

EUREKA  
*BASIC*

ASPETTI MATEMATICI DELLA FISICA TEORICA

2

*Direttore*

**Sergio Luigi CACCIATORI**

Università degli Studi dell'Insubria, Como, Italia

*Comitato scientifico*

**Francesco Domenico BELGIORNO**

Politecnico di Milano, Milano, Italia

**Alexander Yu. KAMENSHCHIK**

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, Bologna, Italia

**Simone NOJA**

Università degli Studi di Milano, Milano, Italia

**Stefano PIGOLA**

Università degli Studi dell'Insubria, Como, Italia



Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

Albert EINSTEIN

Il XX secolo ha conosciuto uno straordinario sviluppo della Fisica teorica e della Matematica, tale da non avere precedenti. Le due discipline si sono mutuamente influenzate come mai era accaduto prima e l'una si è fatta volano per i progressi dell'altra. Se da un lato la relatività generale e la meccanica quantistica hanno indotto i fisici teorici a confrontarsi con un alto livello di sofisticazione matematica, dall'altro le domande poste dalle moderne teorie quantistiche di campo e dalla teoria delle stringhe hanno aperto nuove entusiasmanti direzioni nella ricerca matematica.

*Eureka* pubblica monografie e saggi che trattano la Fisica matematica e gli aspetti matematici della Fisica teorica con l'obiettivo di gettare un solido ponte tra le discipline. La serie "Basics" affronta tematiche più elementari, privilegiando però prospettive nuove e inusitate che offrano uno sguardo differente rispetto alle tradizioni didattiche più consolidate. La serie "Advanced" invece è riservata a monografie specialistiche su temi al centro della ricerca contemporanea e intende caratterizzarsi per la cura del dettaglio matematico, la profondità concettuale e la chiarezza espositiva.



*Vai al contenuto multimediale*

Giacomo Fonte

**Appunti di metodi matematici della fisica**





Aracne editrice

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

Copyright © MMXVIII  
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

[www.gioacchinoonoratieditore.it](http://www.gioacchinoonoratieditore.it)  
[info@gioacchinoonoratieditore.it](mailto:info@gioacchinoonoratieditore.it)

via Vittorio Veneto, 20  
00020 Canterano (RM)  
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0621-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: gennaio 2018

*Dedico questo libro con affetto e riconoscenza alla memoria dei miei cari genitori: Paolo e Pina e alla memoria della mia cara moglie Lucia.*



# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>19</b>
<b>1 Spazi vettoriali e spazi vettoriali normati</b>	<b>21</b>
1.1 Definizioni Fondamentali . . . . .	21
1.2 Spazi vettoriali di dimensione finita . . . . .	25
1.2.1 Basi, componenti e isomorfismo . . . . .	26
1.2.2 Cambio di base . . . . .	30
1.3 Somma diretta e spazio fattoriale . . . . .	32
1.4 Prodotto tensoriale . . . . .	36
1.4.1 Un'applicazione: l'entanglement, il computer quantistico	39
1.5 Spazi topologici e spazi metrici . . . . .	45
1.6 Spazi vettoriali normati . . . . .	48
1.7 Nozioni di topologia in spazi normati . . . . .	51
1.7.1 Definizioni basilari . . . . .	52
1.7.2 Convergenza . . . . .	54
1.7.3 Compattezza . . . . .	57
1.8 Confronto di norme . . . . .	58
1.9 Sistemi completi . . . . .	60
1.10 Spazi di Banach . . . . .	61
1.11 Il principio delle contrazioni . . . . .	64

<b>2</b>	<b>Misura e integrazione</b>	<b>69</b>
2.1	Considerazioni introduttive . . . . .	69
2.2	Elementi della teoria della misura . . . . .	70
2.2.1	Famiglie di insiemi . . . . .	70
2.2.2	La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	72
2.2.3	La misura in generale . . . . .	73
2.2.4	La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e la misura di Lebesgue-Stieltjes . . . . .	76
2.3	Integrale di Lebesgue: una introduzione . . . . .	79
2.3.1	Integrale di Lebesgue su di un insieme di misura finita . . . . .	81
2.3.2	Passaggio al limite sotto il segno dell'integrale di Lebesgue . . . . .	84
2.3.3	Integrale di Lebesgue su di un insieme di misura infinita . . . . .	86
2.3.4	Prodotto di misure e teorema di Fubini-Tonelli . . . . .	87
2.3.5	Confronto dell'integrale di Lebesgue con l'integrale di Riemann . . . . .	88
2.4	Funzioni assolutamente continue . . . . .	89
2.5	Gli spazi $L^p$ . . . . .	92
2.5.1	Definizioni e principali proprietà . . . . .	93
2.5.2	Sottospazi densi in $L^p$ . . . . .	95
2.5.3	Relazioni di convergenza . . . . .	97
2.5.4	Relazioni di convergenza negli spazi $L^p$ . . . . .	98
2.6	Convoluzione . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Spazi euclidei</b>	<b>103</b>
3.1	Concetti fondamentali . . . . .	103
3.2	Vettori ortogonali . . . . .	108
3.3	Sistemi di vettori ortogonali . . . . .	109
3.3.1	I polinomi ortogonali classici . . . . .	112

3.4	Disuguaglianza di Bessel e serie di Fourier . . . . .	117
3.5	Il teorema di Riesz-Fischer . . . . .	120
3.6	Isomorfismo tra spazi euclidei . . . . .	123
3.7	Proiezioni ortogonali . . . . .	124
3.7.1	Calcolo della proiezione ortogonale di un vettore . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Operatori lineari</b> . . . . .	<b>129</b>
4.1	Proprietà generali degli operatori lineari . . . . .	129
4.2	Operazioni algebriche con gli operatori . . . . .	132
4.3	Operatori in spazi di dimensione finita . . . . .	134
4.3.1	Rappresentazione matriciale di un operatore . . . . .	134
4.3.2	Trasformazioni di similarità . . . . .	136
4.3.3	Proprietà invarianti . . . . .	138
4.3.4	Un'applicazione: l'esperimento con i fotoni polarizzati . . . . .	141
4.3.5	Rango e nullità . . . . .	143
4.4	Operatore inverso . . . . .	144
4.5	Operatori limitati e operatori non limitati . . . . .	147
4.6	Operatori chiusi . . . . .	152
4.7	Proprietà generali dei funzionali lineari . . . . .	154
4.8	Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert . . . . .	157
4.9	Lo spazio degli operatori limitati . . . . .	161
4.9.1	Serie di operatori . . . . .	163
4.9.2	Due serie notevoli di operatori limitati . . . . .	165
4.10	Operatore aggiunto di un operatore limitato . . . . .	168
4.11	Casi notevoli di operatori limitati . . . . .	172
4.11.1	Operatori di proiezione . . . . .	172
4.11.2	Proprietà degli operatori di proiezione ortogonali . . . . .	177
4.11.3	Operatori isometrici e operatori unitari . . . . .	183

4.11.4	Matrici unitarie . . . . .	185
4.11.5	Operatori integrali di Hilbert-Schmidt . . . . .	185
4.11.6	Operatori compatti . . . . .	187
<b>5</b>	<b>Serie di Fourier e trasformazioni integrali</b>	<b>191</b>
5.1	La serie trigonometrica di Fourier . . . . .	191
5.1.1	Altre forme della serie di Fourier . . . . .	199
5.2	Calcolo di serie di Fourier . . . . .	201
5.3	Metodo di Fourier . . . . .	204
5.3.1	La corda vibrante . . . . .	204
5.3.2	La propagazione del calore in una sbarra finita . . . . .	211
5.4	Integrale di Fourier . . . . .	218
5.4.1	Integrale di Fourier in forma complessa . . . . .	222
5.5	Trasformazione di Fourier nello spazio $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	223
5.5.1	Proprietà fondamentali . . . . .	225
5.6	Trasformazione di Fourier nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	231
5.7	Trasformazione di Fourier nello spazio $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	235
5.7.1	Confronto tra serie di Fourier e trasformazione di Fourier	237
5.8	Esempi e applicazioni . . . . .	238
5.8.1	Calcolo di trasformate di Fourier . . . . .	238
5.8.2	La propagazione del calore in una sbarra infinita . . . . .	241
5.9	Trasformazione di Laplace . . . . .	245
<b>6</b>	<b>Analisi spettrale I</b>	<b>251</b>
6.1	Analisi spettrale degli operatori in spazi di dimensione finita . . . . .	251
6.1.1	Autovalori e autovettori . . . . .	252
6.1.2	Operatori diagonalizzabili . . . . .	253
6.1.3	Criteri di diagonalizzabilità . . . . .	255

6.1.4	Rappresentazione spettrale . . . . .	257
6.1.5	Funzione di un operatore . . . . .	260
6.1.6	Diagonalizzazione di operatori auto-aggiunti . . . . .	261
6.1.7	Operatori che commutano . . . . .	264
6.1.8	Operatori normali . . . . .	266
6.2	Analisi spettrale degli operatori in spazi di dimensione infinita . . . . .	267
6.2.1	Concetti basilari . . . . .	268
6.2.2	Proprietà spettrali degli operatori chiusi e degli operatori limitati . . . . .	270
6.2.3	Proprietà spettrali degli operatori auto-aggiunti e limitati . . . . .	275
6.2.4	Proprietà spettrali degli operatori auto-aggiunti e non limitati . . . . .	280
6.2.5	Un esempio: lo spettro dell'operatore posizione . . . . .	281
6.3	Analisi spettrale degli operatori compatti . . . . .	283
6.3.1	Proprietà spettrali degli operatori compatti . . . . .	283
6.3.2	Proprietà spettrali degli operatori compatti e auto-aggiunti . . . . .	284
6.3.3	Rappresentazione spettrale di un operatore compatto e auto-aggiunto . . . . .	289
<b>7</b>	<b>Equazioni integrali</b>	<b>295</b>
7.1	Introduzione . . . . .	295
7.2	Classificazione delle equazioni integrali lineari . . . . .	296
7.3	Equazioni normalmente solubili . . . . .	298
7.4	I teoremi di Fredholm . . . . .	302
7.5	Metodi esatti per la risoluzione di un'equazione integrale . . . . .	307
7.5.1	Equazioni di Fredholm con nucleo degenere . . . . .	307
7.5.2	Equazioni di Fredholm con nucleo di Hilbert-Schmidt simmetrico . . . . .	309

7.5.3	Equazioni integrali di convoluzione . . . . .	311
7.5.4	Risoluzione tramite il principio delle contrazioni . . . . .	313
7.5.5	Risoluzione tramite la serie di Neumann . . . . .	316
7.5.6	Metodo dei determinanti di Fredholm . . . . .	320
7.6	Metodi di risoluzione approssimata di un'equazione integrale . . . . .	322
7.6.1	Sostituzione del nucleo dato con uno degenere . . . . .	322
7.6.2	Sostituzione dell'integrale con una somma finita . . . . .	323
7.7	Risoluzione di alcune equazioni integrali . . . . .	324
<b>8</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie ed equazioni integrali</b>	<b>333</b>
8.1	Relazione tra i problemi di Cauchy e le equazioni integrali di Volterra . . . . .	333
8.2	Problemi di Sturm-Liouville . . . . .	335
8.3	Operatore di Sturm-Liouville . . . . .	338
8.4	Significato e proprietà della funzione di Green . . . . .	339
8.5	Funzione di Green di un operatore di Sturm-Liouville . . . . .	341
8.6	Problemi di Sturm-Liouville ed equazioni integrali di Fredholm . . . . .	345
8.7	Autovalori e autofunzioni di un operatore di Sturm-Liouville . . . . .	346
8.8	Alcuni esercizi . . . . .	349
<b>9</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>355</b>
9.1	Introduzione . . . . .	355
9.2	Spazi di funzioni fondamentali . . . . .	357
9.3	Lo spazio delle funzioni di prova $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .	358
9.4	Lo spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	359
9.5	Operazioni elementari . . . . .	361
9.6	Distribuzioni regolari . . . . .	364
9.7	Distribuzioni singolari . . . . .	365

9.7.1	Le formule di Sochockij . . . . .	369
9.8	Rappresentazioni della delta di Dirac . . . . .	370
9.9	Prodotto di distribuzioni . . . . .	372
9.10	Derivate di una distribuzione . . . . .	373
9.11	Prodotto diretto e convoluzione di distribuzioni . . . . .	376
9.12	Alcune proprietà della convoluzione e alcuni esempi . . . . .	379
9.13	Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni di prova di Schwartz . . . . .	381
9.14	Lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	383
9.15	Trasformazione di Fourier nello spazio $\mathcal{S}'$ . . . . .	387
9.16	Proprietà della trasformazione di Fourier nello spazio $\mathcal{S}'$ . . . . .	390
<b>10</b>	<b>Equazioni differenziali alle derivate parziali</b>	<b>393</b>
10.1	Introduzione . . . . .	393
10.2	Alcune equazioni della fisica matematica . . . . .	395
10.3	Classificazione delle equazioni del secondo ordine in $n$ variabili . . . . .	398
10.4	Superfici caratteristiche . . . . .	402
10.5	Forme canoniche per le equazioni in due variabili . . . . .	405
10.6	Problemi con condizioni iniziali e con condizioni al contorno . . . . .	411
10.7	Il teorema di Cauchy-Kovalevskaya . . . . .	414
10.8	Soluzioni generalizzate di equazioni differenziali lineari . . . . .	420
10.9	Soluzioni fondamentali di alcuni operatori . . . . .	424
10.9.1	Operatore di Helmholtz . . . . .	424
10.9.2	Operatore di d'Alembert . . . . .	430
10.9.3	Operatore differenziale ordinario . . . . .	432
10.9.4	Operatore della diffusione . . . . .	433
10.10	Equazione di Laplace . . . . .	435
10.10.1	Le funzioni armoniche . . . . .	436
10.10.2	Le funzioni sferiche . . . . .	438

10.10.3	Problemi di autovalori per l'operatore di Laplace in domini non limitati . . . . .	441
10.10.4	Problemi di autovalori per l'operatore di Laplace in domini limitati . . . . .	446
10.11	Equazione di Helmholtz . . . . .	452
10.11.1	Un esempio: lo scattering da potenziale in meccanica quantistica . . . . .	458
10.12	Problemi di Dirichlet . . . . .	462
10.13	Equazione di d'Alembert . . . . .	466
10.13.1	Onde piane e onde sferiche . . . . .	466
10.13.2	Onde non dispersive e onde dispersive . . . . .	469
10.13.3	Potenziale ritardato . . . . .	470
10.13.4	Il problema di Cauchy per l'equazione di d'Alembert . . . . .	473
10.13.5	La formula di d'Alembert . . . . .	475
10.14	Equazione del calore . . . . .	479
10.14.1	Potenziali di calore . . . . .	480
10.14.2	Il problema di Cauchy per l'equazione del calore . . . . .	481
<b>11</b>	<b>Auto-aggiuntezza nel caso degli operatori non limitati</b>	<b>485</b>
11.1	Operatore aggiunto di un operatore non limitato . . . . .	486
11.2	Operatori simmetrici e operatori auto-aggiunti . . . . .	488
11.3	Alcuni criteri di auto-aggiuntezza . . . . .	492
11.4	Trasformazione di Cayley . . . . .	494
11.5	Qualche esempio . . . . .	495
11.6	Auto-aggiuntezza di operatori della meccanica quantistica . . . . .	499
11.6.1	Operatore posizione e operatore impulso . . . . .	499
11.6.2	Auto-aggiuntezza di alcuni operatori di Schrödinger . . . . .	502

<b>12 Analisi spettrale II</b>	<b>507</b>
12.1 Misure spettrali, famiglie spettrali e misure complesse . . . . .	508
12.2 Operatore auto-aggiunto determinato da una famiglia spettrale .	510
12.3 Funzioni di un operatore auto-aggiunto . . . . .	516
12.4 Il teorema spettrale . . . . .	519
12.5 Famiglia spettrale e spettro di un operatore auto-aggiunto . . .	521
12.6 Un'applicazione: la dinamica quantistica . . . . .	526
<b>13 Calcolo dello spettro discreto di un operatore auto-aggiunto</b>	<b>533</b>
13.1 Il metodo perturbativo . . . . .	534
13.1.1 Teoria regolare delle perturbazioni . . . . .	535
13.1.2 Teoria asintotica delle perturbazioni . . . . .	539
13.2 Il metodo variazionale . . . . .	540
13.2.1 Il metodo di Rayleigh-Ritz . . . . .	541
13.2.2 Approssimazioni per difetto . . . . .	548
13.2.3 Il metodo del gradiente . . . . .	551
<b>14 Sulla formulazione matematica della meccanica quantistica</b>	<b>563</b>
14.1 Introduzione . . . . .	563
14.2 Assiomi e origini del linguaggio matematico . . . . .	566
14.3 Alcune considerazioni preliminari . . . . .	569
14.4 Spazio degli stati e spazi di Hilbert attrezzati . . . . .	571
14.5 Qualche semplice esempio . . . . .	576
<b>Bibliografia</b>	<b>579</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>585</b>



# Prefazione

Il libro contiene, riveduto e ampliato, il materiale delle lezioni di metodi matematici della fisica che l'autore ha tenuto per quasi un trentennio nei corsi di laurea in fisica presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Catania. Gli argomenti sono stati scelti seguendo due criteri. Il primo ha una motivazione didattica istituzionale: trattare buona parte dei concetti e dei metodi matematici che dovrebbero essere patrimonio comune di ogni fisico, indipendentemente dai suoi specifici interessi. Questo fatto ha portato alla trattazione del seguente spettro di argomenti: algebra lineare, elementi della teoria della misura e dell'integrazione, operatori, spazi vettoriali, serie di Fourier, trasformazioni integrali, equazioni integrali, problemi di Sturm-Liouville ed equazioni alle derivate parziali. Questi argomenti sono rivolti agli studenti dei corsi di laurea triennale e magistrale. Il secondo criterio ha una motivazione culturale. È ben noto, come von Neumann indicò per primo, che il formalismo matematico della meccanica quantistica, per essere rigoroso, deve fondarsi sull'analisi funzionale. Tuttavia, il linguaggio dell'analisi funzionale stenta a diventare usuale tra i fisici e gran parte dei libri di testo di meccanica quantistica usa ancora oggi il formalismo, elegante ma carente di rigore, che Dirac introdusse quasi 90 anni fa. Questo fatto costituisce una anacronistica lacuna che, come sottolineato nel testo, ha conseguenze non solo di tipo formale ma anche di natura sostanziale. Con la speranza di avvicinare le giovani generazioni ai concetti ed ai metodi dell'analisi funzionale che risultano importanti in meccanica quantistica, vengono trattati anche argomenti avanzati come teoria delle distribuzioni, criteri di auto-aggiuntezza, analisi spettrale, metodi di calcolo dello spettro di operatori hamiltoniani ed elementi della teoria degli spazi di Hilbert attrezzati. Questi argomenti sono rivolti a studenti, dottorandi e giovani ricercatori che abbiano uno specifico interesse per il formalismo matematico della meccanica quantistica. In coerenza con quanto detto sopra, tutti gli argomenti sono esposti rispettando il rigore matematico. Tuttavia, tenendo presente che il libro è rivolto a fisici e che esso tratta numerosi argomenti, è stata scelta una presentazione che dà di ogni argomento una dettagliata informazione di base e che riporta solo le dimostrazioni ritenute più significative.

Per le dimostrazioni molto tecniche o di prevalente interesse matematico e per approfondimenti, vengono suggeriti vari riferimenti specializzati. A scopo didattico-illustrativo, il libro presenta anche vari esercizi svolti e varie applicazioni ad alcuni problemi classici della fisica matematica e a certi problemi della meccanica quantistica. Le numerose note bibliografiche, riguardanti i padri della scienza citati nel testo, sottolineano volutamente la loro vicenda umana che li rende più vicini a noi.

L'autore si augura che il libro possa risultare di qualche utilità agli studenti e a quanti lo vogliono prendere in considerazione e sarà grato a chiunque segnali errori e omissioni.

Si ringraziano i tanti studenti, che con le loro osservazioni, i loro dubbi e le loro idee hanno contribuito grandemente a migliorare la stesura del testo e a eliminare alcuni errori. Si ringraziano Pedro Goldman, Renzo Mosetti e Domenico Stanzial per la lettura del manoscritto. Un ringraziamento particolare va a Giuliano Schiffrer, che con numerose discussioni e con le sue dispense del corso di Metodi Matematici della Fisica, tenuto da lui presso l'Università di Ferrara, ha ispirato questo lavoro.

Catania, novembre 2017

*Giacomo Fonte*

## Capitolo 1

# Spazi vettoriali e spazi vettoriali normati

Si consideri un campo di forze in una certa regione dello spazio ordinario. Noi sappiamo che tale campo può essere descritto introducendo il concetto di vettore. Creando in questa regione un ulteriore campo di forze della stessa natura, si ha alla fine un campo di forza risultante, che è descritto da un campo di vettori somma dei due campi vettoriali precedenti. Tale proprietà dei campi di forza viene chiamata *linearità*. Essa non è goduta da tutti i fenomeni fisici, però è molto comune. Ad esempio, molti fenomeni elettromagnetici, processi di diffusione, propagazione delle funzioni d'onda della meccanica quantistica etc., risultano essere, in certe situazioni (assenza di sorgenti, condizioni al contorno omogenee o assenti), processi lineari. In pratica questo significa che se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono due funzioni che sono le descrizioni di due possibili manifestazioni di un certo fenomeno, allora  $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , con  $c_1$  e  $c_2$  in generale numeri complessi, rappresenta ancora la descrizione di una manifestazione del fenomeno considerato. È pertanto importante studiare in astratto le proprietà matematiche di enti che godono della linearità. Tali enti vengono chiamati *vettori* e sono la generalizzazione dell'usuale concetto di vettore.

### 1.1 Definizioni Fondamentali

**Definizione 1.1** Sia  $\mathbb{F}$  un campo ([1], p. 44) con elementi  $\alpha, \beta, \dots$  detti scalari e con elemento neutro dell'addizione  $0$  e con elemento neutro del prodotto  $1$ . Allora un insieme  $X$  di elementi  $x, y, z, \dots$  viene chiamato spazio vettoriale su

$\mathbb{F}$  e i suoi elementi vengono chiamati vettori<sup>1</sup> se:

- a) È definita una operazione, detta somma, che ad ogni coppia di elementi  $x, y \in X$  fa corrispondere un unico elemento  $x + y \in X$ .
- b) È definita una operazione, detta prodotto, che ad ogni coppia  $\lambda, x$ , ove  $\lambda \in \mathbb{F}$  e  $x \in X$ , fa corrispondere un unico elemento  $\lambda x \in X$ .
- c) Esiste in  $X$  un unico elemento  $\emptyset$ , che chiamiamo vettore nullo, tale che:  $x + \emptyset = x, \forall x \in X$ .
- d) Le suddette operazioni di somma e prodotto soddisfano le proprietà:
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$  e  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ,  $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$  (proprietà associative).
  - $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  e  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ,  $\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$  (proprietà distributive).
  - $x + y = y + x$ ,  $\forall x, y \in X$  (proprietà commutativa).
  - $1x = x$ .

**Nota 1.1** I casi di  $\mathbb{F}$  più importanti sono quando  $\mathbb{F}$  coincide con il campo dei complessi  $\mathbb{C}$  o con il campo dei reali  $\mathbb{R}$ . In corrispondenza a ciò, gli spazi vettoriali si possono distinguere in *spazi vettoriali complessi* e in *spazi vettoriali reali*. Noi assumeremo sempre  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , e pertanto gli spazi vettoriali che considereremo saranno sempre spazi complessi. Tuttavia per brevità, li chiameremo semplicemente *spazi vettoriali* anziché *spazi vettoriali complessi*.

□

A partire dai punti **c)** e **d)** è possibile mostrare ([2], p. 69) i seguenti corollari:

- $0x = \emptyset, \forall x \in X$ .
- Per ogni vettore  $x \in X$  esiste un unico vettore  $\tilde{x} \in X$  tale che  $x + \tilde{x} = \emptyset$ . L'elemento  $\tilde{x}$  risulta essere  $(-1)x$ . Esso viene semplicemente denotato con  $-x$  e chiamato *opposto* di  $x$ .

<sup>1</sup>A seconda dei casi, i vettori di  $X$  verranno anche chiamati *elementi* di  $X$  o *punti* di  $X$ . La parola vettore deriva dal latino *vehere* (trasportare, spostare) e fa riferimento al fatto che inizialmente i vettori vennero introdotti per descrivere spostamenti nello spazio.

- Per ogni coppia di vettori  $x, y \in X$ , esiste un unico vettore  $z$  tale che  $z + y = x$ . Il vettore  $z$  viene chiamato *differenza* di  $x$  e  $y$ . Esso risulta essere  $x + (-1)y$  e viene denotato semplicemente con  $x - y$ .
- $x = y$  se e solo se  $x - y = \emptyset$ .
- $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ ;  $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ .

Inoltre, come visto facilmente, si ha per  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\forall x, y \in X$ :

- $\alpha \emptyset = \emptyset$ .
- Se  $\alpha x = \emptyset$  e  $\alpha \neq 0$ , allora  $x = \emptyset$ .
- Se  $\alpha x = \alpha y$  e  $\alpha \neq 0$ , allora  $x = y$ .
- Se  $\alpha x = \emptyset$  e  $x \neq \emptyset$ , allora  $\alpha = 0$ .
- Se  $\alpha x = \beta x$  e  $x \neq \emptyset$ , allora <sup>2</sup>  $\alpha = \beta$ .

**Esempio 1.1** Sia  $\mathbb{C}^n$  l'insieme di tutte le  $n$ -uple ordinate  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  di numeri complessi. Allora  $\mathbb{C}^n$  costituisce uno spazio vettoriale, se la somma di due  $n$ -uple è definita da

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n),$$

e il prodotto di un numero  $\alpha \in \mathbb{C}$  per una  $n$ -upla da

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots, \alpha\xi_n).$$

L'elemento  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  sarà chiamato *vettore* di  $\mathbb{C}^n$ . Nel caso che le  $n$ -uple  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  siano costituite da numeri reali ed  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , lo spazio vettoriale risultante sarà reale e verrà denotato con  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.2** Sia  $\mathbb{M}_{m,n}$  l'insieme di tutte le matrici con  $m$  righe e con  $n$  colonne ad elementi complessi. Assumendo come somma degli elementi di  $\mathbb{M}_{m,n}$  l'usuale somma di matrici e come prodotto di un elemento di  $\mathbb{M}_{m,n}$  con un numero  $\alpha \in \mathbb{C}$  l'usuale prodotto di una matrice per un numero complesso, si ha che l'insieme  $\mathbb{M}_{m,n}$  costituisce uno spazio vettoriale. Si noti che i "vettori" di tale spazio sono matrici.

---

<sup>2</sup>D'ora in avanti, denoteremo con lo stesso simbolo  $0$  sia il vettore nullo di uno spazio vettoriale sia lo zero del campo  $\mathbb{C}$ . La differenza sarà chiara dal contesto.