraggono la malattia è ≤ 2?

▷ **Esercizio 1.12**
Un ubriaco ha in tasca un mazzo di 8 chiavi tra cui vi è la sua chiave di casa. Giunto sulla soglia, egli cerca di aprire la porta della sua abitazione con una delle due seguenti procedure:
(i) tenta con una chiave scelta a caso; se la chiave non è quella giusta, la ripone nel mazzo e ne sceglie ancora una a caso e così via fino ad individuare la chiave giusta. Calcolare la probabilità che la chiave giusta venga scelta al primo, al secondo e, in generale, al $k-$esimo tentativo.
(ii) L'ubriaco, per un improvviso sprazzo di lucidità, cerca la chiave giusta, provando le chiavi a caso una dopo l'altra, ma senza rimettere nel mazzo le chiavi già provate (che non aprono). Calcolare la probabilità che la chiave giusta venga scelta al primo, al secondo e, in generale, al $k-$esimo tentativo.

▷ **Esercizio 1.13**
Sia X una v.a. a valori in $\mathbf{Z}$ tale che $P(X = X^3) = 1$. Trovare la densità discreta di X, sapendo che $P(X = -1) = P(X = 1) = p$. Se Y è un'altra v.a., indipendente da X, che assume valori $-1, 1$ con probabilità $q, 1-q$, calcolare la legge di $Z = X + Y$.

▷ **Esercizio 1.14**
Una v.a. discreta X assume i valori $1, 2, 3, 4$ e $P(X = 1) = P(X = 2) = 1/4$. Sapendo che $E(X) = 21/8$, trovare la densità discreta di X e $Var(X)$.

▷ **Esercizio 1.15**
Sia X una v.a. che assume valori interi non negativi, con valore di aspettazione finito. Provare che $E(X)$ si può calcolare con la formula:

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$

▷ **Esercizio 1.16**
Sia X una v.a. uniformemente distribuita su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

▷ **Esercizio 1.17**
Siano X e Y v.a. indipendenti e uniformemente distribuite su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Trovare la legge di $Z = \max(X, Y)$. Calcolare anche $E(Z)$.

▷ **Esercizio 1.18**
Siano X e Y v.a. indipendenti con distribuzioni uniformi su $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $\{1, 2, \ldots, n, \ldots, 2n\}$, rispettivamente. Trovare la legge di $Z = \max(X, Y)$; calcolarne inoltre la media.

▷ **Esercizio 1.19**
Con riferimento all'esercizio precedente, sia $U = \min(X, Y)$. Trovare la legge di U.

▷ **Esercizio 1.20**
Due dadi equilibrati vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario ad ottenere 3 gettando il primo dado, e con Y il numero dei lanci necessario a ottenere 2 oppure 5 lanciando il secondo.
(i) Qual è la legge di X? e di Y? Qual è $E(X)$? e $E(Y)$?
(ii) Trovare la densità discreta di $Z = \max(X, Y)$ e $E(Z)$.
(iii) calcolare $P(X \geq Y)$.

▷ **Esercizio 1.21**
Una sospensione di batteri unicellulari ne contiene in media λ per cm^3. Supponiamo che il numero di batteri in 1 cm^3 segua una distribuzione di Poisson di parametro λ, e che la probabilità che un batterio sopravviva e si riproduca, formando una colonia, sia p (quindi il numero di colonie formate da un fissato numero n di batteri ha distribuzione binomiale di parametri n e p). Indichiamo con X il numero di colonie formate da 1 cm^3 della sospensione batterica.
(i) Trovare la densità discreta di X.
(ii) Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

▷ **Esercizio 1.22**
Si lanciano una moneta e un dado non truccati. Se la moneta dà testa, si lancia il dado e si pone uguale a X il valore della faccia uscita. Se invece la moneta dà croce, si lancia il dado due volte e si pone uguale a X il minimo dei valori ottenuti nei due lanci.
(i) Trovare la densità discreta della v.a. X.
(ii) Risolvere il punto (i), nel caso in cui la moneta è truccata e la probabilità che esca testa in un lancio della moneta è p.

▷ **Esercizio 1.23**
Si risolva l'esercizio precedente, sostituendo a X, nel caso che la moneta dia croce, il massimo dei valori ottenuti nei due lanci del dado. Provare inoltre che, detti U_1 e U_2 i risultati di questi lanci, risulta: $P\{\max(U_1, U_2) = k\} + P\{\min(U_1, U_2) = k\} = \frac{1}{3}$.

▷ **Esercizio 1.24** (prova in itinere a.a. 2000/01)
(i) Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Da essa vengono effettuate 2 estrazioni senza rimpiazzo. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?
(ii) Rispondere al quesito (i), nel caso che le estrazioni avvengano con rimpiazzo.
(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii), nel caso che l'urna contenga 900 palline, numerate da 1 a 900.

▷ **Esercizio 1.25**
(i) In quanti modi si può formare una commissione di 3 uomini e 2 donne scelti fra 7 uomini e 5 donne?
(ii) Una volta che sia stata scelta e formata la commissione, qual è la probabilità che una persona esterna indovini la sua composizione?

▷ **Esercizio 1.26** (prova in itinere a.a. 2000/01)
Un giocatore gioca ogni settimana al lotto l'ambo $\{1, 90\}$ su una singola ruota.
(i) Qual è la probabilità di vincere in una singola estrazione?
(ii) In media quanti tentativi sono necessari per vincere?
(iii) Qual è la probabilità di vincere almeno una volta nelle prime 100 estrazioni?

▷ **Esercizio 1.27** (prova d'esame del 9/07/2001)
Nel gioco del lotto ad ogni estrazione vengono estratti simultaneamente 5 numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Lo stesso procedimento viene ripetuto per le 10 ruote.
(i) Fissiamo un numero, ad esempio 1; qual è la probabilità che questo fissato numero venga estratto in una singola estrazione su una singola ruota?
(ii) Qual è la probabilità che il numero 1 esca almeno su una ruota?

▷ **Esercizio 1.28** (prova d'esame del 23/07/2001)
Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero minore o uguale di 60?
(ii) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?

▷ **Esercizio 1.29**
Un'azienda ha 1000 dipendenti, dei quali $u = 400$ uomini e $d = 600$ donne. All'ufficio del personale vengono esaminate (dopo averle scelte a caso dallo schedario) $n = 100$ schede, riguardante ciascuna un dipendente. Per l' $i-$esima scheda esaminata, poniamo $X_i = 1$, se essa si riferisce ad un dipendente uomo, altrimenti poniamo $X_i = 0$. Diciamo $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ il numero delle schede che riguardano dipendenti uomini.

(i) Supponiamo che le 100 schede vengano scelte a caso dallo schedario con reinserimento (cioè dopo che una scheda è stata estratta dall'archivio, viene di nuovo reinserita); calcolare $P(X_1 = 1)$ e $P(X_2 = 1)$. Le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti? E in generale le v.a. X_i sono tra loro indipendenti? Qual è la legge di X? Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.
(ii) Supponiamo ora che le 100 schede vengano scelte a caso, ma senza reinserimento. Rispondere di nuovo ai quesiti richiesti in (i); che cosa cambia?
(iii) Con riferimento al caso (ii), indichiamo con $S \in \{1, 2, \ldots\}$ il numero minimo di estrazioni, perché si ottenga una scheda relativa ad un dipendente uomo. La v.a. S è l'istante di primo successo in una successione di prove dipendenti, in cui la probabilità del successo (estrazione scheda di un dipendente uomo) non è costante, ma dipende dalla prova stessa (schema ipergeometrico). Trovare la legge di S.

▷ **Esercizio 1.30** (prova d'esame del 23/07/2001)
Sei urne contengono tutte 3 palline rosse (R) e un numero variabile di palline bianche (B). Precisamente, l'urna i-esima contiene 3 palline R e i palline B ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte, una dopo l'altra, due palline con rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che le due palline siano una B e una R?
(ii) Supponiamo che l'estrazione abbia dato come risultato una pallina B e una R. Qual è la probabilità p_i che l'urna prescelta sia la i-esima ? Qual è l'urna più probabile?
(iii) Supponiamo invece che vi siano 2 urne contenenti 3 palline R e 6 B (le urne sono quindi 7). Se l'estrazione ha dato come risultato una pallina B ed una R, qual è la probabilità che l'urna prescelta sia di tipo i (cioè contenga i palline B)? Qual è il valore di i più probabile?

▷ **Esercizio 1.31** (prova d'esame del 7/09/2001)
Ad una stazione ricevente possono giungere messaggi binari da due canali diversi, A e B. In ognuno di questi messaggi i singoli bit possono prendere i valori 0 e 1, a caso e in maniera indipendente. Nei messaggi provenienti da A ogni singolo bit è uguale a 1 con probabilità 2/3 e a 0 con probabilità 1/3. Nei messaggi provenienti da B succede l'inverso: un bit è uguale a 1 con probabilità 1/3 e a 0 con probabilità 2/3. Si sa che ogni messaggio può provenire da A o B con probabilità 1/2. Poniamo $A_i =$ "l'i-esimo bit è uguale a 1";
(i) Quanto vale $P(A_n)$ (ovvero la probabilità che l'n-esimo bit del messaggio valga 1)?
(ii) Se i primi due bits sono uguali a 1, qual è la probabilità che anche il terzo bit sia uguale a 1?
(iii) Gli eventi $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ sono indipendenti?
(iv) Sapendo che tra i primi tre bit, due sono uguali a 1 ed uno a 0, qual è la probabilità che il messaggio provenga dal canale A?

(v) Sapendo che tra i primi trenta bit, venti sono uguali a 1 e dieci a 0, qual è la probabilità che il messaggio provenga dal canale A?

▷ **Esercizio 1.32** (prova in itinere a.a 2001/02)
Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero minore o uguale di 60?
(ii) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?
(iii) Qual è la probabilità che, per i fissato, la pallina i-esima estratta sia proprio la numero i?
(iv) Qual è la probabilità che le prime due palline estratte siano proprio le numero 1 e 2, nell'ordine ? E in un ordine qualunque?

▷ **Esercizio 1.33** (prova in itinere a.a 2001/02)
La trasmissione di un segnale può avvenire utilizzando due diversi canali A e B con la stessa probabilità, A trasmette sempre il segnale correttamente, mentre B trasmette il segnale correttamente con probabilità 3/4.
(i) Qual è la probabilità di ricevere un segnale corretto?
(ii) Avendo ricevuto un segnale corretto, qual è la probabilità che esso sia stato trasmesso da B?

▷ **Esercizio 1.34** (prova in itinere a.a 2001/02)
Siano X e Y due v.a. indipendenti, entrambe Bernoulliane di parametro p, e siano $S = X + Y$ e $D = X - Y$.
(i) Calcolare le densità discrete di S e D.
(ii) Calcolare $P(S = 1, D = 0)$ e $P(S = 1, |D| = 1)$.
(iii) Dire se S e D sono indipendenti.
(iv) Calcolare $Cov(S, D)$.

▷ **Esercizio 1.35** (prova d'esame del 9/07/2002)
Si sa che un pesticida elimina il 99.9% degli insetti di un certo tipo e il 99.5% delle sue uova. Supponiamo che un animale sia infestato da 100 insetti e da 200 uova.
(i) Qual è la probabilità che il trattamento riesca ad eliminare tutti gli insetti e tutte le uova?
(ii) Si considera che l'insetto è eliminato se alla fine del trattamento rimangono al più un insetto oppure un uovo (un insetto da solo non riesce a riprodursi). Qual è la probabilità che alla fine del trattamento l'insetto sia eliminato?

▷ **Esercizio 1.36** (prova d'esame del 18/07/2002)
Un'urna contiene 6 palline: 3 bianche, 2 rosse ed 1 nera. Si estraggono tre palline senza rimbussolamento e si vince se una delle tre è nera.
(i) Calcolare la probabilità di vincere.
(ii) Calcolare la probabilità di vincere, sapendo che la pallina nera non è uscita nelle prime due estrazioni.
(iii) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?

▷ **Esercizio 1.37** (prova d'esame del 9/09/2002)
Un'urna contiene 4 palline rosse e 7 bianche. Vengono effettuate delle estrazioni senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che le prime due palline estratte siano entrambe rosse?
(ii) Qual è la probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe rosse, sapendo che la prima estratta era bianca? E se la prima estratta fosse stata rossa?
(iii) Qual è la probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe rosse?

▷ **Esercizio 1.38** (Prova scritta del 23/09/2002)
Un'urna contiene 100 dadi di cui la metà sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 è 1/2. Un dado viene estratto a caso e lanciato più volte. Indichiamo con X_i il risultato dell' i-esimo lancio.
(i) Calcolare la probabilità di avere 1 all' i-esimo lancio, ovvero $P(X_i = 1)$.
(ii) Calcolare la probabilità di avere 1 nei primi n lanci.
(iii) Calcolare la probabilità di avere 1 al terzo lancio, sapendo che si è avuto 1 nei primi due lanci.
(iii) Sia Z la v.a. che conta il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta 1. Qual è la probabilità che $Z = k$, con k intero positivo?

▷ **Esercizio 1.39** (prova in itinere a.a. 2002/03)
Un'urna contiene 100 biglie delle quali 8 sono nere e le rimanenti bianche. Vengono estratte 3 biglie a caso. Sia A l'evento "le 3 biglie estratte sono nere" e B l'evento "delle biglie estratte, 2 sono bianche ed una è nera".
(i) Calcolare $P(A)$ e $P(B)$ nel caso che le estrazioni siano con rimpiazzo.
(ii) Calcolare $P(A)$ e $P(B)$ nel caso di estrazioni senza rimpiazzo.
(iii) In quale dei due casi è maggiore la probabilità dell'evento B?

▷ **Esercizio 1.40** (prova in itinere a.a. 2002/03)
I computers di una certa partita vengono assemblati utilizzando processori di due diverse qualità, alle quali corrisponde un' affidabilità, in un dato intervallo di tempo Δ, rispettivamente del 98% e del 75%. Il 30% dei computers è assemblato con processori di qualità migliore. Si sceglie a caso un computer: