

Aoi



Vai al contenuto multimediale

Aldo Ventre

Matematica

Metodi per il Calcolo
e la Rappresentazione





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVIII
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0733-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: gennaio 2018

a *Rebecca*
Giuseppe
Lorenzo
Diletta

Indice

Prefazione	XIX
1 Linguaggio. Insiemi	1
1.1 Linguaggio	1
1.2 Insiemi	2
2 Numeri e proposizioni	7
2.1 I numeri naturali	7
2.1.1 Problemi di conteggio	10
2.2 I numeri primi	12
2.2.1 Codici e decodifiche	13
2.3 I numeri interi	15
2.4 I numeri razionali	15
2.4.1 La frazione generatrice	20
2.4.2 La numerazione	20
2.5 I numeri reali	22
2.5.1 Densità	25
2.5.2 Chiusura di un insieme rispetto alle operazioni . . .	25
2.6 Notazioni abbreviate	25
2.6.1 Esiste almeno uno	26
2.7 Implicazione e dimostrazione	26
2.7.1 Implicazione e equivalenza logica	26
2.7.2 Il teorema	29
2.7.3 <i>Tertium non datur</i>	32
2.7.4 Ci sono dimostrazioni e dimostrazioni	33
2.7.5 Dimostrazioni “visuali”	35
2.7.6 Il teorema inverso	37

2.7.7	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	38
2.7.8	La scuola pitagorica	39
2.7.9	Ancora sul teorema di Pitagora	40
2.8	Il metodo induttivo e il principio di induzione	41
2.8.1	Condizione necessaria. Condizione sufficiente	45
2.9	La congettura	47
2.10	Ancora un ragionamento “visuale”	49
2.11	Matematica e cultura	50
2.11.1	Lo studio individuale e il lavoro	51
3	Relazioni	53
3.1	Sul concetto di relazione	53
3.2	Prodotto cartesiano di insiemi. Relazioni	55
3.2.1	Proprietà delle relazioni	58
3.3	Relazioni di ordine	60
3.3.1	L'insieme delle parti	61
3.3.2	Ordine totale	61
3.4	Relazione di preferenza	62
3.5	Relazione di equivalenza	63
3.5.1	Partizioni di un insieme	65
4	Geometria euclidea	67
4.1	Introduzione	67
4.1.1	Primi assiomi	68
4.1.2	Nomenclatura. Ulteriori assiomi	70
4.1.3	Rifondazione della geometria	73
4.2	Figure geometriche	75
4.2.1	Figure convesse e figure concave	75
4.2.2	Angoli	77
4.2.3	Relazioni tra rette e piani nello spazio	81
4.2.4	Relazioni tra piani nello spazio	84
4.2.5	Proiezioni	85
4.2.6	Angolo di una retta con un piano	89
4.2.7	Diedri	89
4.2.8	Piani perpendicolari	91
4.2.9	Simmetrie	92
4.2.10	Poligoni simili	94
4.3	Il teorema di Talete	94

5	Insiemi numerici	101
5.1	La retta reale	101
5.1.1	Uguaglianze, identità e equazioni	105
5.1.2	Tradurre un problema in un'equazione	109
5.2	Ordine dei numeri reali	110
5.2.1	Tradurre un problema in una disequazione	112
5.3	Intervalli, distanze, intorno, valore assoluto	113
5.3.1	Un'equazione e una disequazione con valore assoluto	118
5.4	Insieme ampliato dei numeri reali	119
5.5	Insiemi limitati. Estremi di insiemi numerici	121
5.6	Insiemi separati. Insiemi contigui	125
6	Funzioni	127
6.1	Generalità	127
6.1.1	Funzioni suriettive, iniettive, biunivoche	130
6.2	Insiemi equipotenti. Insiemi infiniti, insiemi finiti	134
6.2.1	Insiemi finiti, infiniti, limitati	136
6.3	Hotel Hilbert	136
6.4	Funzioni composte	138
7	La funzione lineare. La retta	141
7.1	Il piano cartesiano	141
7.1.1	Distanza	143
7.1.2	Funzioni reali di una variabile reale	144
7.1.3	Grafico e curva	146
7.2	La funzione lineare	147
7.2.1	La funzione costante	147
7.2.2	La funzione identica	148
7.2.3	La funzione $f(x) = kx$	148
7.2.4	Retta passante per l'origine. Sommario	150
7.2.5	La funzione $f(x) = kx + n$	151
7.2.6	Ancora sulla rappresentazione della retta. L'equazione lineare	153
7.2.7	Ancora sulla rappresentazione della retta. Le equazioni parametriche della retta	154
7.3	Parallelismo di rette	157
7.3.1	Rette rappresentate da equazioni parametriche	157
7.3.2	Rette rappresentate da equazioni ordinarie	159

7.4	La funzione valore assoluto	162
7.5	Un modello lineare	162
7.6	Funzioni invertibili e funzioni inverse	163
7.7	Nozione di algoritmo	165
7.7.1	Conclusione	169
8	Spazi vettoriali numerici	171
8.1	Coppie e terne di numeri reali	171
8.2	Spazi vettoriali reali	173
8.3	Lo n -spazio vettoriale numerico	174
8.3.1	Combinazioni lineari di vettori di $\mathbf{R}^n$	175
8.3.2	Sistemi di generatori e basi di $\mathbf{R}^n$	179
8.3.3	Sottospazi di $\mathbf{R}^n$	181
8.4	Prodotto scalare	182
9	Vettori geometrici	183
9.1	Grandezze scalari e grandezze vettoriali	183
9.2	Vettori liberi e vettori applicati	185
9.2.1	Addizione di vettori liberi	188
9.2.2	Moltiplicazione di uno scalare per un vettore libero	189
9.3	Lato di chiusura di un poligono	190
9.4	Proprietà delle operazioni con i vettori liberi	191
9.5	Componenti di un vettore del piano	193
9.6	Riferimento cartesiano e vettori dello spazio	195
9.7	Versori	197
9.8	Isomorfismo	199
10	Sistemi di equazioni lineari. Metodi di riduzione	201
10.1	Sistemi di equazioni lineari	201
10.2	Sistemi equivalenti	204
10.2.1	Operazioni sulle equazioni	206
10.3	Riduzione di un sistema. Metodo di sostituzione	208
10.3.1	Riepilogo	213
10.3.2	Caso 3. Generalizzazione.	214
10.4	Riduzione di un sistema. Esempi	215

11 Matrici e determinanti. Sistemi di equazioni lineari	221
11.1 Generalità	221
11.2 Determinanti	224
11.3 Proprietà dei determinanti	227
11.4 Minori	228
11.5 Complemento algebrico	230
11.6 Prodotto di matrici	231
11.7 Rango di una matrice	233
11.7.1 Matrice trasposta	236
11.8 Teorema di Rouché e Capelli	237
11.9 Regola di Cramer	238
11.10 Sistemi di equazioni lineari. Esercizi	241
 12 Funzioni elementari	 253
12.1 Introduzione	253
12.2 Funzioni monotone	253
12.3 Funzioni invertibili e funzioni inverse	254
12.4 La potenza	255
12.4.1 Definizione	255
12.4.2 Potenza con esponente intero non nullo	258
12.4.3 Esponente nullo	261
12.5 Funzioni pari, funzioni dispari	261
12.6 La radice	263
12.7 I numeri complessi	266
12.8 Potenza con esponente reale	268
12.9 La funzione esponenziale	269
12.9.1 Il numero di Nepero	273
12.10 Il logaritmo	274
12.11 Le funzioni circolari	277
12.11.1 L'equazione della circonferenza	277
12.11.2 La circonferenza goniometrica	280
12.11.3 Le funzioni seno, coseno e tangente	284
12.12 Conclusione	290
 13 Perpendicolarità	 291
13.1 Introduzione	291
13.2 Rette perpendicolari	291
13.3 Modulo di un vettore. Prodotto scalare.	295

13.3.1	Perpendicolarità tra rette e vettori	298
13.3.2	Esercizi	301
13.3.3	Rappresentazione della circonferenza. Esercizi . . .	303
14	Limiti	305
14.1	Introduzione	305
14.2	Definizione	306
14.2.1	Casi particolari	307
14.2.2	Unicità del limite	317
14.3	Limiti delle funzioni elementari	318
14.3.1	Quando il denominatore è piccolo	320
14.4	Proprietà dei limiti	321
14.4.1	Operazioni	321
14.4.2	Permanenza del segno	325
14.4.3	Confronto	326
14.4.4	Limite della funzione composta	328
14.4.5	Limite destro, limite sinistro	329
14.4.6	Ancora sui limiti delle funzioni elementari	332
15	Continuità	335
15.1	Funzioni continue	335
15.2	Proprietà delle funzioni continue	336
15.3	Discontinuità	340
15.4	Convenzione del dominio. Restrizioni di una funzione . . .	343
15.5	Curva	343
15.6	Funzioni inverse delle funzioni continue	344
15.7	Le funzioni inverse delle funzioni circolari	345
15.7.1	La funzione arcoseno	345
15.7.2	La funzione arcocoseno	345
15.7.3	La funzione arcotangente	346
15.8	Continuità delle funzioni elementari	346
16	Derivate. Differenziali	349
16.1	Introduzione	349
16.2	Definizione	350
16.3	Significato geometrico	351
16.4	Prime proprietà	352
16.4.1	Derivate di alcune funzioni elementari	353

16.4.2	Rapidità istantanea di variazione	355
16.5	Operazioni sulle derivate	356
16.6	Derivate delle funzioni composte	357
16.7	Derivate delle altre funzioni elementari	358
16.7.1	Sulla derivata della funzione esponenziale	359
16.8	Derivata destra e derivata sinistra	359
16.8.1	Derivate di ordine superiore	361
16.9	Infinitesimi e infiniti	362
16.9.1	Infinitesimi	362
16.9.2	Infiniti	364
16.10	Differenziale	365
16.11	Approssimazione	367
16.12	Parabola con asse verticale	369
16.13	Formula di Taylor	370
17	Teoremi del calcolo. Grafici	375
17.1	Introduzione	375
17.2	Punti di minimo relativo e di massimo relativo	376
17.3	Teoremi di Fermat e di Rolle	378
17.4	Teorema di Lagrange e sue conseguenze	380
17.5	Osservazioni sul Teorema di Fermat	383
17.5.1	Test della derivata seconda. Ricerca del massimo e del minimo di una funzione	384
17.6	La regola di de l'Hospital	386
17.7	Ancora sulle forme indeterminate	388
17.8	Convessità, concavità, flesso	390
17.8.1	Convessità e concavità. Definizioni	390
17.9	Oggetti defilati	394
17.9.1	Il piano di sito	395
17.10	Asintoti	396
17.10.1	Asintoti verticali	397
17.10.2	Asintoti orizzontali	398
17.10.3	Asintoti obliqui	399
17.11	Studio del grafico di una funzione	402
18	Integrazione	405
18.1	Introduzione	405
18.2	L'integrale definito	406

18.3 Area di un insieme piano	409
18.4 Area del rettangoloide	412
18.5 La funzione integrale	413
18.6 Le funzioni primitive	415
18.7 L'integrale indefinito	419
18.7.1 Integrali indefiniti immediati	419
18.7.2 Integrali indefiniti che si risolvono con semplici tra-	
sformazioni	420
18.8 Integrazione per parti	423
18.9 Dominio normale	425
18.10 Identità trigonometriche. Sostituzioni trigonometriche . . .	427
18.10.1 Sostituzioni trigonometriche	428
18.11 Integrali impropri	428
18.11.1 Integrali impropri di primo tipo	429
18.11.2 Integrali impropri di secondo tipo	431
18.11.3 Un integrale improprio di primo tipo	433
18.12 Esercizi sugli integrali	434
18.12.1 Integrali indefiniti	434
18.12.2 Integrali indefiniti	438
18.12.3 Integrali definiti	440
18.12.4 Calcolare i seguenti integrali	440
18.12.5 Calcolo di area	442
19 Funzioni di più variabili	443
19.1 Introduzione	443
19.2 Lo spazio n -dimensionale reale	445
19.3 Esempi di funzioni di più variabili	449
19.4 Funzioni reali di due variabili reali	450
19.5 Ancora sul dominio di $f(x, y)$	452
19.6 Il grafico di $z = f(x, y)$. Rappresentazione geometrica . . .	454
19.7 Curve di livello	455
19.8 Funzioni limitate	458
19.9 Limiti	459
19.10 Continuità	462
19.11 Derivate parziali	465
19.12 Esercizi. Domini, curve di livello	468
19.13 Esercizi. Derivate parziali	470
19.14 Derivate parziali delle funzioni di tre o più variabili	471

20	Derivate e curve	473
20.1	Relazioni tra continuità e derivabilità	473
20.2	Derivate parziali del secondo ordine	475
20.2.1	Esercizi	476
20.3	Curve	478
20.4	Retta tangente a una curva	482
20.4.1	Curva chiusa	484
20.5	Lunghezza di una curva	485
20.5.1	Ascissa curvilinea	486
20.6	Derivata di una funzione composta	487
20.7	Funzioni implicite	489
21	Piani e rette dello spazio	493
21.1	Piani	493
21.1.1	Parallelismo di piani	495
21.1.2	Significato geometrico dei coefficienti a, b, c	496
21.1.3	Piano e superficie	497
21.2	Rette dello spazio	498
21.2.1	Rette parallele	500
21.2.2	Rette complanari, rette sghembe	501
21.2.3	Retta parallela a un piano. Rette perpendicolari. Piani perpendicolari	502
21.2.4	Esercizi	504
21.2.5	Intersezione di due piani	505
21.3	Fasci di piani	509
21.4	Esercizi	511
22	Cilindri e coni	517
22.1	Generalità sulle superfici	517
22.2	Cilindri	519
22.3	Coni	521
22.3.1	Polinomio omogeneo	523
22.4	Esercizi	524
23	Differenziali e Superfici	529
23.1	Introduzione	529
23.2	Differenziabilità. Differenziale	530

23.3	Sommario delle proprietà relative a continuità, derivabilità e differenziabilità	532
23.4	Sezioni verticali di una superficie	532
23.5	Piano tangente a una superficie	534
23.6	Dimostrazione del Teorema 23.1	535
24	Massimi e minimi	539
24.1	Introduzione	539
24.2	Massimi relativi e minimi relativi	540
24.2.1	Esercizi	542
24.3	Ricerca di massimi relativi e minimi relativi	542
24.4	Massimi assoluti e minimi assoluti	546
24.5	Ricerca di massimo e minimo di funzione continua	548
25	Estremi vincolati. Gradiente	549
25.1	Introduzione	549
25.2	Il metodo del moltiplicatore di Lagrange	549
25.3	Gradiente	553
25.4	Derivate direzionali	556
26	Equazioni differenziali	563
26.1	Generalità	563
26.1.1	Spazio, tempo, velocità. Moto rettilineo	563
26.1.2	Generica equazione oraria	564
26.1.3	Posizione del punto mobile	565
26.2	Equazioni differenziali	566
26.3	Crescita e decrescita esponenziale	569
27	Integrale delle funzioni di due variabili	571
27.1	Area di un insieme piano	571
27.2	Volume di un solido	573
27.3	Cilindroide	575
27.4	Integrale doppio	575
27.5	Proprietà dell'integrale doppio	577
27.6	Formule di riduzione dell'integrale doppio	578

28 Il Processo Gerarchico Analitico	583
28.1 Introduzione	583
28.2 Autovalori e autovettori	583
28.3 Il Processo Gerarchico Analitico	587
28.4 Sviluppi	596
 Indice analitico	 601
 Bibliografia	 611
 Cenni biografici	 617

Prefazione

La curiosità, o una motivazione culturale possono indurre il lettore a prendere, o riprendere, i contatti con la matematica. Le promesse di semplicità che si concretizzano in episodi narrativi ben correlati, storici o biografici non rendono un buon servizio e non rispondono al desiderio di conoscenza. Il lettore vuol sapere qual è il germe comune a tante esperienze, apparenti coincidenze che la sua mente ha osservato. La risposta è nella teoria, nell'astrazione, nel saper trovare caratteri diffusi nelle distinte costruzioni di strutture concettuali e delle relazioni tra esse. Per secoli, anzi per un paio di millenni la matematica ha fatto e motivato cultura, ha indirizzato la speculazione filosofica e scientifica, indistinta dalle arti, la letteratura, l'architettura, la musica.

Una riflessione di John von Neumann (1947) ci aiuta a capire:

Le idee matematiche hanno origine a livello empirico. Ma una volta che esse sono state concepite in questo modo, l'argomento comincia a vivere di vita propria e viene paragonato, con maggiore facilità a qualcosa di creativo, governato quasi del tutto da motivazioni estetiche. Mentre si diffonde, o dopo numerosi incroci "astratti", la disciplina matematica rischia la degenerazione: qualora si raggiunga tale stadio l'unico rimedio mi sembra essere il ritorno rivivificante alla fonte: una nuova introduzione di idee più o meno direttamente empiriche.

Alcuni corsi universitari prevedono che la matematica conviva con altre discipline, le discipline storiche, artistiche, economiche, sociali, naturali, dell'ambiente, della pianificazione, dell'architettura, del design, dell'organizzazione, della realtà fisica. La matematica dovrebbe essere omogenea con queste discipline e lo studente non dovrebbe rilevare nella

matematica metodo, obiettivi e contenuti decentrati o lontani dai suoi interessi e dal suo mondo.

Il presente volume è stato scritto affinché sia letto e studiato: il fine è andare incontro al lettore che riconosce un'avventura, attraverso l'esposizione degli elementi utili ad una costruzione intellettuale. Lettori interessati sono gli studenti, che troveranno le motivazioni dei concetti, i legami storici e culturali. Trasmettere con semplicità è un lavoro impegnativo. In ogni contesto esiste una soglia al di sotto della quale la semplificazione altera il significato.

È bene ricordare che un libro di matematica si nutre del lavoro condotto in aula per anni, a contatto con gli studenti. Un ringraziamento particolare è dovuto proprio a loro. Essi, infatti, criticano, approvano stimolano ed incoraggiano l'autore, chiudendo il doppio flusso.

Molti colleghi e amici hanno collaborato apportando esempi, curiosità, suggerimenti, correzioni. Li ringrazio tutti con affetto. Un ringraziamento particolare a Silvia d'Ambrosio per l'infaticabile e saggia collaborazione, la cura nella composizione editoriale, le scelte grafiche e l'impaginazione professionale.

Napoli, ottobre 2017

Aldo Ventre