Aoi

In dir ist Freude

Federico Talamucci

Manuale di meccanica analitica

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0825-3

I edizione: novembre 2017

Indice

Introduzione

La maggior rilevanza attribuita al metodo matematico deduttivo, in raffronto all'indagine sperimentale e teorica delle leggi del moto, può essere in modo sommario la giustificazione del tratto distintivo "analitica" all'articolata disciplina "meccanica", scienza del movimento. Se sono ipotetici i confini del contenuto della meccanica analitica, per quanto la questione sia rilevante, è fondata e generalmente accolta l'idea del punto di partenza, posto nello studio dei sistemi di punti materiali, liberi o vincolati, soggetti a forze direttamente applicate interne od esterne al sistema.

La prima parte del manuale è dedicata alla costruzione geometrica dello spazio astratto che in modo naturale riceve la formulazione delle equazioni di moto, espresse mediante variabili – qualificate come variabili lagrangiane – che in modo diretto esprimono le possibili configurazioni del sistema.

La trattazione analitica è dunque preceduta da una sistemazione di tipo geometrico, per comprendere la quale sono sufficienti le nozioni apprese ad un corso di Geometria che abbracci i principali argomenti degli spazi lineari.

La presentazione degli argomenti nell'ambito del formalismo lagrangiano procede per gradi, partendo dalle situazioni più accessibili di un punto vincolato su una curva o su una superficie, contesti nei quali l'edificio geometrico è inserito nello spazio tridimensionale, agevolmente configurabile. Al tempo stesso, la minore complessità della formulazione matematica nei modelli semplificati concede di inoltrarsi nello sviluppo analitico e di compiere uno studio qualitativo del moto, percorrendo metodi usuali in quest'ambito, per la comprensione dei quali sono sufficienti le competenze di un primo corso di analisi matematica.

Il passaggio alla formulazione lagrangiana di un sistema più articolato deve avvenire avendo in mente sostanzialmente un'estensione formale dei casi elementari già percorsi, rispetto ai quali al singolo punto si sostituisce un "punto pluridimensionale" e la curva o superficie vincolare viene rimpiazzata da una "superficie pluridimensionale". In modo formale, questa fase coinvolge regole e teoremi riconducibili ad un corso di analisi matematica su funzioni a più variabili: la competenza richiesta in tal senso è la consapevolezza di poter operare in una certa direzione e non quella della dimostrazione dei teoremi utilizzati (uno per tutti: il teorema della funzione implicita), dato che l'interesse è altrove.

A questo proposito va detto che lo sforzo compiuto ha l'intento di utilizzare argomenti il più possibile confinati nei programmi dei due insegnamenti di analisi matematica e di quello di geometria che in modo ordinario vengono presentati nel primo biennio di un corso di laurea scientifica. A tale proponimento sfugge talvolta l'accenno o l'impostazione metodologica verso argomenti che esulano dai programmi dei corsi citati. L'autore è il primo ad essere consapevole che il coinvolgimento di nozioni più complesse ed attinenti ad una teoria più avanzata, seppur ritenute opportunamente tirate in ballo, è sommario e al limite della rigorosità: questo sguardo ai margini di impostazioni più impegnative è d'altra parte, sempre nell'opinione dell'autore, uno stimolo per approfondire e per infoltire la prima stesura imbastita da questo approccio iniziale.

La considerazione effettuata vale a maggior ragione per la seconda parte del manuale, avviata dalla sistemazione formale delle equazioni di moto tramite le variabili hamiltoniane e la funzione di Hamilton. Se, da una parte, il sistema di equazioni è sorprendentemente essenziale nella sua scrittura, dall'altra si prospetta l'accesso ad una geometria – riassumibile nel concetto di struttura simplettica – meno tangibile rispetto a quella che fa da cornice al percorso lagrangiano. Anche nel formalismo hamiltoniano si evidenziano i principali aspetti della teoria, contando sugli strumenti matematici a disposizione ed effettuando solo un accenno breve ma doveroso a concetti più impegnativi.

Dal punto di vista dell'organizzazione generale, il manuale segue l'idea di una presentazione il più omogenea e sistematica possibile, richiamando le nozioni che occorrono laddove è necessario ed evitando l'aggiunta di formulari o appendici, anche se questa è una pratica consueta nel genere della matematica applicata. Si è poi ritenuto fondamentale il riscontro personale circa l'apprendimento della teoria esposta attraverso una serie di esempi ed esercizi che attraversano l'intero testo, per poi aggiungere alla fine anche una cinquantina di esercizi di riepilogo, sia sul formalismo lagrangiano che su quello hamiltoniano.

Per quanto riguarda l'indicazione di testi di riferimento e di approfondimento, segnaliamo per primo *A. Fasano, S. Marmi, Meccanica Analitica, Bollati Boringhieri* 2002, del quale si condivide l'impostazione e la successione logica degli argomenti. Gli accenni a carattere geometrico, in particolare della seconda parte hamiltoniana, vengono effettuati pensando soprattutto a *V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti – Edizioni Mir* 2004, testo peraltro di ben più vaste proporzioni. Infine, indichiamo il prezioso *F. R. Gantmacher, Lezioni di Meccanica analitica, Editori Riuniti – Edizioni Mir* 1980 come testo di indiscutibile ingegno nella presentazione degli argomenti, a carattere prevalentemente analitico ed in parte geometrico, e di agevole e significativo raccordo tra una sintesi delle conoscenze classiche ed i moderni sviluppi della meccanica analitica.

Parte I

Formalismo lagrangiano

Introduzione

Un contesto decisamente adatto per la presentazione del formalismo lagrangiano è quello del moto nello spazio di più punti materiali sottoposti a restrizioni, che nel caso più semplice consistono in vincoli di tipo geometrico, ovvero riguardanti solo le coordinate dei punti ed eventualmente il tempo.

Il percorso teorico si svolge per stadi successivi, iniziando dai casi di un unico punto vincolato su una curva o su una superficie, nei quali la geometria del vincolo, ripercorsa negli aspetti fondamentali, è tale da permettere un agevole accesso ai concetti fondamentali dell'approccio lagrangiano.

La maggiore semplicità dal punto di vista analitico del problema del moto nel contesto unidimensionale e, in alcuni casi, quello bidimensionale offre la possibilità di una indagine analitica più approfondita e permette uno studio qualitativo del moto istruttiva ed efficace.

Anche nel caso generale di più punti materiali è fondamentale ambientare accuratamente il moto in uno spazio geometrico (varietà delle configurazioni) la cui struttura descriva in modo adeguato gli stati cinematici possibili.

Indipendentemente dalla dimensione del problema – dal vincolo unidimensionale fino al caso di più punti – la dinamica dal punto di vista lagrangiano viene formulata proiettando le equazioni di moto nello spazio delle velocità istanteneamente ammesse, caratterizzando al tempo stesso le forze vincolari in modo geometrico.

La possibilità di riassumere in una funzione scalare – la funzione lagrangiana – le caratteristiche cinematiche e dinamiche del sistema comporta dal punto di vista analitico una serie di vantaggi, come la semplicità nella comprensione di come si trasformano le equazioni passando da un sistema di coordinate all'altro, il conseguimento immediato di risultati di tipo analitico come la buona posizione delle equazioni di moto, l'evidenza di costanti del moto dall'esame diretto della funzione lagrangiana.

La questione relativa al collegamento fra la definizione di una specifica metrica nello spazio delle configurazioni e particolari tipi di moto del sistema viene affrontata maggiormente nel caso bidimensionale, per poi essere estesa, nei tratti essenziali, al caso pluridimensionale.

Anche gli aspetti del moto legati all'equilibrio, al bilancio di tipo energetico, all'approssimazione mediante lo sviluppo di Taylor, argomenti sviluppabili con vari metodi, si prestano nel formalismo lagrangiano ad una trattazione particolarmente agevole e rigorosa.