

Aoi

Serena Doria
Valerio Piattelli

Matematica

Elementi di teoria e guida
alla risoluzione degli esercizi





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVII
Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0487-3

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: luglio 2017

O studianti, studiate le matematiche,
e non edificate senza fondamenti.

Leonardo da Vinci, *Fogli della Royal Library di Windsor*

- 13 *Introduzione*
di Serena Doria, Valerio Piattelli
- 15 *Capitolo I*
Elementi di teoria degli insiemi
1.1. Definizioni ed esempi, 15 – 1.1.1. *Definizione 1. Proprietà*, 15 – 1.1.2. *Definizione 2. Elemento*, 15 – 1.2. Rappresentazione degli insiemi, 15 – 1.2.1. *Definizione 3. Sottoinsieme proprio*, 16 – 1.2.2. *Definizione 4. Sottoinsieme improprio*, 17 – 1.2.3. *Definizione 5. Sottoinsiemi banali*, 17 – 1.2.4. *Definizione 6. Cardinalità di un insieme*, 17 – 1.3. Operazioni tra insiemi, 17 – 1.3.1. *Definizione 7. Insieme complementare*, 17 – 1.3.2. *Definizione 8. Unione tra due insiemi*, 18 – 1.3.3. *Definizione 9. Intersezione tra due insiemi*, 19 – 1.3.4. *Definizione 10. Differenza tra due insiemi*, 19 – 1.3.5. *Definizione 11. Unione finita tra insiemi*, 20 – 1.3.6. *Definizione 12. Intersezione finita tra insiemi*, 20 – 1.3.7. *Definizione 13. Unione numerabile tra insiemi*, 21 – 1.3.8. *Definizione 14. Intersezione numerabile tra insiemi*, 21 – 1.3.9. *Definizione 15. Prodotto cartesiano*, 21 – 1.4. Relazioni, 22 – 1.4.1. *Definizione 16. Relazione*, 22 – 1.4.2. *Definizione 17. Campo di esistenza di una relazione*, 23 – 1.4.3. *Definizione 18. Insieme dei valori di una relazione*, 23 – 1.4.4. *Definizione 19. Grafico di una relazione*, 23
- 25 *Capitolo II*
Funzioni
2.1. Definizioni, 25 – 2.1.1. *Definizione 20. Funzione*, 25 – 2.1.2. *Definizione 21. Funzione iniettiva*, 26 – 2.1.3. *Definizione 22. Funzione suriettiva*, 27 – 2.1.4. *Caratterizzazione grafica delle funzioni iniettive*, 27 – 2.1.5. *Caratterizzazione grafica delle funzioni suriettive*, 28 – 2.1.6. *Definizione 23. Funzione invertibile*, 28 – 2.2. Funzioni elementari, 29 – 2.2.1. *Definizione 24. Funzioni algebriche razionali*, 29 – 2.2.2. *Definizione 25. Funzioni algebriche irrazionali*, 29 – 2.2.3. *Definizione 26. Funzioni trascendenti esponenziali*, 30 – 2.2.4. *Definizione 27. Funzioni trascendenti logaritmiche*, 32 – 2.2.5. *Definizione 28. Funzione composta*, 34
- 35 *Capitolo III*
Funzioni trigonometriche e loro inverse
3.1. Circonferenza goniometrica, 35 – 3.1.1. *Definizione 29. Funzioni trigonometriche*, 35 – 3.1.2. *Definizione 30. Funzione seno*, 37 – 3.1.3. *Definizione 31. Funzione arcoseno*, 38 – 3.1.4. *Definizione 32. Funzione coseno*, 38 – 3.1.5. *Definizione 33. Funzione arcocoseno*, 39 – 3.1.6. *Definizione 34. Funzione tangente*,

40 – 3.1.7. *Definizione 35. Funzione arcotangente*, 41 – 3.1.8. *Definizione 36. Funzione cotangente*, 41 – 3.1.9. *Definizione 37. Funzione arcocotangente*, 42 – 3.2. *Principali valori assunti dalle funzioni trigonometriche*, 43

45 Capitolo IV

Funzione parte intera e funzione modulo

4.1. *Definizioni ed esempi*, 45 – 4.1.1. *Definizione 38. Funzione parte intera*, 45 – 4.1.2. *Definizione 39. Funzione modulo*, 47

49 Capitolo V

Spazi topologici

5.1. *Definizioni ed esempi*, 49 – 5.1.1. *Definizione 40. Famiglia delle parti di S* , 49 – 5.1.2. *Definizione 41. Topologia*, 49 – 5.1.3. *Definizione 42. Spazio topologico*, 49 – 5.1.4. *Definizione 43. Topologia banale*, 50 – 5.1.5. *Definizione 44. Topologia discreta*, 50 – 5.1.6. *Definizione 45. Topologia naturale*, 50 – 5.1.7. *Definizione 46. Topologia naturale di $\mathbb{R}$* , 50 – 5.1.8. *Definizione 47. Spazio topologico separato*, 50 – 5.1.9. *Definizione 48. Intorno*, 51 – 5.1.10. *Definizione 49. Punto interno*, 51 – 5.1.11. *Definizione 50. Punto di frontiera*, 51 – 5.1.12. *Definizione 51. Punto di accumulazione*, 52 – 5.1.3. *Caratterizzazione degli aperti*, 52 – 5.1.14. *Caratterizzazione dei chiusi*, 52 – 5.1.15. *Definizione 52. Estremo inferiore*, 53 – 5.1.16. *Definizione 53. Estremo superiore*, 53 – 5.2. *Spazi topologici – Esercizi*, 54 – 5.2.1. *Esercizio 1*, 54 – 5.2.2. *Esercizio 2*, 62 – 5.2.3. *Esercizio 3*, 68 – 5.2.4. *Esercizio 4*, 71 – 5.2.5. *Esercizio 5*, 75 – 5.2.6. *Esercizio 6*, 78 – 5.2.7. *Esercizio 7*, 80 – 5.2.8. *Esercizio 8*, 83 – 5.2.9. *Esercizio 9*, 86 – 5.2.10. *Esercizio 10*, 89

95 Capitolo VI

Limite in uno spazio topologico

6.1. *Definizioni e Teoremi*, 95 – 6.1.1. *Definizione 54. Limite in uno spazio topologico*, 95 – 6.1.2. *Definizione 55. Limite destro di una funzione in uno spazio topologico*, 98 – 6.1.3. *Definizione 56. Limite sinistro di una funzione in uno spazio topologico*, 99 – 6.1.4. *Teorema 1. Esistenza del limite*, 100 – 6.1.5. *Definizione 57. Funzione strettamente crescente*, 100 – 6.1.6. *Definizione 58. Funzione crescente*, 101 – 6.1.7. *Definizione 59. Funzione strettamente decrescente*, 101 – 6.1.8. *Definizione 60. Funzione decrescente*, 101 – 6.1.9. *Teorema 2. Esistenza del limite per funzioni monotone crescenti*, 102 – 6.1.10. *Teorema 3. Esistenza del limite per funzioni monotone decrescenti*, 102 – 6.1.11. *Teorema 4. Esistenza del limite per funzioni monotone*, 103 – 6.1.12. *Teorema 5. Unicità del limite*, 104 – 6.1.12.1. *Dimostrazione*, 104 – 6.1.13. *Teorema 6. Teorema del confronto*, 106 – 6.1.13.1. *Dimostrazione*, 106 – 6.1.14. *Teorema 7. Permanenza del segno*, 107 – 6.2. *Esempi di funzioni che non ammettono limite: funzione di Dirichlet e funzione $y = \sin(1/x)$* , 108 – 6.2.1. *Definizione 61. Funzione di Dirichlet*, 108 – 6.2.1.1. *Dimostrazione per assurdo*, 108 – 6.2.1.2. *Dimostrazione per assurdo*, 110 – 6.3. *Operazioni tra limiti e limiti notevoli*, 112 – 6.3.1. *Dimostrazione del limite notevole di $\sin(x)$ per x che tende a 0*, 113 – 6.4. *Limite in uno spazio topologico – Esercizi*, 116 – 6.4.1. *Esercizio 1*, 116 – 6.4.2. *Esercizio 2*, 116 – 6.4.3. *Esercizio 3*, 117 – 6.4.4. *Esercizio 4*, 118 – 6.4.5. *Esercizio 5*, 119 – 6.4.6. *Esercizio 6*, 121 – 6.4.7. *Esercizio 7*, 122 – 6.4.8. *Esercizio 8*, 123 – 6.4.9. *Esercizio 9*, 124 – 6.4.10. *Esercizio 10*, 125 – 6.4.11. *Esercizio 11*, 126

129 Capitolo VII

Funzioni continue

7.1. Definizioni e Teoremi, 129 – 7.1.1. *Definizione 62. Punto isolato*, 129 – 7.1.2. *Definizione 63. Continuità di una funzione in un punto*, 129 – 7.1.3. *Definizione 64. Discontinuità eliminabile (o di terza specie)*, 130 – 7.1.4. *Definizione 65. Discontinuità di prima specie*, 131 – 7.1.5. *Definizione 66. Discontinuità di seconda specie*, 132 – 7.1.6. *Teorema 8. Teorema di Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}$* , 133 – 7.1.6.1. *Dimostrazione*, 133 – 7.1.7. *Definizione 67. Insieme compatto*, 135 – 7.1.8. *Caratterizzazione dei compatti in $\mathbb{R}$* , 136 – 7.1.9. *Teorema 9. Teorema di Weierstrass generalizzato*, 136 – 7.1.10. *Teorema 10. Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}$* , 137 – 7.1.11. *Definizione 68. Insiemi connessi*, 137 – 7.1.12. *Teorema 11. Teorema di Bolzano generalizzato sugli insiemi connessi*, 138 – 7.1.13. *Teorema 12. Teorema di Bolzano in $\mathbb{R}$ sugli insiemi connessi*, 138 – 7.1.14. *Teorema 13. Teorema dei valori intermedi*, 139 – 7.1.15. *Teorema 14. Teorema degli zeri*, 139 – 7.2. Continuità delle funzioni – Esercizi, 140 – 7.2.1. *Esercizio 1*, 140 – 7.2.2. *Esercizio 2*, 141

143 Capitolo VIII

Funzioni derivabili

8.1. Definizioni e teoremi, 143 – 8.1.1. *Definizione 69. Rapporto incrementale e derivata*, 143 – 8.1.1.2. *Interpretazione geometrica dei concetti di rapporto incrementale e di derivata*, 144 – 8.1.2. *Teorema 15. Relazione tra derivabilità e continuità*, 146 – 8.1.2.1. *Dimostrazione*, 147 – 8.1.3. *Dimostrazione della non derivabilità di $y = |x|$ in $x = 0$* , 148 – 8.1.4. *Definizione 70. Punto di stretta crescita*, 150 – 8.1.5. *Definizione 71. Punto di crescita*, 150 – 8.1.6. *Definizione 72. Punto di stretta decrescenza*, 150 – 8.1.7. *Definizione 73. Punto di decrescenza*, 151 – 8.1.8. *Teorema 16. Crescenza di una funzione*, 151 – 8.1.8.1. *Dimostrazione*, 152 – 8.1.9. *Teorema 17. Decrescenza di una funzione*, 153 – 8.1.9.1. *Dimostrazione*, 153 – 8.1.10. *Teorema 18. Relazione tra segno della derivata prima e crescita/decrescenza di una funzione in un punto*, 154 – 8.1.10.1. *Dimostrazione*, 155 – 8.1.11. *Definizione 74. Punto di massimo relativo proprio*, 155 – 8.1.12. *Definizione 75. Punto di minimo relativo proprio*, 156 – 8.1.13. *Definizione 76. Punto di massimo relativo improprio*, 156 – 8.1.14. *Definizione 77. Punto di minimo relativo improprio*, 156 – 8.1.15. *Definizione 78. Punto di massimo assoluto*, 156 – 8.1.16. *Definizione 79. Punto di minimo assoluto*, 157 – 8.1.17. *Teorema 19. Teorema di Fermat*, 158 – 8.1.17.1. *Dimostrazione*, 158 – 8.1.18. *Teorema 20. Derivazione della funzione composta*, 161 – 8.1.19. *Teorema 21. Derivazione della funzione inversa*, 161 – 8.1.20. *Definizione 80. Derivate di ordine superiore al primo*, 163 – 8.1.21. *Definizione 81. Funzione convessa*, 164 – 8.1.22. *Definizione 82. Funzione concava*, 164 – 8.1.23. *Teorema 22. Convessità e concavità di una funzione*, 165 – 8.1.24. *Teorema 23. Teorema di Rolle*, 166 – 8.1.24.1. *Dimostrazione*, 167 – 8.1.25. *Teorema 24. Teorema di Lagrange*, 168 – 8.1.25.1. *Dimostrazione*, 168 – 8.1.26. *Teorema 25. Teorema di Cauchy*, 171 – 8.1.26.1. *Dimostrazione*, 172 – 8.1.27. *Teorema 26. Teorema di De L'Hôpital*, 173 – 8.2. Regole di derivazione e derivate fondamentali, 174

177 Capitolo IX

Studio di funzione

9.1. Definizioni ed esempi, 177 – 9.1.1. *Definizione 83. Studio di funzione*, 177 – 9.1.1.1. *Studio del dominio*, 177 – 9.1.1.2. *Ricerca di eventuali simmetrie o studio di parità e disparità*, 179 – 9.1.1.3. *Determinazione di eventuali punti di intersezione con gli assi*, 181 – 9.1.1.4. *Studio del segno*, 182 – 9.1.1.5. *Limiti agli estremi del dominio*, 184 – 9.1.1.6. *Studio del segno della derivata prima*, 189 – 9.1.1.7. *Studio del segno della derivata seconda*, 193 – 9.2. Studio di funzione – Esercizi, 196 – 9.2.1. *Esercizio 1*, 196 – 9.2.1.1. *Studio del dominio*, 196 – 9.2.1.2. *Ricerca di eventuali simmetrie o studio di parità e disparità*, 196 – 9.2.1.3. *Determinazione di eventuali punti di intersezione con gli assi*, 197 – 9.2.1.4. *Studio del segno*, 197 – 9.2.1.5. *Limiti agli estremi del dominio*, 198 – 9.2.1.6. *Studio del segno della derivata prima*, 199 – 9.2.1.7. *Studio del segno della derivata seconda*, 201 – 9.2.2. *Esercizio 2*, 203 – 9.2.2.1. *Studio del dominio*, 203 – 9.2.2.2. *Ricerca di eventuali simmetrie o studio di parità e disparità*, 203 – 9.2.2.3. *Determinazione di eventuali punti di intersezione con gli assi*, 204 – 9.2.2.4. *Studio del segno*, 204 – 9.2.2.5. *Limiti agli estremi del dominio*, 205 – 9.2.2.6. *Studio del segno della derivata prima*, 209 – 9.2.2.7. *Studio del segno della derivata seconda*, 211 – 9.2.3. *Esercizio 3*, 214 – 9.2.3.1. *Studio del dominio*, 214 – 9.2.3.2. *Ricerca di eventuali simmetrie o studio di parità e disparità*, 214 – 9.2.3.3. *Determinazione di eventuali punti di intersezione con gli assi*, 215 – 9.2.3.4. *Studio del segno*, 219 – 9.2.3.5. *Limiti agli estremi del dominio*, 220 – 9.2.3.6. *Studio del segno della derivata prima*, 221 – 9.2.3.7. *Studio del segno della derivata seconda*, 223 – 9.2.4. *Esercizio 4*, 225 – 9.2.4.1. *Studio del dominio*, 225 – 9.2.4.2. *Ricerca di eventuali simmetrie o studio di parità e disparità*, 226 – 9.2.4.3. *Determinazione di eventuali punti di intersezione con gli assi*, 226 – 9.2.4.4. *Studio del segno*, 227 – 9.2.4.5. *Limiti agli estremi del dominio*, 227 – 9.2.4.6. *Studio del segno della derivata prima*, 229 – 9.2.4.7. *Studio del segno della derivata seconda*, 231

235 Capitolo X

Sviluppo di Taylor

10.1. Teoremi, 235 – 10.1.1. *Teorema 27. Sviluppo, mediante polinomio di Taylor, con resto di Peano*, 235 – 10.1.1.1. *Dimostrazione delle proprietà del resto di Peano*, 236 – 10.1.2. *Teorema 28. Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange*, 240 – 10.1.2.1. *Significato geometrico del polinomio di Taylor*, 241 – 10.2. Sviluppo di Taylor – Esercizi, 247 – 10.2.1. *Esercizio 1*, 247 – 10.2.2. *Esercizio 2*, 249 – 10.2.3. *Esercizio 3*, 251 – 10.2.4. *Esercizio 4*, 254

257 Capitolo XI

Funzioni integrabili secondo Riemann

11.1. Definizioni, teoremi, proprietà e integrali fondamentali, 257 – 11.1.1. *Definizione 84. Funzione integrabile secondo Riemann*, 257 – 11.1.1.1. *Significato geometrico della somma integrale e dell'integrale secondo Riemann*, 258 – 11.1.2. *Teorema 29. Integrabilità delle funzioni continue*, 264 – 11.1.3. *Teorema 30. Integrabilità delle funzioni monotone e limitate*, 264 – 11.1.4. *Teorema 31. Integrabilità delle funzioni con un numero finito di discontinuità*, 265 – 11.1.5. *Proprietà degli integrali*, 265 – 11.1.5.1. *Proprietà di linearità (I)*, 266 – 11.1.5.2. *Proprietà di linearità (II)*, 267 – 11.1.5.3. *Proprietà di additività*, 268 – 11.1.5.4. *Proprietà del confronto*, 269 – 11.1.5.5. *Proprietà del modulo*, 270 – 11.1.5.6. *Proprietà degli*

estremi di integrazione coincidenti, 272 – 11.1.5.7. *Proprietà dello scambio degli estremi di integrazione*, 273 – 11.1.6. *Teorema 32. Media integrale*, 274 – 11.1.6.1. *Dimostrazione*, 274 – 11.1.6.2. *Interpretazione geometrica*, 277 – 11.1.7. *Teorema 33. Media integrale per funzioni continue*, 278 – 11.1.7.1. *Dimostrazione*, 278 – 11.1.7.2. *Interpretazione geometrica del Teorema della media integrale per funzioni continue*, 279 – 11.1.8. *Definizione 85. Primitiva di una funzione*, 280 – 11.1.9. *Definizione 86. Integrale indefinito*, 281 – 11.1.10. *Definizione 87. Funzione integrale*, 281 – 11.1.11. *Teorema 34. Teorema fondamentale del calcolo integrale o Teorema di Torricelli–Barrow*, 282 – 11.1.11.1. *Dimostrazione*, 282 – 11.1.12. *Teorema 35. I Teorema sulle primitive*, 285 – 11.1.12.1. *Dimostrazione*, 286 – 11.1.13. *Teorema 36. II Teorema sulle primitive*, 286 – 11.1.13.1. *Dimostrazione*, 287 – 11.1.14. *Teorema 37. Integrazione per parti*, 288 – 11.1.14.1. *Dimostrazione*, 288 – 11.2. *Funzioni integrabili secondo Riemann – Esercizi*, 291 – 11.2.1. *Esercizio 1*, 291 – 11.2.2. *Esercizio 2*, 293 – 11.2.3. *Esercizio 3*, 294 – 11.2.4. *Esercizio 4*, 296 – 11.2.5. *Esercizio 5*, 298 – 11.2.6. *Esercizio 6*, 299

301 Capitolo XII

Equazioni differenziali

12.1. *Definizioni*, 301 – 12.1.1. *Definizione 88. Equazione differenziale ordinaria di ordine n* , 301 – 12.1.2. *Definizione 89. Ordine di un'equazione differenziale*, 301 – 12.1.3. *Definizione 90. Forma esplicita, o normale, di un'equazione differenziale*, 302 – 12.1.4. *Definizione 91. Soluzione di un'equazione differenziale*, 302 – 12.1.5. *Definizione 92. Problema di Cauchy*, 303 – 12.1.6. *Definizione 93. Equazioni differenziali a variabili separabili*, 304 – 12.1.7. *Definizione 94. Equazioni differenziali lineari del primo ordine*, 307 – 12.1.8. *Definizione 95. Numero complesso*, 309 – 12.1.9. *Definizione 96. Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti*, 310 – 12.1.9.1. *Metodo risolutivo delle equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti*, 310 – 12.1.9.2. *Metodo risolutivo delle equazioni differenziali del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti*, 314

323 Capitolo XIII

Glossario dei simboli matematici utilizzati

Introduzione

di Serena Doria¹, Valerio Piattelli²

Cari studenti,

questo scritto nasce con la speranza di rappresentare un valido aiuto per tutti coloro che si apprestano allo studio della matematica.

Una cosa che ci preme ricordarvi, prima di lasciarvi alle vostre riflessioni, è che qualunque opera riassuntiva — come lo è la presente — non si pone, e mai potrà porsi, come sostitutiva di alcuna lezione frontale e che è sempre opportuno far riferimento alle parole del docente per chiarire dubbi e curiosità che la lettura può suscitare.

Con la speranza che le spiegazioni offerte, gli argomenti trattati e i numerosi grafici risultino comprensibili, vi auguriamo uno studio fruttuoso, che possa ripagarvi dei sacrifici fatti ed aiutarvi a realizzare quelli che sono i vostri sogni.

Post Scriptum

Per coloro tra voi che ancora si chiedono quale forma di follia affligga chi apprezza la matematica, anche senza farne una ragione di vita, riportiamo qui le parole di Aner Shalev, matematico e scrittore israeliano, nella speranza che possano rivelarsi una risposta, se non esatta, almeno alternativa all'annosa questione: «In matematica puoi costruire le tue strutture. Puoi camminare in mondi creati dall'immaginazione delle persone. Non sei legato al mondo reale. È come essere Dio in un certo senso. Puoi creare mondi, e studiarli. Credo sia per una combinazione della bellezza, dell'immaginazione e della libertà».

¹ Ricercatrice di Probabilità e Statistica Matematica, Dipartimento di Ingegneria e Geologia, Università degli Studi "G. d'Annunzio" di Chieti-Pescara.

² Dottore in Scienze Geologiche.

Elementi di teoria degli insiemi

1.1. Definizioni ed esempi

Il concetto di insieme viene assunto come primitivo; cercheremo, tuttavia, di chiarirlo utilizzando sinonimi.

Si chiama insieme universo (S) la classe che contiene tutti gli oggetti (numeri reali, persone nate in un certo anno ecc.) presi in considerazione nello studio di un dato problema (matematico e non).

1.1.1. Definizione 1. Proprietà

Si definisce proprietà un'affermazione senza equivoci, vera o falsa; si indica con una lettera maiuscola in corsivo (es. " P ").

1.1.2. Definizione 2. Elemento

Si definisce elemento un oggetto dell'insieme universo che soddisfa una determinata proprietà; si indica con una lettera minuscola (es. " x ").

La classe di elementi dell'insieme universo che soddisfano una data proprietà, è un insieme in S e si indica con una lettera maiuscola (es. " A ").

1.2. Rappresentazione degli insiemi

Gli insiemi possono essere rappresentati nei seguenti modi:

- a) per enunciazione (detta anche rappresentazione intensiva o per caratteristica), nella forma $A = \{x \in S \mid x \text{ soddisfa la proprietà } P\}$, con A = insieme considerato, x = elemento dell'insieme universo che appartiene ad A soddisfacendo la proprietà P e P

= proprietà che determina l'appartenenza, o meno, di un elemento all'insieme A;

- b) per elencazione (detta anche rappresentazione estensiva), nella forma $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, scrivendo tutti gli elementi appartenenti all'insieme A (riportati una sola volta, cioè senza considerare le ripetizioni) tra parentesi graffe e separati da una virgola o da un punto e virgola;
- c) tramite diagramma di Eulero–Venn, una rappresentazione grafica di un insieme i cui elementi vengono “racchiusi” all'interno di una linea chiusa non intrecciata (v. Fig. 1.1).

1.2.1. Definizione 3. Sottoinsieme proprio

Dato l'insieme universo S, A è detto sottoinsieme proprio di S se e soltanto se, per ogni elemento appartenente ad A, si ha che quello stesso elemento appartiene anche a S e se esiste almeno un elemento di S che non appartiene ad A. In simboli:

$$A \subset S \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ si ha che } x \in S \text{ et } \exists y \in S \mid y \notin A.$$

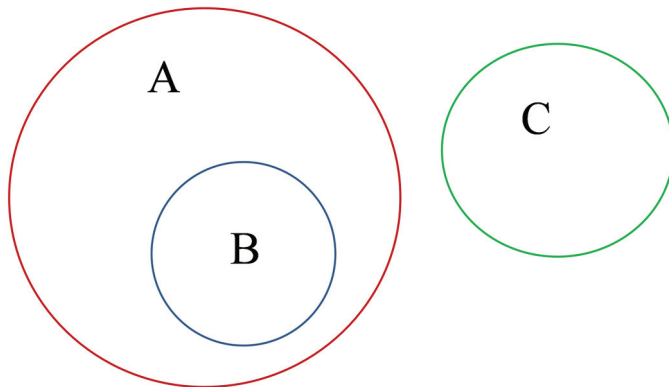


Figura 1.1. Diagramma di Eulero–Venn che indica come l'insieme B sia un sottoinsieme dell'insieme A.

1.2.2. Definizione 4. Sottoinsieme improprio

Dato l'insieme universo S , A è detto sottoinsieme improprio di S se e soltanto se, per ogni elemento appartenente ad A , si ha che quello stesso elemento appartiene anche a S . In simboli:

$$A \subseteq S \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ si ha che } x \in S.$$

1.2.3. Definizione 5. Sottoinsiemi banali

Sono definiti “banali” i seguenti sottoinsiemi:

- a) $\emptyset$, detto insieme vuoto: insieme definito da una proprietà sempre falsa all'interno dell'insieme universo (nessun elemento dell'insieme universo può quindi appartenere all'insieme vuoto);
- b) S , l'insieme universo stesso: insieme definito da una proprietà sempre vera all'interno dell'insieme universo.

1.2.4. Definizione 6. Cardinalità di un insieme

Si definisce cardinalità di un insieme A e si esprime nella forma $|A|$, $\#(A)$ o $\text{card}(A)$ il numero dei suoi elementi. È utile ricordare che

- a) l'insieme dei numeri naturali ha la cardinalità del numerabile;
- b) l'insieme dei numeri reali ha la cardinalità del continuo;
- c) se tra due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca, allora essi hanno la stessa cardinalità.

1.3. Operazioni tra insiemi

1.3.1. Definizione 7. Insieme complementare

Dato l'insieme universo $S \neq \emptyset$ e dato l'insieme $A \subseteq S$, si definisce complementare di A l'insieme A^C dato dagli elementi dell'insieme universo che non appartengono ad A . In simboli:

$$A^C = \{x \in S \mid x \notin A\}.$$

Sono esempi di insiemi complementari i seguenti:

- a) $(A^c)^c = \{x \in S \mid x \notin A^c\} = \{x \in S \mid x \in A\} = A$;
- b) $\emptyset^c = \{x \in S \mid x \notin \emptyset\} = S$;
- c) $S^c = \{x \in S \mid x \notin S\} = \emptyset$.

1.3.2. Definizione 8. Unione tra due insiemi

Dati $A, B \subseteq S$, si definisce unione tra gli insiemi A e B l'insieme formato da tutti gli elementi sia di A che di B (sempre riportati una sola volta, cioè senza considerare le ripetizioni; v. Fig. 1.2). In simboli:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ vel } x \in B\}.$$

Sono esempi di unione tra due insiemi i seguenti:

- a) $\emptyset \cup S = \{x \in S \mid x \in \emptyset \text{ vel } x \in S\} = S$;
- b) $\emptyset \cup \emptyset = \{x \in S \mid x \in \emptyset \text{ vel } x \in \emptyset\} = \emptyset$;
- c) $S \cup S = \{x \in S \mid x \in S \text{ vel } x \in S\} = S$.

L'operazione di unione tra insiemi gode della proprietà commutativa.

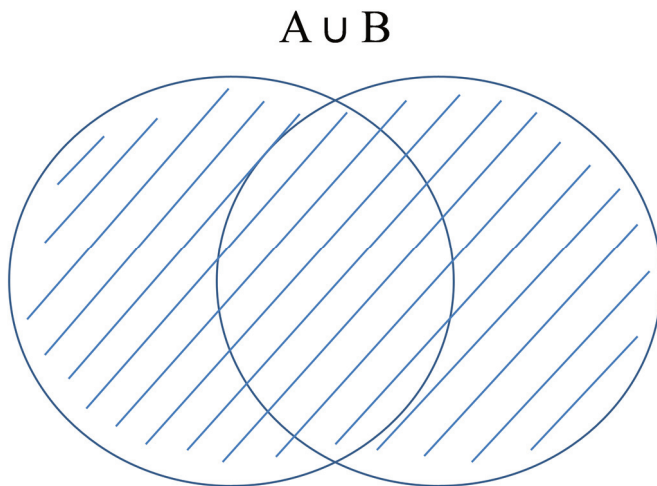


Figura 1.2. Rappresentazione dell'unione tra insiemi.

1.3.3. Definizione 9. Intersezione tra due insiemi

Dati $A, B \subseteq S$, si definisce intersezione tra gli insiemi A e B l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B . In simboli:

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Sono esempi di intersezione tra insiemi i seguenti:

- a) $S \cap \emptyset = \{x \in S \mid x \in S \text{ et } x \in \emptyset\} = \emptyset$;
- b) $S \cap S = \{x \in S \mid x \in S \text{ et } x \in S\} = S$;
- c) $\emptyset \cap \emptyset = \{x \in S \mid x \in \emptyset \text{ et } x \in \emptyset\} = \emptyset$.

L'operazione di intersezione tra insiemi gode della proprietà commutativa.

1.3.4. Definizione 10. Differenza tra due insiemi

Dati $A, B \subseteq S$, si definisce differenza tra gli insiemi A e B l'insieme di tutti gli elementi di A che non appartengono contemporaneamente anche a B . In simboli:

$$A - B = A \setminus B = \{x \in S \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

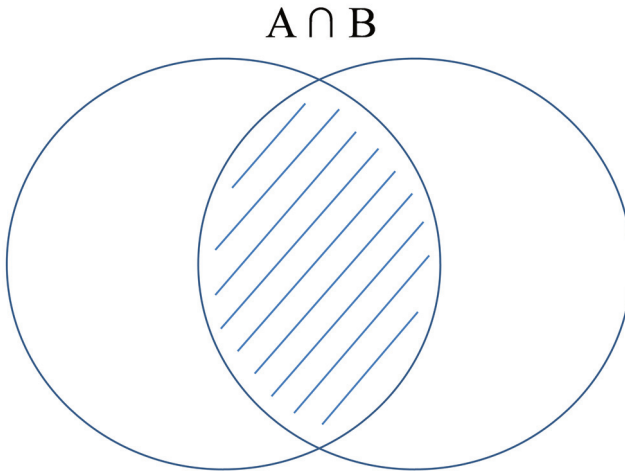


Figura 1.3. Rappresentazione dell'intersezione tra insiemi.

L'operazione di differenza tra insiemi non gode della proprietà commutativa.

1.3.5. Definizione 11. Unione finita tra insiemi

Data una famiglia di insiemi $\{A_i\}$, con $A_i \subseteq S$ ed $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'unione finita tra i suddetti insiemi si esprime nel modo seguente:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in S \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x \in A_i\}.$$

1.3.6. Definizione 12. Intersezione finita tra insiemi

Data una famiglia di insiemi $\{A_i\}$, con $A_i \subseteq S$ ed $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'intersezione finita tra i suddetti insiemi si esprime nel modo seguente:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in S \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ si ha che } x \in A_i\}.$$

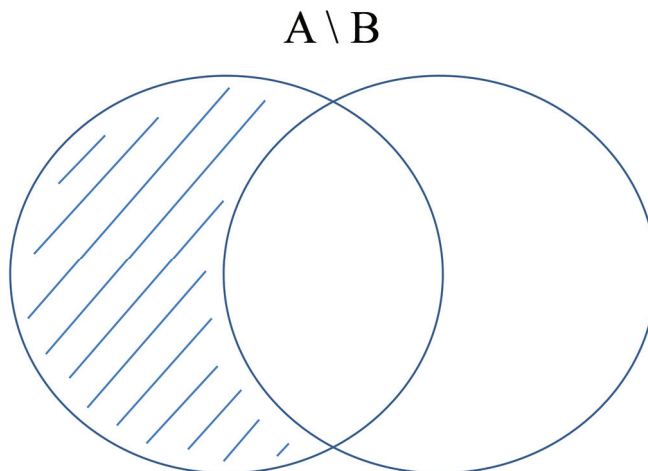


Figura 1.4. Rappresentazione della differenza tra insiemi.