Aoı

Jaap Ponstein

Nonstandard Analysis

Una via ingenua agli infinitesimi
Trattazione non ortodossa della NSA

Traduzione di
Sergio Casiraghi
Lucia Casiraghi

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0588-7

I edizione: settembre 2017

Con amore, amore, amore per quelle cinque donne che mi accarezzavano

In ricordo di J. Ponstein, già docente
presso l'Università di Groningen

Indice

Prefazione

di Wim Klein Haneveld [1] e Sileen Ponstein-Troelstra [2]

Jaap Ponstein è stato professore di Ricerca Operativa presso l'Università di Groningen per più di 20 anni. Mentre iniziava la sua carriera a Groningen, cominciò a studiare all'università econometria, disciplina in cui si inseriva anche la Ricerca Operativa (OR). La sua ampia esperienza nel mondo della matematica, sia pura che applicata, giocò un ruolo importante nello sviluppo degli studi di OR a Groningen. Il professore diventò un'autorità nel campo dell'ottimizzazione, della dualità, della convessità e della differenziabilità generalizzata. Il suo volume "Approaches to the theory of optimization" (Cambridge University Press, 1980) è un bell'esempio della maniera precisa e trasparente con cui riuscì a collegare diverse aree dell'ottimizzazione. Fu inoltre la persona giusta per fare da promotore honoris causa in occasione dell'assegnazione della laurea onoraria a R.T. Rockafellar il 20 giugno 1984 presso l'Università di Washington, Seattle, USA.

Il Prof. Ponstein era noto come insegnante eccellente. Fu un tutor perfetto per studenti e colleghi: stimolante e sempre disponibile per la discussione degli articoli. Spesso le sue osservazioni erano critiche, sia nei contenuti che nella forma, ma sempre volte al miglioramento e alla massima chiarezza. Hans Nieuwenhuis, Caspar Schweigman, Gerard Sierksma ed io, per citarne alcuni, abbiamo imparato moltissimo da lui. Siamo ancora colpiti dalla sua integrità, il suo impegno e la sua erudizione scientifica.

Negli anni '80 Imme van den Berg alimentò l'interesse di Jaap per l'Analisi non-standard. Lo affascinò la possibilità di avere a che fare con quantità infinitamente piccole ed infinitamente grandi come numeri, senza perdere il rigore matematico. Da quando andò in pensione, nel 1989, studiò approfonditamente la materia. Il punto di vista della sua ricerca riflette la sua impostazione scientifica: si chiese come introdurre gli infinitesimi e altri numeri "non standard" in maniera sem-

[1] Collega all'Università di Groningen.
[2] Compagna di Jaap Ponstein.

plice, ma in modo che ne risultasse una teoria matematicamente solida e completa, entro ovvi limiti.

Questo libro è il risultato dei suoi studi. Lo concluse nell'estate del 1995. Sfortunatamente non riuscì a pubblicarlo: morì il 22 novembre 1995.

Sono lieto e orgoglioso che la facoltà di Economia dell'Università di Groningen abbia offerto l'opportunità di pubblicare il libro. Ciò sottolinea il rispetto che tutti noi proviamo nei confronti dei meriti di Jaap.

Groningen, febbraio 2001

Wim Klein Haneveld

Quando Jaap terminò il suo discorso inaugurale, mia madre mi disse: "Non avevo la minima idea di cosa stesse dicendo, ma lo ha presentato in modo tale che non potevo fare a meno di pensare: minuto dopo minuto, adesso tutto avrà senso". Questa è una delle cose speciali di Jaap: la sua abilità di ispirare le persone con temi che gli piacevano. Capitò la stessa cosa quando spiegò alle nostre figlie Marianne, Anne, Els e Ada, quando erano piccole, che cosa sono la metà e il quarto. Tagliò una torta di mele prima in due e poi in quattro. Mostrò lo stesso spirito entusiasta più avanti, a Groningen, quando insegnava econometria agli studenti e quando aiutava i figli dei nostri vicini con quella "matematica difficile".

Tutto questo per me rappresenta il modo in cui Jaap iniziò a lavorare al suo libro. I numeri infinitamente piccoli e le loro applicazioni lo affascinavano. Jaap capì come affrontare l'argomento in un modo non convenzionale, in un modo che rendesse il tema più accessibile agli altri. Ebbe molto di cui discutere con Els su quale parola sarebbe stato meglio usare per descrivere i numeri infinitamente piccoli.

Visto che il manoscritto si avvicinava al completamento, parlò con Anne della possibilità di pubblicarlo.

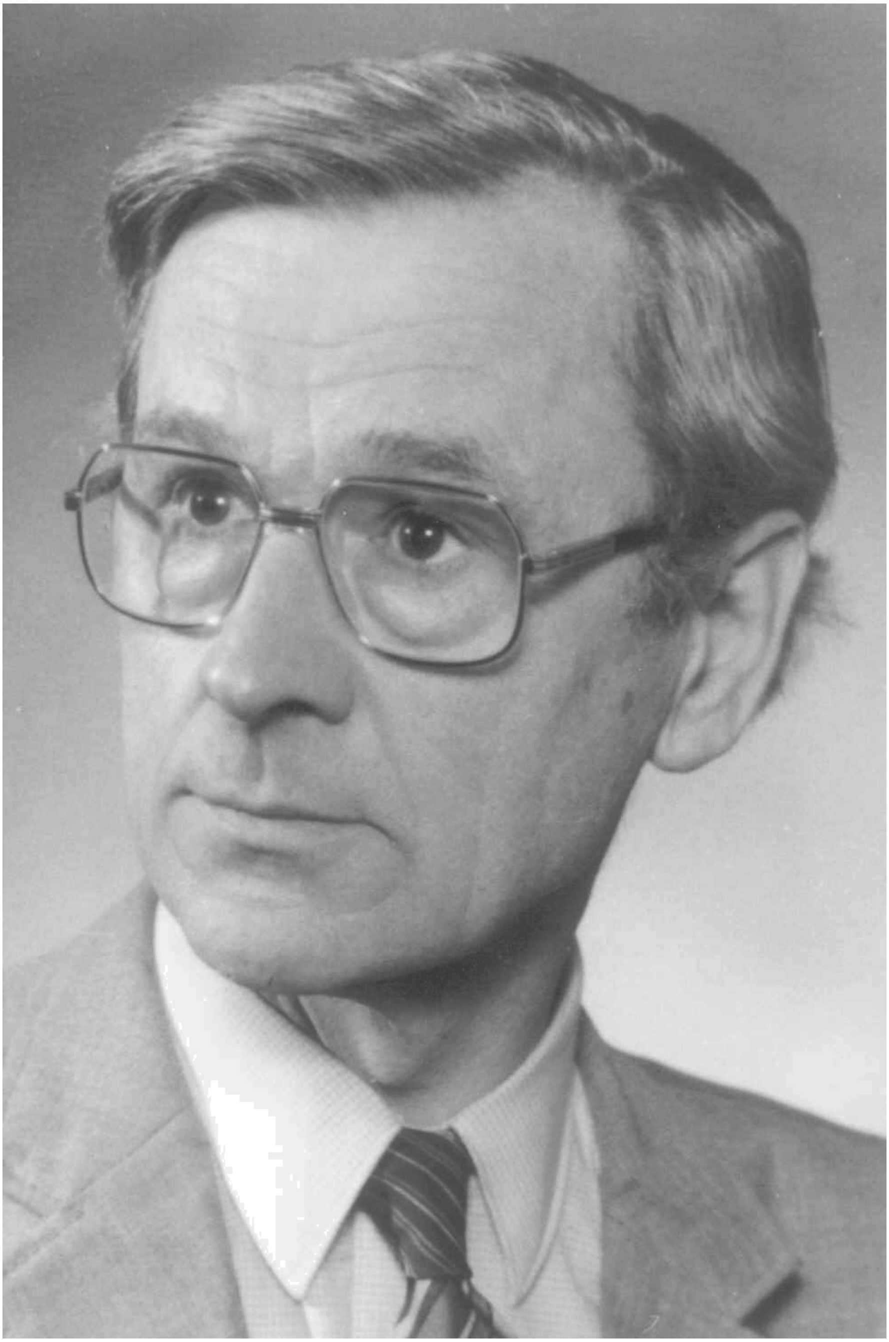
Questa era la situazione quando Jaap si ammalò nel settembre del 1995. Le mie figlie ed io non considerammo il manoscritto per diverso tempo. Non sapevamo cosa farne. Alla fine contattai Imme van dem Berg che acconsentì a revisionarlo e a portarlo all'attenzione della facoltà di Economia dell'Università di Groningen.

La facoltà, rappresentata di Wim Klein Haneveld, si offrì di pubblicarlo come volume della serie Research Reports della scuola di ricerca SOM.

Vorrei esprimere la mia gratitudine a Imme van den Berg per la sua lettura rapida ed approfondita del manoscritto e a Win Klein Haneveld per la sua attenta gestione del processo di pubblicazione. Per ultimo, ma non da meno, vorrei ringraziare Suwarni Bambang Oetomo, che con grande impegno ha trasferito il manoscritto dal programma di word-processing CW al più moderno TEX. Non sarebbe stato possibile pubblicare questo documento senza l'assistenza economica offerta dalla facoltà di Economia. I miei più sentiti ringraziamenti, anche da parte delle mie figlie, vanno a tutti coloro che sono stati di aiuto nel portare il manoscritto di Jaap alla pubblicazione.

Zeist, novembre 2000

Sileen Ponstein-Troelstra



† Dr. Jacob (Jaap) PONSTEIN

Introduzione

Un infinitesimo è un 'numero' che è più piccolo di ogni numero reale positivo ed è maggiore di ogni numero reale negativo, in modo che nel sistema dei numeri reali c'è solo un infinitesimo, ossia zero. Ma di solito interessano solo gli infinitesimi diversi da zero. Questo è legato al fatto che quando nella definizione tradizionale di limite per x che tende a c, spesso interessano solo i valori di x che sono diversi da c. Da qui ne viene che il sistema dei numeri reali va esteso in un modo o in un altro, al fine di includere tutti gli infinitesimi.

Questo libro riguarda un tentativo di introdurre gli infinitesimi e gli altri numeri 'non standard' in maniera semplice e ingenua. Tuttavia, si spera che la teoria risultante possa essere matematicamente valida e completa, entro certi limiti. Molto probabilmente, tuttavia, anche se questa 'analisi non standard' è presentata come ingenua, non possiamo fare a meno dell'assioma di scelta (c'è una versione limitata di analisi non standard, meno elegante e meno potente, che non vi ricorre). Ciò è un peccato, in quanto questo assioma non viene accettato da tutti i matematici, e viene addirittura respinto dai matematici costruttivisti, il che non è irragionevole, in quanto non ci dice in che modo la scelta in questione potrebbe essere fatta (tranne nei casi più semplici, quando però l'assioma non è necessario).

I restanti assunti di base che verranno fatti sembrerebbero essere accettabili per molti matematici, benché presi in parte dal formalismo matematico - vale a dire i principi logici abituali, in particolare quello del terzo escluso - nonché dalla matematica costruttivista - cioè che al principio di tutta la matematica ci sono i numeri naturali (nel senso classico del termine). Non solo il numero naturale, ma anche l'insieme e la coppia saranno presi come nozioni primitive. L'effetto ultimo di ciò è una versione della matematica che, tranne che per dei risultati veramente non standard, sembrerebbe produrre gli stessi teoremi che vengono prodotti dalla matematica classica.

Una delle conseguenze di combinare varie idee dalle due principali scuole di pensiero matematico è che classici assiomi della teoria degli insiemi, in particolare quelli di Zermelo-Fraenkel, saranno ignorati. Prima di tutto, ci saranno elementi che non sono insiemi, a cominciare dai numeri naturali. Solo in seguito gli insiemi potranno essere formati a partire da essi per stadi (volta per volta), mentre partendo da assiomi come quelli di Zermelo-Fraenkel ogni entità matematica, in particolare ogni numero naturale, è un insieme.

Da un punto di vista formale quest'ultimo approccio ha il vantaggio che vi è solo un concetto primitivo, ma da un punto di vista ingenuo non è così evidente il motivo per cui i numeri dovrebbero essere degli insiemi (in matematica formale solo dopo i numeri naturali prendono vita sotto forma di insiemi, questo fatto viene nascosto appena risulta possibile). Inoltre, non stiamo forse presupponendo almeno l'ordine dei numeri naturali già durante la scrittura degli assiomi per mezzo di simboli adatti?

In certa misura l'analisi non standard è superflua! Infatti, possiamo dire che se un teorema di matematica classica ha una dimostrazione non standard, ha anche una prova classica (secondo quello che in analisi non standard è noto come principio di 'trasferimento'). Spesso però la dimostrazione non standard è intuitivamente più attraente, anche più semplice e più breve, che è uno dei motivi per cui ci può interessare l'analisi non standard. Un'altra ragione è che offre modelli matematici totalmente nuovi per tutti i tipi di problemi che possono essere (e sono stati) formulati usando infinitesimi o altri numeri non standard spesso occorrenti in tali modelli. Un esempio banale potrebbe essere quello di un problema che coinvolge un mucchio contenente molti granelli di sabbia, ma in cui il numero di granelli di sabbia non dovrebbe essere infinito. Prendendo l'inverso di infinitesimi positivi e arrotondando il risultato verso l'alto o verso il basso si produce un cosiddetto 'numero naturale' infinitamente grande che è maggiore di ogni numero naturale ordinario, ma è più piccolo di infinito. Esso può essere manipolato in modo molto simile ai numeri ordinari, cosa che non si può però dire dell'infinito. Ne segue che la matematica degli insiemi infinitamente grandi è essenzialmente più semplice di quella degli insiemi infiniti.

Una peculiarità, tuttavia, è che la 'scelta' dell'infinitesimo e quindi di quel numero naturale infinitamente grande non è specificata come sarebbe il numero di elementi di un insieme, diciamo, di 25 elementi. D'altra parte, se ω è il nostro numero naturale infinitamente grande, ha senso considerare un altro mucchio di sabbia che ha ω^2 granelli di sabbia, che può essere pensato come il risultato della combinazione di ω cumuli di sabbia contenenti ciascuno ω granelli di sabbia. Ma in ciò che segue l'analisi dei modelli pratici contenenti numeri non standard non sarà messa in rilievo.

Capitolo I

Generalità

Introduzione dei numeri ipergrandi e iperpiccoli

1.1. Infinitesimi e altri numeri non standard

Un infinitesimo è un numero che è più piccolo di ogni numero reale positivo ed è maggiore di ogni numero reale negativo, e ciò equivale a dire che preso in valore assoluto esso è inferiore a 1/m per ogni $m \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Zero è l'unico numero reale che allo stesso tempo è un infinitesimo, in modo che gli altri infinitesimi non si trovino nella matematica classica. Tuttavia, questi potranno essere trattati in modo molto simile ai classici numeri. Ad esempio, ogni ε infinitesimo non nullo può essere invertito e il risultato è il numero $\omega=1/\varepsilon$. Ne consegue che $| w |>m$ per ogni $m \in N$, per cui ω è chiamato (positivo o negativo) ipergrande (o infinitamente grande). Anche i numeri ipergrandi non ci sono nella matematica classica, ma comunque possono essere trattati come numeri tradizionali. Se, per esempio, ω è un positivo ipergrande, possiamo calcolare $\sqrt{\omega}$, $\omega/2$, $\omega - 1$, $\omega + 1$, 2ω, ω^2, ecc. ., e si ha che

$(\omega - 1) + (\omega + 1) = 2\omega$, $(\omega - 1) \cdot (\omega + 1) = \omega^2 - 1$, e così via. Inoltre, per ogni $m \in N$, si ha che

$$m < \sqrt{\omega} < \omega/2 < \omega - 1 < \omega < \omega + 1 < 2\omega < \omega^2$$

con sette numeri ipergrandi diversi. I numeri positivi ipergrandi non vanno confusi con l'infinito (∞), che non va considerato affatto un numero, e comunque non soddisfa le disuguaglianze, tranne la prima.

Purtroppo, non sembra esistere un sinonimo di 'numero ipergrande' che avrebbe fatto una bella coppia con 'infinitesimo', quindi cerchiamo di introdurre il sinonimo 'numero iperpiccolo' per il secondo.

Se ε è iperpiccolo, se anche δ è iperpiccolo ma diverso da zero, e se ω è un ipergrande positivo, così che -ω sarà ipergrande negativo, si scriverà rispettivamente: $\varepsilon \simeq 0$, $\delta \sim 0$, $\omega \sim \infty$, $-\omega \sim -\infty$.

Sarebbe comunque sbagliato dedurre da $\omega \sim \infty$ che la differenza tra ω e ∞, o quella tra $-\omega$ e $-\infty$ sia iperpiccola.

Dato qualsiasi $x \in R$, $x \neq 0$ e ogni $\delta \simeq 0$ se $t = x + \delta$ allora $\varepsilon < | t | < \omega$, per tutti $\varepsilon \sim 0$ e tutti $\omega \sim \infty$. Il numero t è detto apprezzabile (in quanto non è troppo piccolo e neppure troppo grande).

Tre insiemi disgiunti di numeri (vecchi o nuovi) ora possono essere qui presentati:

a) l'insieme di tutti gli iperpiccoli ovvero infinitesimi, a cui appartiene anche lo zero;
b) l'insieme di tutti i numeri apprezzabili, costituito da tutti i numeri reali non nulli;
c) l'insieme di tutti i numeri ipergrandi, contenente numeri grandi per nulla classici.

L'insieme di questi tre gruppi rappresentano tutti i numeri della 'Analisi reale Non Standard' (NSA). Questo insieme, che chiaramente è una estensione di R, è indicato come *R e viene considerato come trasformazione* di R. Gli elementi di *R sono detti iperreali. L'uso del prefisso 'iper' qui non è del tutto difendibile, perché ad esempio 5, che ovviamente è un elemento di *R, è solo un vero e proprio numero ordinario. Abbreviando rispettivamente iperpiccolo (hypersmall) con "s", apprezzabile con "a", e ipergrande (hyperlarge) con "l", supposto che x e y siano numeri positivi, per l'addizione e la moltiplicazione vale quanto segue:

Table 1.1. Tavole relative alla somma e al prodotto di numeri iperreali.

y + x	**s**	**a**	**l**
s	s	a	l
a	a	a	l
l	l	l	l

y * x	**s**	**a**	**l**
s	s	s	?
a	s	a	l
l	?	l	l

Esempi relativi al punto di domanda in basso a sinistra sono x ~ 0 e y = $\sqrt{x^{-1}}$, o 1/x, o 1/x^2. Per x - y i risultati (sempre che x, y >0) sono gli stessi di x + y, eccetto il caso in cui x e y sono entrambi apprezzabili, perché allora x - y è o iperpiccolo o apprezzabile e se entrambi x e y sono ipergrandi, allora x - y è o ipergrande (positivo o negativo), o apprezzabile o iperpiccolo, come si vede anche dagli esempi seguenti: y = x/2, o 2x, o x - 1, oppure x + ε, con ε ≃ 0.

Se un numero non è ipergrande allora è chiamato finito o limitato.

Nota: Altrove in letteratura, ogni elemento di *R è considerato finito. Chiaramente, t è finito se e solo se t = x + ε per qualche x ∈ R e ε ≃ 0. Dato un tale t, sia x sia ε sono unici, perché, x + ε = y + δ, x, y ∈ R, con ε, δ ≃ 0 implica che x - y = δ - ε ≃ 0, così che (siccome x – y ∈R), x - y = 0, quindi x = y e anche ε = δ.

Per definizione x è chiamata la parte standard di t, e questo è scritto come x = st(t).

La funzione parte standard st fornisce un importante passerella (principalmente a senso unico) stabilita tra i numeri finiti dell'analisi non standard e i numeri classici. Banalmente, se si ha che t è di per sé un numero classico, allora st(t) = t.

1.2. Altre trasformazioni*, generazione di nuovi numeri

La Trasformazione* non solo può essere ottenuta per R, ma anche per N, Z, Q, e qualsiasi insieme X della matematica classica (per altro, vedi Sezione 1.5). I loro trasformati* sono indicati rispettivamente con *N, *Z, *Q, e *X. Togliendo tutti i numeri non-finiti da *N e *Z si ha di nuovo N e Z, ma questo non vale per *Q (così come per *R), e si capisce perché *Q (come *R) contiene numeri non-standard finiti. Ma c'è una differenza evidente tra *Q e *R in proposito: il 'teorema della parte standard' discusso alla fine della sezione precedente non vale per *Q, vale a dire, vi sono elementi finiti t di *Q che non possono essere scritti come t = x + ε, con x ∈ Q, ε ∈ *Q, ε ~ 0. Così sia c un numero irrazionale, diciamo c = √2, e sia (r_1, r_2, ...) qualche successione di Cauchy di numeri razionali convergente a c. Vedremo più avanti che diventerà chiaro come la sequenza (r_1 - c, r_2 – c, ...) 'generi' un certo δ infinitesimo di *R (perché questa successione converge a zero). Ma d'altra parte (r_1, r_2, ...) genera un elemento r ∈ *Q ⊂ *R, ed r è finito (in quanto gli elementi r_i della successione sono razionali e, inoltre, la successione converge), ma non può avere alcuna parte standard in Q, altrimenti r = x + ε per qualche x ∈ Q e qualche ε ∈ *Q, ε ≃ 0. Poiché (r_1 - c, r_2 – c, ...) genera anche il numero finito r - c ∈ *R, cosicché avremo r - c = δ ≃ 0. Ne conseguirebbe che x - c = δ – ε ≃ 0, e quindi x - c = 0 (essendo x - c un vero e proprio numero ordinario), ma ciò significherebbe che c ∈ Q, dunque una contraddizione. D'altra parte, in *R abbiamo che st(r) = c. (Portando avanti questo argomento si scopre che esiste una corrispondenza 1-1 tra R e l'insieme di tutti gli elementi finiti di *Q modulo l'insieme di tutti gli infinitesimi razionali, che preserva l'addizione e la moltiplicazione; cioè tale applicazione è un isomorfismo. In altre parole R (e non *R) può, in un certo senso, essere prodotto da *Q).

Ci sono vari modi di introdurre i nuovi numeri. Più avanti questo sarà fatto per mezzo di sequenze infinite di numeri standard. Ora, in particolare, gli elementi di *R verranno generati per mezzo di certe sequenze infinite di reali, e sarà necessario prendere in considerazione tutte queste successioni. (Ricordiamo che gli elementi di R possono essere generati per mezzo di sequenze infinite piuttosto particolari di razionali, ovvero le successioni di Cauchy).

Più in generale, dato un qualsiasi insieme standard X gli elementi della sua Trasformazione* (*X) si potranno generare mediante delle sequenze infinite di elementi di X e tali sequenze devono essere tutte prese in considerazione. Ogni sequenza 'genera' un elemento di *X e nel caso in cui X è un insieme di numeri (o n-tuple di numeri) speciali sequenze generano gli elementi di X stesso. Ad esempio, (1, 2, 3, ...) genera un elemento ipergrande di *N, e (3/2, 5/4, 9/8,...) genera un elemento finito di *Q, che è uguale alla somma di 1, generata da (1, 1, 1, ...) e un infinitesimo, generato da (1/2, 1/4, 1/8, ...). Delle sequenze diverse possono generare lo stesso elemento di X*. Infatti, dato un qualsiasi x ∈ *X ci sono molte (innumerevoli) sequenze diverse che generano x (se X contiene almeno due elementi). Per esempio, si può cambiare finitamente molti termini di una sequenza che lo genera e ciò non ha effetti sull'elemento generato. Ma ci sono molte altre variazioni su questo tema.