

PHYSICS & LIFE

COLLANA DI FISICA APPLICATA ALLA BIOLOGIA  
ALLA MEDICINA, ALL'AMBIENTE, AI BENI CULTURALI  
ALLE ATTIVITÀ MOTORIE E SPORTIVE E ALLE SCIENZE GASTRONOMICHE

3

*Direttore*

**Giuseppe VERMIGLIO**  
Università degli Studi di Messina

*Comitato scientifico*

**Raffaele NOVARIO**  
Università degli Studi dell'Insubria

**Vincenza SOFO**  
Università degli Studi di Messina

**Caterina SARTORI**  
Istituto Mediterraneo di Bioarchitettura Biopaesaggio Eco-design Onlus

**Karin KNEŠAUREK**  
Icahn School of Medicine at Mount Sinai, New York

## PHYSICS & LIFE

COLLANA DI FISICA APPLICATA ALLA BIOLOGIA  
ALLA MEDICINA, ALL'AMBIENTE, AI BENI CULTURALI  
ALLE ATTIVITÀ MOTORIE E SPORTIVE E ALLE SCIENZE GASTRONOMICHE



La ricerca della verità è più preziosa del suo possesso

Albert EINSTEIN

*Physics in every day life* è uno dei libri fondanti della Fisica applicata alla Biologia, alla Medicina, all'Ambiente e, successivamente, ai Beni culturali, e da poco alle Attività motorie e sportive ed alle Scienze gastronomiche. In altre parole a tutti quei campi in cui quotidianamente ci si confronta inconsciamente con quel che avviene intorno o con quanto ci si trova a fare nella vita per lavoro, per passione o per relax, solitamente senza rendersi conto di come invece, sempre e comunque, la Fisica svolge un ruolo ben preciso ed ha multiformi riscontri. La conoscenza dei quali può rappresentare un importante strumento per meglio operare, od addirittura uno stimolo per indirizzare od approfondire la propria ricerca. Obiettivi questi che la collana si propone di affrontare e stimolare.



*Vai al contenuto multimediale*

Ciro Marmolino

**Introduzione ai metodi matematici  
nelle scienze fisiche e naturali**

*Prefazione di*  
Salvatore Capozziello





Aracne editrice

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

Copyright © MMXVII  
Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

[www.giacchinoonoratieditore.it](http://www.giacchinoonoratieditore.it)  
[info@giacchinoonoratieditore.it](mailto:info@giacchinoonoratieditore.it)

via Vittorio Veneto, 20  
00020 Canterano (RM)  
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0398-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: luglio 2017

*A Domenico e Alberto*



# Indice

- 13 *Prefazione*  
di Salvatore Capozziello
- 17 *Introduzione*
- 23 *Capitolo I*  
*Compendio di aritmetica e algebra*
- 1.1. Aritmetica, 23 – 1.1.1. *Potenze*, 25 – 1.1.2. *Notazione scientifica e potenze di 10*, 28 – 1.1.3. *Cifre significative*, 31 – 1.2. Algebra, 35 – 1.2.1. *Prodotti notevoli e teorema binomiale*, 36 – 1.2.2. *Equazioni algebriche*, 36 – 1.2.3. *Progressioni*, 39 – 1.2.4. *Serie geometriche*, 44 – 1.3. *Misure di grandezze fisiche*, 52 – 1.3.1. *Dimensioni, sistemi di unità e fattori di conversione*, 53 – 1.3.2. *Errori sperimentali*, 56 – 1.3.3. *Propagazione degli errori*, 64 – 1.4. *Soluzioni esercizi*, 68.
- 71 *Capitolo II*  
*Geometria analitica, funzioni e grafici*
- 2.1. Geometria analitica, 71 – 2.1.1. *Problemi elementari*, 72 – 2.1.2. *Equazioni di curve nel piano*, 74 – 2.1.3. *Semplici applicazioni*, 89 – 2.2. *Funzioni*, 94 – 2.2.1. *Funzioni continue*, 100 – 2.2.2. *Funzioni di due variabili indipendenti*, 102 – 2.2.3. *Funzioni implicite*, 104 – 2.2.4. *Funzioni elementari*, 106 – 2.2.5. *Funzioni trigonometriche*, 110 – 2.3. *Misure di distanza*, 120 – 2.3.1. *La distanza della Luna*, 122 – 2.4. *Diagrammi semilog e log-log*, 125 – 2.5. *Soluzioni esercizi*, 130.
- 133 *Capitolo III*  
*Calcolo differenziale ed integrale*
- 3.1. *Derivate*, 133 – 3.1.1. *Regole di derivazione*, 139 – 3.1.2. *Derivate delle funzioni trigonometriche*, 144 – 3.1.3. *Derivata della funzione logaritmica*, 145 – 3.1.4. *Derivata della funzione esponenziale*, 147 – 3.1.5. *Derivata seconda e derivata parziale*, 148 – 3.2. *Differenziali*, 153 – 3.3. *Problemi di massimo e minimo*, 157 – 3.3.1. *Area massima di un rettangolo*, 158 – 3.3.2. *Il principio*

di Fermat, 159 – 3.3.3. *Il metodo dei minimi quadrati*, 162 – 3.4. Integrali, 167 – 3.4.1. *L'integrale indefinito*, 167 – 3.4.2. *L'integrale definito*, 178 – 3.4.3. *Il teorema fondamentale del calcolo integrale*, 185 – 3.5. Il calcolo integrale, 189 – 3.5.1. *L'effetto gravitazionale di corpi estesi*, 190 – 3.5.2. *La lunghezza di un arco di curva*, 193 – 3.6. Soluzioni esercizi, 196.

## 201      Capitolo IV

### *Equazioni differenziali ordinarie del I ordine*

4.1. Modelli matematici, 205 – 4.2. Definizioni e nomenclatura, 208 – 4.2.1. *La soluzione generale di una EDO del I ordine*, 210 – 4.3. Significato geometrico delle EDO del I ordine, 215 – 4.4. Metodi analitici risolutivi di EDO del I ordine, 220 – 4.4.1. *Separazione delle variabili*, 221 – 4.4.2. *Equazioni lineari*, 223 – 4.4.3. *Metodi di sostituzione*, 225 – 4.5. Metodi numerici, 230 – 4.5.1. *Il metodo di Eulero*, 231 – 4.5.2. *Il metodo di Runge-Kutta*, 238 – 4.6. Soluzioni esercizi, 239.

## 243      Capitolo V

### *Applicazioni di EDO del I ordine*

5.1. Problemi geometrici, 243 – 5.1.1. *Fluido in rotazione*, 243 – 5.1.2. *Curve di inseguimento*, 250 – 5.1.3. *Specchio parabolico*, 253 – 5.2. Dinamica di una particella in linea retta, 256 – 5.2.1. *Caduta libera*, 256 – 5.2.2. *Caduta in un mezzo resistente*, 260 – 5.3. Problemi di decomposizione e crescita, 266 – 5.4. Modello logistico, 276 – 5.4.1. *Modello di Verhulst*, 276 – 5.4.2. *Altre applicazioni del modello logistico*, 278 – 5.5. Altri problemi che portano ad EDO del I ordine, 285 – 5.5.1. *Problemi di temperatura*, 285 – 5.5.2. *Problemi di diluizione*, 286 – 5.5.3. *Legge di Torricelli*, 289 – 5.6. Soluzioni esercizi, 293.

## 297      Capitolo VI

### *Equazioni differenziali ordinarie del II ordine*

6.1. Equazioni del II ordine riducibili, 297 – 6.2. Equazioni lineari, 300 – 6.2.1. *Indipendenza lineare di funzioni*, 306 – 6.2.2. *Soluzione generale*, 309 – 6.3. EDO lineari ed omogenee a coefficienti costanti, 316 – 6.3.1. *Due radici reali e distinte*, 318 – 6.3.2. *Due radici reali e coincidenti*, 319 – 6.3.3. *Due radici complesse coniugate*, 322 – 6.4. EDO lineari non omogenee a coefficienti costanti, 325 – 6.4.1. *Soluzione con il metodo dei coefficienti indeterminati*, 325 – 6.4.2. *Soluzione con il metodo della variazione dei parametri*, 336 – 6.4.3. *Soluzione usando variabili complesse*, 342 – 6.5. Soluzioni esercizi, 345.

- 349 **Capitolo VII**  
*Applicazioni di EDO del II ordine*
- 7.1. Problemi geometrici: la catenaria, 349 – 7.2. Oscillazioni meccaniche, 356 – 7.2.1. *Oscillazioni libere non smorzate*, 358 – 7.2.2. *Oscillazioni libere smorzate*, 363 – 7.2.3. *Oscillazioni forzate e risonanza*, 369 – 7.3. Oscillazioni in circuiti elettrici, 380 – 7.4. Problemi che danno origine a sistemi di EDO, 385 – 7.4.1. *Modelli di popolazioni interagenti*, 386 – 7.4.2. *Il modello di Lotka–Volterra*, 387 – 7.4.3. *Il modello con competizione di Lotka–Volterra*, 395 – 7.5. Soluzioni esercizi, 400.
- 403 *Appendice A. Le serie*
- 413 *Appendice B. Numeri complessi e funzioni complesse*
- 431 *Bibliografia*
- 433 *Indice analitico*



# Prefazione

di SALVATORE CAPOZZIELLO\*

L'insegnamento della Matematica nei corsi di laurea scientifici presenta da sempre difficoltà dovute al metodo, alla quantità e all'efficacia delle nozioni da trasmettere e rendere operative. Il problema che i docenti spesso affrontano è come bilanciare il rigore dei contenuti matematici e far applicare agli studenti teoremi e definizioni. Molti colleghi delle classi di Fisica, Chimica, Biologia e Scienze naturali sperimentano la situazione in cui gli studenti non sanno operare con quanto studiato nei corsi di Analisi matematica, di Geometria e di Metodi matematici. In particolare, da fisico che insegna la Fisica generale, devo rendere "applicabili" nozioni impartite da validissimi colleghi matematici che spesso trascurano l'aspetto pratico di quello che insegnano. Capita spesso di trovarmi di fronte studenti che conoscono benissimo i teoremi sulle derivate, sugli integrali e sulle equazioni differenziali ma poi, all'atto pratico di applicarli ai problemi di Fisica, di Chimica o anche di Biologia (si pensi all'analisi statistica, ad esempio), non sanno operare efficacemente.

L'opera del prof. Marmolino, a mio giudizio, colma una lacuna dell'editoria italiana soddisfacendo le esigenze a cui si accennava di sopra. Già scorrendo l'indice, ci si rende conto della "competenza sul campo" dell'autore. Chiaramente, insegnando ai primi anni dei corsi di laurea di Scienze naturali, il primo problema da porsi è come far passare gli studenti da una trattazione prettamente "liceale" della matematica a una rigorosa e operativa per l'Università.

I primi tre capitoli dell'opera svolgono egregiamente questo compito: il lettore, essenzialmente, transisce dalle nozioni proprie dei manuali delle scuole medie superiori a quelle di una trattazione universitaria della matematica, partendo dall'Algebra elementare, passando

\* Professore Ordinario di Astronomia e Astrofisica, Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

attraverso la Geometria analitica e finendo col Calcolo differenziale e integrale. Ho trovato questa prima parte davvero preziosa nella prospettiva di fornire le basi matematiche comuni a chi proviene da percorsi di studio completamente diversi (ad esempio Licei classici e scientifici, Istituti professionali e altro).

Accanto a questa “lettura”, che direi “di compendio di matematica”, già dai primi capitoli l’opera si struttura in modo sistematico. Il prof. Marmolino introduce nozioni ed esempi propri di una trattazione avanzata. Penso alla discussione della teoria dell’errore nel primo capitolo, alla misura delle distanze e al calcolo della distanza Terra–Luna nel secondo.

Il legame tra quanto si insegna nelle scuole medie superiori e uno sviluppo universitario degli argomenti è già evidente nel capitolo terzo. Oltre alle nozioni proprie del calcolo differenziale e integrale, l’autore introduce una serie di argomenti importanti che, in un certo modo, rendono “concreti” i risultati esposti. Penso, ad esempio, al principio di Fermat, all’effetto gravitazionale dei corpi estesi e al calcolo della lunghezza dell’arco di curva.

L’opera si sviluppa come manuale genuinamente utile per corsi universitari dal capitolo quarto in poi. Ciro Marmolino, a mio avviso, coglie l’aspetto più saliente dell’insegnamento della matematica nei corsi di Scienze naturali, cioè lo studio e l’applicazione delle Equazioni differenziali ordinarie (EDO) del primo e del secondo ordine.

Problemi di questo tipo sono presenti nella Matematica applicata, nella Fisica, nella Chimica, nell’Ingegneria, fino alla Biologia. Lo studente, come anche lo studioso professionista, sono spesso disorientati dall’enorme quantità di testi disponibili in cui trovare una trattazione delle EDO direttamente applicabile ai problemi pratici delle Scienze naturali. Il rischio è che ci si perda in ricerche che “non servono” eludendo l’obiettivo che si vuole conseguire. Nella prospettiva di avere un manuale rigoroso, esaustivo e soprattutto pratico per le EDO, ho trovato egregia l’opera di Marmolino. Accanto alle definizioni e agli enunciati, la trattazione è compendiata da una grande quantità di esempi su come usare le EDO. Marmolino sembra rispondere immediatamente alla domanda “a che serve?”.

Il lettore è portato a “risolvere” i problemi partendo da esempi fisici. Penso ai problemi di temperatura, ai problemi di diluizione,

alla legge di Torricelli, fino alla catenaria, alle oscillazioni libere e smorzate, al modello di Lotka–Volterra per le popolazioni. Tutta la trattazione, dai concetti più elementari fino agli argomenti più avanzati, è corredata da esempi e problemi da risolvere. In questo senso, l'opera ha il pregio di essere auto-consistente e adatta anche a uno studio autonomo. Accanto allo studente, è fruibile anche dal ricercatore che ha bisogno di un manuale di riferimento rigoroso e completo mentre svolge le sue ricerche.

Le appendici finali sono essenziali e utilissime. Ho apprezzato il fatto che l'autore si è soffermato sulle serie di potenze, sui numeri e sulle funzioni complesse: tali argomenti sono quelli che sistematicamente sfuggono allo studente e difficilmente vengono recuperati in altri corsi.

In sintesi, credo che il testo del prof. Marmolino non sia una semplice aggiunta a quanto già esistente nell'editoria scientifica italiana, ma un'opera preziosa che mi auguro diventi un riferimento per studenti e studiosi delle materie scientifiche.

Napoli, 10 giugno 2017



## Introduzione

Questo libro è lo sviluppo degli appunti che ho usato per diversi anni all'Università del Molise per un corso di introduzione ai metodi matematici rivolto agli studenti di primo livello di Scienze Biologiche e Informatica. In esso provo a discutere, in maniera molto introduttiva, dei metodi per mezzo dei quali la matematica trova applicazioni nelle scienze.

Lo scopo di quella che nella cultura anglosassone è indicata come “applied mathematics” è molto ampio e può ben essere descritto prendendo in prestito le parole utilizzate da Einstein per descrivere la fisica: « quella parte del complesso della nostra conoscenza che è suscettibile di venir espressa in termini matematici »<sup>1</sup>, che definiscono la fisica, ma non solo, in quanto si possono estendere anche alle teorie matematiche della biologia, dell'economia, dell'ingegneria delle comunicazioni etc..

Il processo di usare la matematica per aumentare la conoscenza scientifica si può convenientemente dividere nei seguenti tre passi:

- a) la formulazione del problema scientifico in termini matematici, a sua volta suddivisibile in due fasi:
  - la fase “fisica”, che consiste nella formulazione di ipotesi e congetture;
  - la sua traduzione in equazioni;
- b) la soluzione dei problemi matematici così creati;
- c) l'interpretazione della soluzione e la sua verifica empirica in termini scientifici.

C'è un diffuso malinteso che il secondo passo sia il più importante e che le abilità manipolative siano la qualità di maggior valore di un *applied mathematician*. Parlando in generale, tutte e tre le fasi

1. A. EINSTEIN, *Pensieri degli anni difficili*, trad. it. di L. Bianchi, Boringhieri, Torino 1965, p. 114.

sono ugualmente importanti. In una data classe di problemi, un passo potrebbe emergere come il più importante o il più difficile degli altri.

La conoscenza dei metodi e la competenza nelle abilità manipolative sono ovviamente necessarie. Infatti lo studio delle scienze che per loro natura, o nella misura in cui, hanno a che fare con quantità misurabili esprimibili in numeri, sarà di pochissimo valore per uno studente che non è a suo agio con la matematica. Studiare queste scienze ostacolati da una sostanziale incapacità ad usare i numeri in maniera fluente è come cercare di leggere una lingua straniera senza avere familiarità con il suo vocabolario e la sua sintassi. È opportuno qui ricordare una citazione ormai classica:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) ma non si può intender se prima non si impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, ei caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola.<sup>2</sup>

Anche se attualmente, diversamente da Galileo, siamo più propensi a considerare l'algebra, piuttosto che la geometria, come la sua sintassi elementare.

Ma è essenziale capire che questa conoscenza non è sufficiente per chi voglia lavorare come uno scienziato indipendente. Deve anche essere capace di esercitare *giudizio* nella formulazione di un problema, nelle decisioni su quali problemi affrontare, e nelle scelte su quali idealizzazioni ed approssimazioni adottare per semplificare un problema senza perderne i caratteri essenziali.

Infine, è della massima importanza estrarre, dalla teoria matematica, le appropriate conclusioni e implicazioni scientifiche per la verifica empirica. Per quanto possibile, le conclusioni debbono essere ridotte nella forma più semplice ed espresse nei termini più specifici. Questo passo rappresenta da una parte il culmine di tutto lo sforzo e dall'altra la base per futuri progressi.

Il libro è pertanto strutturato nel modo seguente: da una parte revisione e ripetizione di alcuni concetti matematici. Per la maggior parte, sono argomenti già affrontati nella carriera scolastica di uno

2. G. GALILEI, *Il Saggiatore, Opere*, vol. VI, Barbera, Firenze 1890-1909, 20 voll., p. 232.

studente di primo livello in Biologia, Scienze Naturali, Informatica, dalla scuola media e media superiore ai corsi di matematica e fisica del primo anno. C'è un solo argomento realmente nuovo ed è quello relativo alle equazioni differenziali ordinarie, al quale dedico particolare attenzione perché è l'argomento che meglio mi consentirà di dimostrare l'efficacia della matematica nelle scienze. L'algebra è sufficiente a risolvere molti problemi statici, ma i fenomeni naturali più interessanti implicano e sono descritti da equazioni che collegano quantità che variano. Poiché la derivata di una funzione è il tasso con cui la quantità rappresentata dalla funzione cambia rispetto alla variabile indipendente (molto spesso, ma non necessariamente, il tempo), è naturale che equazioni che coinvolgono derivate siano frequentemente usate per descrivere i cambiamenti naturali. Una equazione che mette in relazione una funzione incognita e una o più delle sue derivate si chiama appunto equazione differenziale. Ci sono inoltre nell'indice del libro temi che normalmente si trovano solo in libri di testo di livello più avanzato, questo non dovrebbe essere interpretato come una errata indicazione dei suoi prerequisiti. Ho cercato sempre di partire dall'abc di ogni argomento e di impiegare argomentazioni che possano essere apprezzate da studenti del primo livello.

Dall'altra affrontare problemi che richiedono per la loro soluzione la conoscenza e la proficienza nell'uso dei metodi appena descritti. Vale la pena di spendere qualche parola su che cosa intendo in questo caso con "problemi". Non mi riferisco tanto ai problemi proposti alla fine di ogni capitolo di un libro di matematica o di fisica, che, in questo contesto, preferisco chiamare esercizi e che ovviamente pure vengono affrontati per "riscaldare i muscoli". Questi esercizi sono ben formulati, il loro obiettivo è la determinazione di una incognita ben definita e il testo dell'esercizio indica senza ambiguità i dati e la condizione per cui l'incognita viene determinata, mentre il libro descrive nel paragrafo corrispondente i concetti e le tecniche necessarie alla sua soluzione<sup>3</sup>.

Per riuscire a dimostrare l'efficacia della matematica nell'avanzamento delle scienze invece cercherò di affrontare almeno alcuni dei problemi nella maniera in cui si affronta la ricerca scientifica, cioè

3. Invito lo studente a risolvere tutti (o almeno[...] quasi tutti) gli esercizi proposti per controllare il proprio grado di apprendimento dei concetti e delle tecniche discusse.

delle situazioni in cui c'è una domanda ma non è immediatamente chiaro quali siano i dati e le condizioni. Siamo cioè di fronte ad un fenomeno (per esempio, un cavo sospeso, un fluido in rotazione) lo osserviamo e ci poniamo delle domande (per esempio, quale sia la forma del cavo o della superficie in rotazione), ma il fenomeno osservato non ci dà nulla per sé. Dobbiamo prendere quello che ci serve. In particolare dobbiamo produrre i concetti, i termini in cui la condizione che determina l'incognita deve essere espressa.

Di fronte a qualsiasi parte della realtà osservabile, non siamo mai in possesso di una conoscenza completa, né in uno stato di completa ignoranza, anche se di solito molto più vicino a quest'ultima condizione. Se affrontiamo il nostro problema non conoscendo la teoria generale che comprende il caso concreto davanti a noi<sup>4</sup> (nel caso degli esempi, la statica e l'idrodinamica), abbiamo una migliore possibilità di capire l'atteggiamento tipico dello scienziato che usa la matematica per capire il mondo che ci circonda. È ovvio, tuttavia, che dobbiamo avere una qualche familiarità con la dinamica elementare di un punto materiale.

Nella sua forma finale il libro contiene certamente più materiale di quanto possa essere coperto in un corso di sei crediti formativi. Questo, più il fatto che c'è una graduale crescita nel suo livello, dovrebbe renderlo adattabile a diverse esigenze. Per esempio, un corso rivolto a studenti che non abbiano mai avuto occasione di pensare in termini di applicazioni della matematica alle scienze, potrebbe limitarsi a coprire accuratamente il materiale fino al capitolo 5 incluso. Un corso leggermente più avanzato potrebbe iniziare con una rassegna molto rapida del materiale dei primi due capitoli, lasciando i dettagli alla lettura individuale, e coprire accuratamente i restanti capitoli.

Ovviamente, poiché tutti i temi affrontati in questi appunti sono standard, mi sono ispirato e combinato discussioni ed approcci sparsi su testi diversi e pertanto per tutto il testo, salvo casi particolari, il riferimento è dato dall'insieme di volumi riportati nella bibliografia finale. Ho trovato anche molto utili le video-lezioni del seguente corso: H. MILLER, A. MATTUCK, *18.03 Differential Equations*, Spring 2010. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare), <http://ocw.mit.edu> (Accessed 12 Apr, 2016). License: Creative Commons BY-NC-SA.

4. Se cioè ci troviamo nelle condizioni in cui uno studente esclamerebbe: « ma professore, questo non c'è nel programma! ».

Desidero infine ringraziare Sergio Castronuovo, che ha avuto la pazienza di leggere e commentare una versione preliminare di tutto il libro.