EUREKA
BASIC

ASPETTI MATEMATICI DELLA FISICA TEORICA

2

EUREKA
BASIC

ASPETTI MATEMATICI DELLA FISICA TEORICA

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

Albert Einstein

Il XX secolo ha conosciuto uno straordinario sviluppo della Fisica teorica e della Matematica, tale da non avere precedenti. Le due discipline si sono mutuamente influenzate come mai era accaduto prima e l'una si è fatta volano per i progressi dell'altra. Se da un lato la relatività generale e la meccanica quantistica hanno indotto i fisici teorici a confrontarsi con un alto livello di sofisticazione matematica, dall'altro le domande poste dalle moderne teorie quantistiche di campo e dalla teoria delle stringhe hanno aperto nuove entusiasmanti direzioni nella ricerca matematica.

Eureka pubblica monografie e saggi che trattano la Fisica matematica e gli aspetti matematici della Fisica teorica con l'obiettivo di gettare un solido ponte tra le discipline. La serie "Basics" affronta tematiche più elementari, privilegiando però prospettive nuove e inusitate che offrano uno sguardo differente rispetto alle tradizioni didattiche più consolidate. La serie "Advanced" invece è riservata a monografie specialistiche su temi al centro della ricerca contemporanea e intende caratterizzarsi per la cura del dettaglio matematico, la profondità concettuale e la chiarezza espositiva.

Vai al contenuto multimediale

Giacomo Fonte

Appunti di metodi matematici della fisica

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0621-1

I edizione: gennaio 2018

Dedico questo libro con affetto e riconoscenza alla memoria dei miei cari genitori: Paolo e Pina e alla memoria della mia cara moglie Lucia.

Indice

Prefazione

Il libro contiene, riveduto e ampliato, il materiale delle lezioni di metodi matematici della fisica che l'autore ha tenuto per quasi un trentennio nei corsi di laurea in fisica presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Catania. Gli argomenti sono stati scelti seguendo due criteri. Il primo ha una motivazione didattica istituzionale: trattare buona parte dei concetti e dei metodi matematici che dovrebbero essere patrimonio comune di ogni fisico, indipendentemente dai suoi specifici interessi. Questo fatto ha portato alla trattazione del seguente spettro di argomenti: algebra lineare, elementi della teoria della misura e dell'integrazione, operatori, spazi vettoriali, serie di Fourier, trasformazioni integrali, equazioni integrali, problemi di Sturm-Liouville ed equazioni alle derivate parziali. Questi argomenti sono rivolti agli studenti dei corsi di laurea triennale e magistrale. Il secondo criterio ha una motivazione culturale. È ben noto, come von Neumann indicò per primo, che il formalismo matematico della meccanica quantistica, per essere rigoroso, deve fondarsi sull'analisi funzionale. Tuttavia, il linguaggio dell'analisi funzionale stenta a diventare usuale tra i fisici e gran parte dei libri di testo di meccanica quantistica usa ancora oggi il formalismo, elegante ma carente di rigore, che Dirac introdusse quasi 90 anni fa. Questo fatto costituisce una anacronistica lacuna che, come sottolineato nel testo, ha conseguenze non solo di tipo formale ma anche di natura sostanziale. Con la speranza di avvicinare le giovani generazioni ai concetti ed ai metodi dell'analisi funzionale che risultano importanti in meccanica quantistica, vengono trattati anche argomenti avanzati come teoria delle distribuzioni, criteri di auto-aggiuntezza, analisi spettrale, metodi di calcolo dello spettro di operatori hamiltoniani ed elementi della teoria degli spazi di Hilbert attrezzati. Questi argomenti sono rivolti a studenti, dottorandi e giovani ricercatori che abbiano uno specifico interesse per il formalismo matematico della meccanica quantistica. In coerenza con quanto detto sopra, tutti gli argomenti sono esposti rispettando il rigore matematico. Tuttavia, tenendo presente che il libro è rivolto a fisici e che esso tratta numerosi argomenti, è stata scelta una presentazione che dà di ogni argomento una dettagliata informazione di base e che riporta solo le dimostrazioni ritenute più significative.

Per le dimostrazioni molto tecniche o di prevalente interesse matematico e per approfondimenti, vengono suggeriti vari riferimenti specializzati. A scopo didattico-illustrativo, il libro presenta anche vari esercizi svolti e varie applicazioni ad alcuni problemi classici della fisica matematica e a certi problemi della meccanica quantistica. Le numerose note bibliografiche, riguardanti i padri della scienza citati nel testo, sottolineano volutamente la loro vicenda umana che li rende più vicini a noi.

L'autore si augura che il libro possa risultare di qualche utilità agli studenti e a quanti lo vogliano prendere in considerazione e sarà grato a chiunque segnali errori e omissioni.

Si ringraziano i tanti studenti, che con le loro osservazioni, i loro dubbi e le loro idee hanno contribuito grandemente a migliorare la stesura del testo e a eliminare alcuni errori. Si ringraziano Pedro Goldman, Renzo Mosetti e Domenico Stanzial per la lettura del manoscritto. Un ringraziamento particolare va a Giuliano Schiffrer, che con numerose discussioni e con le sue dispense del corso di Metodi Matematici della Fisica, tenuto da lui presso l'Università di Ferrara, ha ispirato questo lavoro.

Catania, novembre 2017 *Giacomo Fonte*

Capitolo 1

Spazi vettoriali e spazi vettoriali normati

Si consideri un campo di forze in una certa regione dello spazio ordinario. Noi sappiamo che tale campo può essere descritto introducendo il concetto di vettore. Creando in questa regione un ulteriore campo di forze della stessa natura, si ha alla fine un campo di forza risultante, che è descritto da un campo di vettori somma dei due campi vettoriali precedenti. Tale proprietà dei campi di forza viene chiamata *linearità*. Essa non è goduta da tutti i fenomeni fisici, però è molto comune. Ad esempio, molti fenomeni elettromagnetici, processi di diffusione, propagazione delle funzioni d'onda della meccanica quantistica etc., risultano essere, in certe situazioni (assenza di sorgenti, condizioni al contorno omogenee o assenti), processi lineari. In pratica questo significa che se ψ_1 e ψ_2 sono due funzioni che sono le descrizioni di due possibili manifestazioni di un certo fenomeno, allora $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, con c_1 e c_2 in generale numeri complessi, rappresenta ancora la descrizione di una manifestazione del fenomeno considerato. È pertanto importante studiare in astratto le proprietà matematiche di enti che godono della linearità. Tali enti vengono chiamati *vettori* e sono la generalizzazione dell'usuale concetto di vettore.

1.1 Definizioni Fondamentali

Definizione 1.1 *Sia* $\mathbb{F}$ *un campo* ([1], p. 44) *con elementi* $\alpha, \beta, \ldots$ *detti scalari e con elemento neutro dell'addizione* 0 *e con elemento neutro del prodotto* 1. *Allora un insieme* X *di elementi* $x, y, z, \ldots$ *viene chiamato* spazio vettoriale *su*

$\mathbb{F}$ *e i suoi elementi vengono chiamati* vettori[1] *se:*

a) *È definita una operazione, detta* somma, *che ad ogni coppia di elementi* $x, y \in X$ *fa corrispondere un unico elemento* $x + y \in X$.

b) *È definita una operazione, detta* prodotto, *che ad ogni coppia* λ, x, *ove* $\lambda \in \mathbb{F}$ *e* $x \in X$, *fa corrispondere un unico elemento* $\lambda x \in X$.

c) *Esiste in* X *un unico elemento* $\emptyset$, *che chiamiamo* vettore nullo, *tale che:* $x + \emptyset = x, \forall x \in X$.

d) *Le suddette operazioni di somma e prodotto soddisfano le proprietà:*

- $(x + y) + z = x + (y + z)$ *e* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall x, y, z \in X$, $\forall \alpha, \beta, \in \mathbb{F}$ (proprietà associative).
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *e* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha, \beta, \in \mathbb{F}$ (proprietà distributive).
- $x + y = y + x$, $\forall x, y \in X$ (proprietà commutativa).
- $1x = x$.

Nota 1.1 I casi di $\mathbb{F}$ più importanti sono quando $\mathbb{F}$ coincide con il campo dei complessi $\mathbb{C}$ o con il campo dei reali $\mathbb{R}$. In corrispondenza a ciò, gli spazi vettoriali si possono distinguere in *spazi vettoriali complessi* e in *spazi vettoriali reali.* Noi assumeremo sempre $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, e pertanto gli spazi vettoriali che considereremo saranno sempre spazi complessi. Tuttavia per brevità, li chiameremo semplicemente *spazi vettoriali* anziché *spazi vettoriali complessi.*

□

A partire dai punti **c)** e **d)** è possibile mostrare ([2], p. 69) i seguenti corollari:

- $0x = \emptyset$, $\forall x \in X$.
- Per ogni vettore $x \in X$ esiste un unico vettore $\widetilde{x} \in X$ tale che $x + \widetilde{x} = \emptyset$. L'elemento $\widetilde{x}$ risulta essere $(-1)x$. Esso viene semplicemente denotato con $-x$ e chiamato *opposto* di x.

[1] A seconda dei casi, i vettori di X verranno anche chiamati *elementi* di X o *punti* di X. La parola vettore deriva dal latino *vehere* (trasportare, spostare) e fa riferimento al fatto che inizialmente i vettori vennero introdotti per descrivere spostamenti nello spazio.

- Per ogni coppia di vettori $x, y \in X$, esiste un unico vettore z tale che $z + y = x$. Il vettore z viene chiamato *differenza* di x e y. Esso risulta essere $x + (-1)y$ e viene denotato semplicemente con $x - y$.
- $x = y$ se e solo se $x - y = \emptyset$.
- $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$; $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Inoltre, come visto facilmente, si ha per $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\forall x, y \in X$:

- $\alpha\emptyset = \emptyset$.
- Se $\alpha x = \emptyset$ e $\alpha \neq 0$, allora $x = \emptyset$.
- Se $\alpha x = \alpha y$ e $\alpha \neq 0$, allora $x = y$.
- Se $\alpha x = \emptyset$ e $x \neq \emptyset$, allora $\alpha = 0$.
- Se $\alpha x = \beta x$ e $x \neq \emptyset$, allora [2] $\alpha = \beta$.

Esempio 1.1 Sia $\mathbb{C}^n$ l'insieme di tutte le n-uple ordinate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ di numeri complessi. Allora $\mathbb{C}^n$ costituisce uno spazio vettoriale, se la somma di due n-uple è definita da

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$

e il prodotto di un numero $\alpha \in \mathbb{C}$ per una n-upla da

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n).$$

L'elemento $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ sarà chiamato *vettore* di $\mathbb{C}^n$. Nel caso che le n-uple $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ siano costituite da numeri reali ed $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, lo spazio vettoriale risultante sarà reale e verrà denotato con $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.2 Sia $\mathbb{M}_{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici con m righe e con n colonne ad elementi complessi. Assumendo come somma degli elementi di $\mathbb{M}_{m,n}$ l'usuale somma di matrici e come prodotto di un elemento di $\mathbb{M}_{m,n}$ con un numero $\alpha \in \mathbb{C}$ l'usuale prodotto di una matrice per un numero complesso, si ha che l'insieme $\mathbb{M}_{m,n}$ costituisce uno spazio vettoriale. Si noti che i "vettori" di tale spazio sono matrici.

[2] D'ora in avanti, denoteremo con lo stesso simbolo 0 sia il vettore nullo di uno spazio vettoriale sia lo zero del campo $\mathbb{C}$. La differenza sarà chiara dal contesto.