

Αοι

In dir ist Freude

Federico Talamucci

Manuale di meccanica analitica





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVII
Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0825-3

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: novembre 2017

Indice

<i>Introduzione</i>		13
I	Formalismo lagrangiano	17
Capitolo 1	La Geometria delle curve	21
	1.1 Archi, curve, punti regolari	22
	1.2 Le curve differenziabili	29
	1.3 Ascissa curvilinea, triedro principale, curvatura, torsione	33
	1.4 Piano e cerchio osculatore	41
	1.5 Curva con un parametro generico	44
	1.6 Curva piana, curva come grafico	47
	1.7 Curva in coordinate polari	53
Capitolo 2	Il moto unidimensionale	57
	2.1 Geometria e cinematica	58
	2.2 Dinamica del punto vincolato	63
	2.3 Funzione lagrangiana	67
	2.4 Integrale primo dell'energia	73
	2.5 Studio qualitativo del moto	77
	2.6 Grafico dell'energia potenziale	87

	2.7 Il piano delle fasi	93
	2.8 Stabilità dell'equilibrio	97
	2.9 Piccole oscillazioni	102
Capitolo 3	La Geometria delle superfici	105
	3.1 Superfici in \mathbb{R}^3	105
	3.2 Superfici regolari	112
	3.3 Superfici di rotazione, insiemi di livello	115
	3.4 Curve su una superficie, linee coordinate	117
	3.5 Spazio tangente, spazio normale	120
	3.6 Cambiamento di parametri	123
Capitolo 4	Moto di un punto su una superficie	129
	4.1 Cinematica: velocità possibili	130
	4.2 Dinamica: le equazioni del moto	131
	4.3 Equazioni di Lagrange	133
	4.4 Vincoli ideali, forze applicate	135
	4.5 Funzione Lagrangiana	136
	4.6 Integrali primi del moto	139
	4.7 Studio qualitativo del moto	142
Capitolo 5	Metrica su una superficie	149
	5.1 La prima forma fondamentale	149
	5.2 Calcolo di quantità metriche	153
	5.3 Curve geodetiche di una superficie	157
	5.4 Equazioni delle geodetiche	163
	5.5 Forma normale, simboli di Christoffel	165
	5.6 Geodetiche su alcune superfici	168
	5.7 Un esempio di geometria non euclidea	174

Capitolo 6	Geometria dei sistemi olonomi	179
	6.1 I sistemi vincolati	179
	6.2 Sottovarietà regolari in \mathbb{R}^N	182
	6.3 Spazio tangente, spazio normale	188
	6.4 Curve su una sottovarietà	191
	6.5 Cambiamento di coordinate	193
	6.6 Metrica in una sottovarietà	195
	6.7 La varietà delle configurazioni	198
Capitolo 7	Cinematica dei sistemi olonomi	205
	7.1 Espressione lagrangiana della velocità	205
	7.2 Energia cinetica	212
	7.3 Trasformazione indotta sulle velocità lagrangiane	216
Capitolo 8	Dinamica dei sistemi olonomi	219
	8.1 Equazioni di prima specie	219
	8.2 Componenti lagrangiane	221
	8.3 Equazioni di Lagrange di seconda specie	226
	8.4 Funzione lagrangiana	231
	8.5 Trasformazione dei parametri	236
	8.6 Scrittura delle equazioni di Lagrange	237
	8.7 Geodetiche e metrica <i>energia cinetica</i>	239
Capitolo 9	Bilancio energetico, integrali primi	245
	9.1 Teorema generalizzato dell'energia	246
	9.2 Integrali primi del moto, Lagrangiana ridotta	249
	9.3 Il Teorema di Noether nel formalismo lagrangiano	252
	9.4 Potenziali generalizzati	256

Capitolo 10	Equilibrio nei sistemi olonomi	263
	10.1 Equilibrio e stabilità	263
	10.2 Equilibrio per i sistemi lagrangiani	265
	10.3 Lagrangiana approssimata	268
	10.4 Piccole oscillazioni	270
II	Formalismo hamiltoniano	279
Capitolo 11	Sistema canonico di Hamilton	285
	11.1 Trasformata di Legendre	285
	11.2 Funzione hamiltoniana	291
	11.3 Equazioni canoniche di Hamilton	293
	11.4 Integrali primi del moto, Hamiltoniana ridotta	296
	11.5 Scrittura esplicita dell'Hamiltoniana	298
	11.6 Come si trasformano i momenti cinetici	299
	11.7 Modello geometrico per lo spazio delle fasi hamiltoniano	300
Capitolo 12	Campi e sistemi hamiltoniani	307
	12.1 Campi hamiltoniani	307
	12.2 Un criterio per i campi hamiltoniani	308
	12.3 Curve integrali, orbite, flusso	315
	12.4 Varietà materiali, invarianti integrali	321
	12.5 Conservazione della misura	325
	12.6 Il Teorema della ricorrenza di Poincaré	327
	12.7 Sistemi hamiltoniani autonomi	330
Capitolo 13	Parentesi di Poisson	333
	13.1 Parentesi di Poisson: definizione e pro- prietà	333

13.2 Parentesi di Poisson e integrali primi del moto	336
13.3 Derivata di Lie, parentesi di Lie	341
13.4 Commutazione di flussi hamiltoniani	346
Capitolo 14 Trasformazioni di variabili	349
14.1 Scrittura del sistema trasformato	350
14.2 Trasformazioni che conservano la struttura canonica	353
14.3 Condizione per la conservazione della struttura	355
14.4 Matrici simplettiche generalizzate	358
14.5 Proprietà delle trasformazioni che conservano la forma canonica	361
14.6 Matrici simplettiche, trasformazioni canoniche	363
14.7 Canonicità del flusso hamiltoniano	372
14.8 Trasformazioni canoniche e parentesi di Poisson	376
Capitolo 15 Il moto da un principio variazionale	381
15.1 Il calcolo delle variazioni	382
15.2 Equazioni di Eulero–Lagrange	388
15.3 Stazionarietà del funzionale lunghezza	392
15.4 Il Principio variazionale di Hamilton	395
15.5 Cambiamento della scala temporale	400
15.6 Principio di Jacobi, metrica di Jacobi	402
Capitolo 16 Condizione di Lie per la canonicità	409
16.1 Spazio vettoriale simplettico	409
16.2 Struttura simplettica	413

16.3	Canonicità e 2–forma Ω_2	418
16.4	Condizione di Lie	419
16.5	Differenziale e gradiente simplettico	428
Capitolo 17	Invariante integrale di Poincaré–Cartan	431
17.1	Teorema di Stokes in tre dimensioni	431
17.2	Teorema e Lemma di Stokes in più di- mensioni	433
17.3	La 1–forma di Poincaré–Cartan	437
17.4	L’invariante integrale di Poincaré–Cartan	439
17.5	Canonicità e 1–forma di Poincaré–Cartan	441
Capitolo 18	Funzioni generatrici	447
18.1	Funzione generatrice del flusso hamiltoniano	448
18.2	Trasformazioni libere	450
18.3	Altri tipi di funzioni generatrici	456
Capitolo 19	Equazione di Hamilton–Jacobi	465
19.1	Scrittura dell’equazione	465
19.2	Integrale completo, Teorema di Jacobi	467
19.3	Il caso autonomo	472
19.4	Il caso di variabile ciclica	476
19.5	Il metodo di separazione di variabili	479
19.6	Un accenno ai sistemi integrabili	483
Capitolo 20	Teorema di Noether	487
20.1	Invarianza degli insiemi di livello	487
20.2	Gruppo di trasformazioni	489
20.3	Generatore di un sistema autonomo	491

20.4 Il caso dei sistemi hamiltoniani	493
20.5 Simmetrie di un'Hamiltoniana	494
20.6 Il Teorema di Noether nel formalismo hamiltoniano	496

III Alcuni esercizi svolti 501

Capitolo 21 Esercizi sul formalismo lagrangiano	503
21.1 Testi	503
21.2 Indicazioni sulla risoluzione	523

Capitolo 22 Esercizi sul formalismo hamiltoniano	571
22.1 Testi	571
22.2 Indicazioni sulla risoluzione	592

Introduzione

La maggior rilevanza attribuita al metodo matematico deduttivo, in raffronto all'indagine sperimentale e teorica delle leggi del moto, può essere in modo sommario la giustificazione del tratto distintivo “analitica” all'articolata disciplina “meccanica”, scienza del movimento. Se sono ipotetici i confini del contenuto della meccanica analitica, per quanto la questione sia rilevante, è fondata e generalmente accolta l'idea del punto di partenza, posto nello studio dei sistemi di punti materiali, liberi o vincolati, soggetti a forze direttamente applicate interne od esterne al sistema.

La prima parte del manuale è dedicata alla costruzione geometrica dello spazio astratto che in modo naturale riceve la formulazione delle equazioni di moto, espresse mediante variabili – qualificate come variabili lagrangiane – che in modo diretto esprimono le possibili configurazioni del sistema.

La trattazione analitica è dunque preceduta da una sistemazione di tipo geometrico, per comprendere la quale sono sufficienti le nozioni apprese ad un corso di Geometria che abbracci i principali argomenti degli spazi lineari.

La presentazione degli argomenti nell'ambito del formalismo lagrangiano procede per gradi, partendo dalle situazioni più accessibili di un punto vincolato su una curva o su una superficie, contesti nei quali l'edificio geometrico è inserito nello spazio tridimensionale, agevolmente configurabile. Al tempo stesso, la minore complessità della formulazione matematica nei modelli semplificati concede di inoltrarsi nello sviluppo analitico e di compiere uno studio qualitativo del moto, percorrendo metodi usuali in quest'ambito, per la comprensione dei quali sono sufficienti le competenze di un primo corso di analisi matematica.

Il passaggio alla formulazione lagrangiana di un sistema più articolato deve avvenire avendo in mente sostanzialmente un'estensione formale dei casi elementari già percorsi, rispetto ai quali al singolo punto si sostituisce un “punto pluridimensionale” e la curva o superficie vincolare viene rimpiazzata da una “superficie pluridi-

mensionale”. In modo formale, questa fase coinvolge regole e teoremi riconducibili ad un corso di analisi matematica su funzioni a più variabili: la competenza richiesta in tal senso è la consapevolezza di poter operare in una certa direzione e non quella della dimostrazione dei teoremi utilizzati (uno per tutti: il teorema della funzione implicita), dato che l’interesse è altrove.

A questo proposito va detto che lo sforzo compiuto ha l’intento di utilizzare argomenti il più possibile confinati nei programmi dei due insegnamenti di analisi matematica e di quello di geometria che in modo ordinario vengono presentati nel primo biennio di un corso di laurea scientifica. A tale proponimento sfugge talvolta l’accento o l’impostazione metodologica verso argomenti che esulano dai programmi dei corsi citati. L’autore è il primo ad essere consapevole che il coinvolgimento di nozioni più complesse ed attinenti ad una teoria più avanzata, seppur ritenute opportunamente tirate in ballo, è sommario e al limite della rigosità: questo sguardo ai margini di impostazioni più impegnative è d’altra parte, sempre nell’opinione dell’autore, uno stimolo per approfondire e per infoltire la prima stesura imbastita da questo approccio iniziale.

La considerazione effettuata vale a maggior ragione per la seconda parte del manuale, avviata dalla sistemazione formale delle equazioni di moto tramite le variabili hamiltoniane e la funzione di Hamilton. Se, da una parte, il sistema di equazioni è sorprendentemente essenziale nella sua scrittura, dall’altra si prospetta l’accesso ad una geometria – riassumibile nel concetto di struttura simplettica – meno tangibile rispetto a quella che fa da cornice al percorso lagrangiano. Anche nel formalismo hamiltoniano si evidenziano i principali aspetti della teoria, contando sugli strumenti matematici a disposizione ed effettuando solo un accenno breve ma doveroso a concetti più impegnativi.

Dal punto di vista dell’organizzazione generale, il manuale segue l’idea di una presentazione il più omogenea e sistematica possibile, richiamando le nozioni che occorrono laddove è necessario ed evitando l’aggiunta di formulari o appendici, anche se questa è una pratica consueta nel genere della matematica applicata. Si è poi ritenuto fondamentale il riscontro personale circa l’apprendimento della teoria esposta attraverso una serie di esempi ed esercizi che

attraversano l'intero testo, per poi aggiungere alla fine anche una cinquantina di esercizi di riepilogo, sia sul formalismo lagrangiano che su quello hamiltoniano.

Per quanto riguarda l'indicazione di testi di riferimento e di approfondimento, segnaliamo per primo *A. Fasano, S. Marmi, Meccanica Analitica, Bollati Boringhieri* 2002, del quale si condivide l'impostazione e la successione logica degli argomenti. Gli accenni a carattere geometrico, in particolare della seconda parte hamiltoniana, vengono effettuati pensando soprattutto a *V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti – Edizioni Mir* 2004, testo peraltro di ben più vaste proporzioni. Infine, indichiamo il prezioso *F. R. Gantmacher, Lezioni di Meccanica analitica, Editori Riuniti – Edizioni Mir* 1980 come testo di indiscutibile ingegno nella presentazione degli argomenti, a carattere prevalentemente analitico ed in parte geometrico, e di agevole e significativo raccordo tra una sintesi delle conoscenze classiche ed i moderni sviluppi della meccanica analitica.

Parte I

Formalismo lagrangiano

Introduzione

Un contesto decisamente adatto per la presentazione del formalismo lagrangiano è quello del moto nello spazio di più punti materiali sottoposti a restrizioni, che nel caso più semplice consistono in vincoli di tipo geometrico, ovvero riguardanti solo le coordinate dei punti ed eventualmente il tempo.

Il percorso teorico si svolge per stadi successivi, iniziando dai casi di un unico punto vincolato su una curva o su una superficie, nei quali la geometria del vincolo, ripercorsa negli aspetti fondamentali, è tale da permettere un agevole accesso ai concetti fondamentali dell'approccio lagrangiano.

La maggiore semplicità dal punto di vista analitico del problema del moto nel contesto unidimensionale e, in alcuni casi, quello bidimensionale offre la possibilità di una indagine analitica più approfondita e permette uno studio qualitativo del moto istruttiva ed efficace.

Anche nel caso generale di più punti materiali è fondamentale ambientare accuratamente il moto in uno spazio geometrico (varietà delle configurazioni) la cui struttura descriva in modo adeguato gli stati cinematici possibili.

Indipendentemente dalla dimensione del problema – dal vincolo unidimensionale fino al caso di più punti – la dinamica dal punto di vista lagrangiano viene formulata proiettando le equazioni di moto nello spazio delle velocità istantaneamente ammesse, caratterizzando al tempo stesso le forze vincolari in modo geometrico.

La possibilità di riassumere in una funzione scalare – la funzione lagrangiana – le caratteristiche cinematiche e dinamiche del sistema comporta dal punto di vista analitico una serie di vantaggi, come la semplicità nella comprensione di come si trasformano le equazioni passando da un sistema di coordinate all'altro, il conseguimento immediato di risultati di tipo analitico come la buona posizione delle equazioni di moto, l'evidenza di costanti del moto dall'esame diretto della funzione lagrangiana.

La questione relativa al collegamento fra la definizione di una specifica metrica nello spazio delle configurazioni e particolari tipi di moto del sistema viene affrontata maggiormente nel caso bidimen-

sionale, per poi essere estesa, nei tratti essenziali, al caso pluridimensionale.

Anche gli aspetti del moto legati all'equilibrio, al bilancio di tipo energetico, all'approssimazione mediante lo sviluppo di Taylor, argomenti sviluppabili con vari metodi, si prestano nel formalismo lagrangiano ad una trattazione particolarmente agevole e rigorosa.