

MATEMATICHE COMPLEMENTARI

FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Direttore

Luigi MAIERÙ
Università della Calabria

Comitato scientifico

Aldo BRIGAGLIA
Università degli Studi di Palermo

Luca DELL'AGLIO
Università della Calabria

Massimo GALUZZI
Università degli Studi di Milano

Emilia FLORIO
Università della Calabria

MATEMATICHE COMPLEMENTARI
FONDAMENTI, STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA



La matematica altri non è che il lato esatto del nostro pensiero.

Luitzen Egbertus Jan BROUWER

La collana accoglie studi e ricerche che riguardano i fondamenti, la storia e la didattica della matematica. Essa è rivolta a coloro che vogliono approfondire un aspetto culturale o l'altro dello sviluppo della matematica nel corso dei secoli, la sua trasmissione da una generazione all'altra, la sua struttura scientifica, la sua proposta didattica (senza trascurare lo sviluppo di metodi e di tecnologie innovative), coniugando insieme aspetti elementari e superiori.



Vai al contenuto multimediale

Eugenio Biasin

Alle radici del calcolo

Percorsi nei fondamenti del pensiero matematico





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVII
Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.giacchinoonoratieditore.it
info@giacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0549-8

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 2017

Indice

9 *Introduzione*

13 *Capitolo I*
Peano e il numero

1.1. Gli assiomi di Peano , 14 – 1.2. Le operazioni in \mathbb{N} , 16 – 1.3. Critiche agli assiomi, 17 – 1.4. Problematiche metateoriche, 19 – 1.5. I contributi di Peano e Padoa , 20 – 1.6. Gli assiomi della teoria formale PA, 21 – 1.7. Omaggio a Peano, 22.

25 *Capitolo II*
Cantor e l'infinito

2.1. Insiemi finiti, 26 – 2.2. Insiemi numerabili, 27 – 2.3. Insiemi non numerabili, 33 – 2.4. L'ipotesi del continuo, 38 – 2.5. Formulazione dell'ipotesi, 41 – 2.6. Coerenza dell'ipotesi, 41 – 2.7. Indipendenza dell'ipotesi, 43 – 2.8. Verità dell'ipotesi, 44 – 2.9. Sviluppi recenti, 45.

49 *Capitolo III*
Zermelo e l'inesauribilità

3.1. La teoria ingenua degli insiemi, 50 – 3.2. L'assioma di scelta, 52 – 3.3. Gli assiomi di Zermelo, 53 – 3.4. La teoria di Zermelo–Fraenkel, 55 – 3.5. La gerarchia cumulativa dei tipi, 57.

61 *Capitolo IV*
Gödel e l'incompletezza

4.1. L'inesco, 61 – 4.2. Il programma di Hilbert, 62 – 4.3. La teoria della dimostrazione, 64 – 4.4. L'aritmetizzazione, 65 – 4.5. La proposizione di Gödel, 66 – 4.6. I teoremi di Gödel, 67 – 4.7. Le conseguenze, 70 – 4.8. Radici filosofiche, 72.

73 Capitolo V

Tarski e l'indefinibilità

5.1. Il paradosso del mentitore, 73 – 5.2. La concezione classica della verità, 74 – 5.3. La teoria della verità di Tarski, 76 – 5.4. Il Teorema di Tarski, 78 – 5.5. Le conseguenze, 79.

81 Capitolo VI

Turing e l'indcidibilità

6.1. Algoritmi e funzioni computabili, 81 – 6.2. Funzioni ricorsive, 82 – 6.3. Macchine di Turing, 84 – 6.4. L'Halting problem, 85 – 6.5. Il decimo problema di Hilbert, 86 – 6.6. $P = NP?$, 87.

89 Capitolo VII

Robinson e l'infinitesimo

7.1. Gli infinitesimi nella storia , 89 – 7.2. La teoria dei modelli, 92 – 7.3. L'analisi non standard, 95 – 7.4. I metodi non standard, 96.

99 Capitolo VIII

Chaitin e la casualità

8.1. Complessità computazionale, 99 – 8.2. Il paradosso di Berry, 100 – 8.3. Numeri casuali, 102 – 8.4. L'ineffabile numero Ω , 103 – 8.5. Matematica "quasi empirica", 105.

107 Capitolo IX

Gödel e... God

9.1. Possibilità e necessità, 108 – 9.2. Le proprietà positive, 109 – 9.3. L'argomento ontologico di Gödel , 109 – 9.4. Dubbi e perplessità, 113.

115 *Bibliografia*

Introduzione

Henry Poincaré, uno dei maggiori matematici del secolo scorso, amava dire che la matematica è quella scienza che confina da un lato con la fisica e dall'altro con la filosofia, chiarendo in tal modo come l'anima di questa disciplina sia divisa tra il suo ruolo di ossatura delle scienze sperimentali e quello, non meno importante, di strumento di conoscenza.

È proprio a quest'ultimo aspetto che forse ci si dovrebbe maggiormente accostare per convincere gli innumerevoli scettici che la matematica non è solo un insieme di regole astruse, e forse talvolta utili, da ingoiare in giovane età tappandosi il naso.

È la ricerca dei perché più profondi che nobilita questa disciplina e la affranca dalle catene del vassallaggio verso la scienza, che ne mostra il suo autentico valore culturale, che ne rende visibile il suo "volto umano", che ne lascia intravedere la sua "suprema bellezza".

Il presente volume vorrebbe fornire un piccolo contributo alla causa, stimolando riflessioni utili ad affrontare le domande classiche che ogni insegnante si sente rivolgere: a che serve tutto ciò?

A tal proposito si narra che il grande Euclide, interrogato da uno studente, anziché fornire una risposta invitò il suo assistente a cacciare il malcapitato interlocutore non prima di avergli dato una moneta; appare evidente che, nell'era dei ricorsi, un atteggiamento di tal fatta non sia dei più raccomandabili, meglio trovare argomenti più diplomatici.

L'esposizione affronta alcuni temi dei cosiddetti *fondamenti della matematica*: dal concetto di numero a quello di infinito, dalla dimostrabilità alla verità, dalla computabilità alla casualità, spingendosi pericolosamente fino ad uno sguardo razionale alla trascendenza.

Ogni capitolo è dedicato alla presentazione di un tema, partendo dal suo inquadramento storico e sviluppandolo, a grandi linee, fino ai contesti più recenti.

Nello specifico, il primo capitolo presenta la nascita della prima trattazione assiomatica del concetto di *numero naturale*, dovuta a Giuseppe

Peano e alla sua scuola, evidenziandone l'impatto sulla matematica del tempo, le critiche annesse e gli sviluppi successivi. Nel secondo capitolo si affronta la teoria dei *numeri cardinali transfiniti* di Georg Cantor, sviluppandone alcuni elementi in modo informale e giungendo ad accennare alle problematiche connesse all'*ipotesi del continuo*, con un fugace sguardo ai più recenti risultati in termini di decisione.

Il terzo capitolo presenta l'assiomatizzazione della *teoria degli insiemi* dovuta a Ernst Zermelo, con particolare riferimento al ruolo svolto dall'*assioma di scelta* e ai modelli dell'universo insiemistico.

Il quarto capitolo affronta il fondamentale *teorema di incompletezza* di Kurt Gödel, presentandone gli antefatti, i prerequisiti, il significato e le conseguenze, cercando di darne un quadro non troppo tecnico, ma sufficientemente ampio e articolato.

Nel quinto capitolo viene analizzata la *teoria della verità* di Alfred Tarski, partendo dalla teoria classica di Aristotele e seguendo come linea guida il celeberrimo *paradosso del mentitore*, mentre nel sesto si affronta il concetto di *funzione computabile* attraverso la descrizione della *macchina di Turing* e il connesso problema dell'arresto, accennando ai risultati successivamente ottenuti e ai problemi aperti nella *teoria della complessità*.

Il capitolo sette è dedicato alla presentazione della cosiddetta *analisi non standard*, dovuta ad Abraham Robinson, attraverso la quale viene ridata cittadinanza formale al delicato concetto di *infinitesimo* di leibniziana memoria.

Il capitolo otto vuole essere uno sguardo alle recenti teorie di Gregory Chaitin relative alla *casualità* in ambito aritmetico e alle loro conseguenze, mentre il nono capitolo tenta di dare una presentazione della prova ontologica nella riformulazione dovuta a Gödel.

Il proposito dell'autore è quello di presentare un primo sguardo alle complesse problematiche soggiacenti ai temi affrontati, utile per capirne la portata e le possibili ricadute, superabile in seguito attraverso un approfondimento su testi più estesi ed impegnativi, alcuni dei quali citati nella bibliografia.

I destinatari del libro dovrebbero essere, pertanto, in primo luogo gli insegnanti di scuola secondaria superiore, per i quali i singoli capitoli potrebbero costituire materiale utile per approfondimenti pluridisciplinari, ma non si esclude, comunque, la possibile fruizione da parte di studenti liceali particolarmente motivati desiderosi di am-

pliare gli orizzonti della disciplina, talvolta arida e ripetitiva, affrontata nel corso degli studi.

In ogni caso, il volume può essere un'introduzione per tutti coloro che trovino condivisibile la seguente affermazione di G.Chaitin: « per me la matematica è solo lo strumento fondamentale della filosofia, è un modo per elaborare le idee, per soddisfarle, per costruire modelli, per capire! ».