Aoi

Vai al contenuto multimediale

Roberto Caimmi
Alberto Franzon
Stefano Tognon

Intervalli musicali nella scala temperata a 12 note

Interpretazione geometrica

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0615-0

I edizione: ottobre 2017

Indice

Introduzione

La musica, in linea di principio, può essere composta di note di frequenza arbitraria, che si originano in seguito a vibrazioni meccaniche. Per tale motivo, la frequenza si misura solitamente in Hertz (Hz), dove il valore unitario corrisponde a un periodo di vibrazione pari a un secondo. Nella musica occidentale moderna, si è consolidato l'uso di dodici note (semitoni) per ottava, dove le relative frequenze si stabiliscono in corrispondenza a un valore convenzionale, $\nu_{\mathrm{RN}} = \nu_{\mathrm{A4}} = 440\mathrm{Hz}$, assegnato a una nota di riferimento, RN = A4. Ogni nota è separata dalla nota di riferimento per un numero intero di semitoni.

La distanza in frequenza tra la nota considerata e la nota di riferimento è espressa da un numero intero k, positivo o negativo a seconda che la frequenza della nota considerata sia superiore o inferiore alla frequenza della nota di riferimento. Nell'ipotesi di scala temperata (o a temperamento equabile), la frequenza della nota considerata si esprime nella maniera:

$$\nu = 2^{k/12}\nu_{\mathrm{RN}}; \tag{0.1}$$

dove ν_{RN} è la frequenza della nota di riferimento.

Nel caso particolare in cui la distanza in frequenza corrisponde a un numero intero di ottave, $k = 12k_{\mathrm{O}}$, essendo $k_{\mathrm{O}} > 0$ il numero di ottave a frequenza crescente oppure $k_{\mathrm{O}} < 0$ il numero di ottave a frequenza decrescente, la (0.1) si riduce a:

$$\nu = 2^{12k_{\mathrm{O}}/12}\nu_{\mathrm{RN}} = 2^{k_{\mathrm{O}}}\nu_{\mathrm{RN}}; \tag{0.2}$$

che in presenza di una sola ottava ($k_{\mathrm{O}} = \mp 1$) comporta un fattore pari a $2^{\mp 1}$. Ne discende che ogni salto di ottava comporta un dimezzamento oppure un raddoppiamento della frequenza originale.

La presenza del termine esponenziale nell'espressione della frequenza, data dalla (0.1), comporta l'esigenza di una più conveniente scala logaritmica. A questo scopo, ogni semitono della scala temperata viene suddiviso in 100 parti uguali, denominate cent, di modo che il salto di ottava equivale a 1200 cent, ossia una variazione di frequenza per un fattore pari a 2. Per definizione, $1\,\text{cent} = 2^{1/1200} \approx 1,000578$. In corrispondenza, si può definire una frequenza logaritmica nella maniera, cfr. [1]:

$$p = 60 + 12(\log_2 \nu - \log_2 \nu_{\text{RN}}); \tag{0.3}$$

dove RN = C4 denota la C di mezzo, ν_{RN} la frequenza (ordinaria) corrispondente, e $p_{\text{RN}} = 60$, è la tonalità della nota di riferimento. In generale, la tonalità è una frequenza misurata in scala logaritmica. La lettera che la denomina (C, E, G, ...) o classe di tonalità, si riferisce ad ogni tonalità che differisce per un numero intero di ottave da quella considerata.

Più in dettaglio, si instaura una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi costituiti dalle frequenze delle note e dai numeri interi, rispettivamente, dove alla frequenza della nota di riferimento (C4 nel caso in esame) si associa il numero intero nullo, alle frequenze inferiori e superiori i numeri interi negativi e positivi, rispettivamente.

L'insieme costituito dalle infinite tonalità, espresse dalla (0.3), ad opera della relazione binaria costituita dall'addizione o sottrazione di frequenze pari al salto di ottava, si può ripartire in classi di equivalenza, dove gli elementi appartenenti a una data classe presentano frequenze che differiscono tra loro per multipli interi di un'ottava. Le classi di equivalenza sono in numero di 12, dato che nella scala temperata l'ottava è suddivisa in 12 semitoni identici.

In generale, si definisce scala musicale una sequenza di tonalità (in particolare, di intervalli musicali) all'interno di un'ottava, il cui numero necessariamente non può superare 12. L'insieme delle scale musicali con cardinalità (nella fattispecie, numero di tonalità o in particolare, numero di intervalli musicali) assegnata, può essere ripartito in classi ad opera di opportune relazioni di equivalenza. Ad esempio, le classi di scale musicali trasposte, T_n, sono definite in seguito alle permutazioni circolari dei relativi elementi, dove ogni classe di equivalenza reca necessariamente n elementi; le classi di scale musicali riflesse, T_nI, sono definite in seguito all'inversione di ciascuna scala musicale appartenente a una data classe T_n, dove ciascuna classe di equivalenza reca necessariamente n elementi; le classi di scale musicali trasposte e riflesse, T_n/T_nI, si ottengono dall'unione di una classe T_n e della relativa classe T_nI, dove ciascuna classe di equivalenza reca necessariamente $n + n = 2n$ elementi. Nel seguito, per economia di notazione, ci si riferirà alle scale musicali con cardinalità n come alle n-scale.

È fondamentale sottolineare che ogni scala musicale viene caratterizzata da una sequenza specificata di intervalli musicali (toni e semitoni) posti tra note contigue. Conformemente alla frequenza logaritmica espressa dalla (0.3), la distanza in frequenza corrispondente a un semitono, a un tono, a un'ottava, è data da 1 (100 cent), 2 (200 cent), 12 (1200 cent), rispettivamente. Sotto questo aspetto, una scala musicale di cardinalità n si può considerare come una n-upla ordinata, i cui elementi sono costituiti da distanze in frequenza di intervalli musicali, $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$, dove $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, sono numeri naturali e la condizione al contorno:

$$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n = 12; \qquad 1 \leqslant n \leqslant 12; \tag{0.4}$$

è valida per le scale musicali temperate a 12 note. Nell'ambito di un'interpretazione geometrica, gli elementi della n-upla ordinata che rappresenta una data scala musicale, si possono interpretare alla stregua di coordinate di punti, $P_n \equiv (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$, appartenenti a uno spazio a n dimensioni, o n-spazio, euclideo, $\Re^n$.

Nell'ambito della scala temperata a 12 note, il conteggio degli intervalli musicali in multipli di semitoni, in particolare delle classi di scale musicali di cardinalità data, o delle classi di scale musicali definite da relazioni di equivalenza assegnate, è di lunga data ed è stato trattato da un numero considerevole di ricercatori afferenti alla teoria della musica o alla matematica, cfr. [2][3], dove una particolare attenzione è stata rivolta al numero di classi T_n, a motivo di una maggiore semplicità nella trattazione, cfr. [4][5][6].

Sotto questo aspetto, riesce utile sottolineare che il calcolo combinatorio non è ad esclusivo uso musicale: la stessa metodologia si applica a svariati problemi, quali la numerazione degli isomeri in chimica, la distribuzione del momento angolare intrinseco in un sistema di particelle identiche in fisica, e in tutta generalità l'analisi dell'isomorfismo in classi di elementi, cfr. [7][8]. La via più elegante per effettuare i conteggi menzionati è costituita dal metodo di Polya–Burnside, che è stato applicato per la prima volta in teoria della musica circa trenta anni fa, cfr. [9].

Sia le classi di tonalità, sia le classi T_n, di cardinalità assegnata ($1 \leqslant n \leqslant 12$), sono ben conosciute da chi tratta la teoria della musica, ma il conteggio delle varie classi, in assenza di una profonda conoscenza della teoria dei gruppi, viene effettuato mediante l'utilizzo di tabelle dove compaiono tutte le configurazioni, cfr. [10][4][5][11][12]. Una via intermedia tra i casi estremi sopra menzionati consiste nell'utilizzo del calcolo combinatorio e fornisce un certo numero di semplici applicazioni in teoria della musica, tra cui il conteggio delle classi di tonalità, cfr. [13][14][16]. Un approccio di questo tipo può risultare utile nel chiarire alcuni aspetti che si rivelano essenziali nella teoria dei gruppi, spianando in tal modo la via verso tipi di indagine più approfonditi, cfr. [15] Cap. 9 [16][18].

In questa ottica, la presente monografia si limita al caso più semplice di classi T_n e T_n/T_nI, con riferimento a n–scale che vanno dal salto di ottava, $\{12\}$, alla scala cromatica, $\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$, dove pertanto la somma degli intervalli musicali in multipli di semitoni è uguale a 12, conformemente alla (0.4). I risultati ottenuti sono già noti in letteratura, cfr. [9][15] Cap. 9 [16][17][18][19][20], ma l'esposizione e la metodologia sono più facilmente accessibili ai cultori della teoria della musica e, ultimo ma non da meno, potrebbero suscitare interesse nei confronti della teoria dei gruppi di per sé. Il procedimento seguito è essenzialmente di natura algebrica e geometrica, nell'ambito di una teoria algoritmica tra le tante possibili. I passaggi principali si possono riassumere come segue:

a) le n–scale, $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$, si interpretano alla stregua di punti a coordinate intere positive, o punti interi positivi, $P_n \equiv (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali, $(\mathrm{O}\mathrm{x}_1\,\mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_n)$, in un n–spazio euclideo, $\Re^n$. In tali condizioni, le n–scale possono pensarsi costituite da coordinate e le classi T_n si possono suddividere in due categorie, costituite l'una da n–scale distinte, ad esempio $\{1,2,3,6\}$, e l'altra da n–scale ripetute, ad esempio $\{2,4,2,4\}$, in seguito a trasposizione;

b) le n–scale distinte e ripetute vengono conteggiate separatamente, e per ogni cardinalità si determina il numero di classi T_n;

c) utilizzando un procedimento analogo, per ogni cardinalità si determina il numero di classi T_n/T_nI;

d) si approfondisce ulteriormente l'interpretazione geometrica di per sé.

In linea di principio, il metodo utilizzato si potrebbe applicare a intervalli musicali in multipli interi di semitoni in relazione a una scala temperata a L note anziché a 12 note.

La trattazione si articola nella maniera seguente. I primi tre passaggi sopra menzionati sono sviluppati nei diversi paragrafi del Cap. 1. Il quarto passaggio è considerato nel Cap. 2. La discussione è svolta nel Cap. 3. Le conclusioni sono presentata nella sezione finale. Ulteriori punti sono trattati e approfonditi nell'appendice: le motivazioni che hanno portato al conteggio delle n–scale e delle classi T_n con cardinalità assegnata (A); l'applicazione del metodo ai classici problemi della torta di compleanno (B) e della collana (C); alcune formule di geometria analitica valide in $\mathfrak{R}^k$ (D); definizione e proprietà dei $(k+1)$–edri in $\mathfrak{R}^k$ (D); ulteriori proprietà di una particolare classe di n–edri in $\mathfrak{R}^n$ (D); una diversificazione delle n–scale nel contesto del problema dell'asta spezzata (E); uno studio dettagliato dei 4–edri del tipo considerato in $\mathfrak{R}^4$ (F); la presentazione delle figure menzionate nel testo con le relative didascalie (G).

La maggior parte della presente monografia consiste nella traduzione in italiano di un articolo in inglese degli stessi autori [21], dove in alcuni punti la trattazione è stata estesa ai fini di una maggiore chiarezza. Questo in quanto una comprensione completa della materia trattata riesce possibile, a giudizio di chi scrive, soltanto nella madrelingua.