ALEF

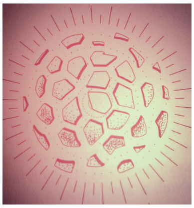
COLLANA DI LOGICA MATEMATICA, ALGEBRA E GEOMETRIA

2

Il logo richiama il *paradosso di Banach-Tarski*, per il quale, accettando l'assioma della scelta, è possibile ripartire una sfera di R^3 in un numero finito di parti e, mediante rotazioni e traslazioni, ricomporle ottenendo due sfere aventi lo stesso volume della sfera data.

ALEF

COLLANA DI LOGICA MATEMATICA, ALGEBRA E GEOMETRIA



L'essenza della Matematica è nella sua libertà

George Cantor

Áleph ($\aleph$) è la prima lettera dell'alfabeto fenicio e la prima lettera dell'alfabeto ebraico. In matematica il simbolo $\aleph_0$ (*aleph–zero*) indica il numero cardinale dell'insieme dei numeri naturali ed è il più piccolo numero cardinale transfinito.

La nascita e lo sviluppo della teoria degli insiemi, a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, fu resa possibile dall'accettazione, principalmente da parte di Cantor, del concetto di infinito attuale. Il linguaggio degli insiemi è l'alfabeto comune con cui si esprimono la Logica, l'Algebra e la Geometria e la maggior parte dei settori della Matematica.

Le tre discipline, negli ultimi due secoli, hanno avuto un considerevole e progressivo sviluppo, sia teorico che pratico, tale da costituire oggi il nucleo di base e il fondamento delle competenze nella maggior parte delle aree scientifiche. Tutto ciò ha reso necessaria la conoscenza sempre più approfondita ed estesa dei risultati ottenuti e dei metodi coinvolti nell'ambito della ricerca di queste tre materie.

ALEF ha, tra i suoi obiettivi, proprio quello di soddisfare tale esigenza di divulgazione e diffusione di dati, teorie, modelli e metodi, attraverso pubblicazioni che accolgano manuali universitari e cicli di lezioni di dottorato, monografie e atti di convegni, sia nazionali che internazionali.

Antonio Pasini

Convivere con gli errori

Aspetti numerici dell'algebra lineare

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0322-7

I edizione: giugno 2017

Indice

Capitolo I

Propositi e contenuti

I.1 Come è nato questo libro

Perchè, con alle spalle una carriera come geometra, mi sono messo in testa di scrivere di calcolo numerico, anche se solo di una parte di questa materia, quella che rientra sotto la denominazione di algebra lineare numerica? Ciascuno dovrebbe accontentarsi del proprio mestiere.

Si, in generale ciascuno dovrebbe attenersi al proprio mestiere. Ma, a parte il fatto che, essendo ormai un pensionato, non appartengo più ad un mestiere, non di rado accade che proprio il voler fare bene il proprio mestiere ci porti alla necessità di oltrepassarne i limiti, per velleitario che questo sia.

Ho insegnato algebra lineare a studenti di ingegneria per quasi trent'anni. Mi sono sempre reso conto che quello che potevo dire ai miei studenti restava spesso irritantemente incompleto. Insegnavo a risolvere sistemi lineari. Ma poi, cosa accade in realtà quando proviamo a risolverne uno? Fino a che punto ci si può fidare delle soluzioni che si trovano? Naturalmente, intendo un sistema vero, di quelli che può capitare di dover risolvere nella vita reale, non quelle banalità caricaturalmente miniaturizzate che esibiamo in aula o inseriamo nelle prove scritte (non potendo fare diversamente, del resto). Oppure, illustravo vari metodi per calcolare determinanti o invertire matrici, alcuni più svelti, altri più macchinosi. Ma non potevo spiegare cosa 'macchinoso' significasse veramente. Spiegavo come calcolare autovalori ed autospazi. Ma non potevo dire nulla del rischio che i nostri calcoli ci dessero risultati inesatti e di quali strategie adottare per porvi rimedio, per contenere quelle inesattezze entro limiti accettabili.

Trattando di autovalori, entra in scena anche il problema della risoluzione di un'equazione algebrica. E qui mi trovavo sempre a dover combattere con ingenuità, quando non autentiche fesserie, tenacemente radicate nelle teste degli studenti. Ma non potevo affrontarle con l'efficacia che avrei voluto. Per farlo, avrei dovuto sconfinare nel calcolo numerico, appunto. Ma ho sempre evitato di farlo. Fino al giorno in cui, nel quadro di una riorganizzazione dell' offerta didattica della Facoltà (si chiamava ancora così, si era nel 2008), mi venne proposto di inserire nel mio corso anche un po' di calcolo numerico.

La proposta scaturiva come effetto collaterale da una complessa alchimia che combinava vincoli ministeriali su crediti e afferenze con le effettive risorse umane della Facoltà. L'idea mi stupì, ma volli provare. Messa in atto con qualche cautela, funzionò, meglio di come avessi sperato. Quell'esperimento sta all'origine di questo libro. Dovetti scrivere dispense che permettessero agli studenti, non di impadronirsi di tutta la materia, ma almeno di familiarizzarsi con alcuni suoi aspetti, senza che ciò dovesse comportare per loro troppa fatica in più. Questo libro sviluppa quel materiale, ben oltre i limiti entro i quali era costretto. Ma in esso confluiscono anche altre esperienze.

Ho sempre creduto giusto che un matematico, collocato in una facoltà di ingegneria, trovasse anche uno spazio per un'attività di consulenza a vantaggio dei colleghi ingegneri. Un'attività da affrontare senza facilonerie ma anche senza troppe ambizioni, e da tener distinta dall'impegno nella ricerca, che è altra cosa. Senza dover ripudiare sè stessi, dunque.

Fu così che mi ritrovai coinvolto in cose che mi impegnarono ben oltre i limiti che credevo di essermi imposto. Dovetti farmi una cultura in teoria dei numeri, teoria dei sistemi ... ed anche in calcolo numerico. Infatti le questioni di algebra lineare che i colleghi mi sottoponevano erano quasi sempre questioni di algebra lineare numerica. Questo libro conserva anche traccia di quell'affaticarmi.

I.2 Propositi e tema

Certamente non mi propongo di offrire un quadro completo di ciò che ad oggi si sa fare in algebra lineare numerica, e nemmeno di condurre il lettore ad impadronirsi di questa disciplina. Per questo ci si dovrebbe rivolgere ad altri libri, concepiti e realizzati con più competenza del mio. Ne cito solo alcuni, scelti tra quelli che ho avuto occasione di leggere o consultare: [9], [15], [1], ma anche [3], oppure [8]. Mi propongo invece di portare il lettore ad acquisire consapevolezza di certi problemi e difficoltà, della loro pervasività, e a farsi un'idea delle strategie per affrontarle.

Innanzitutto, quando diciamo di conoscere la soluzione di un problema matematico (per esempio, di un'equazione), spesso abbiamo solo un'indicazione di come trovarla (una formula risolutiva, per esempio). Al momento di tradurre in pratica quelle indicazioni, ci si scontra con l'impossibilità di applicarle fedelmente: non possiamo operare con i numeri che in realtà dovremmo considerare o produrre, come dati iniziali o come risultati dei calcoli. Dobbiamo accontentarci di approssimazioni. Anche se i valori presi come dati iniziali fossero quelli esatti, nel procedere del calcolo siamo poi costretti ad ogni passo ad effettuare arrotondamenti. Questi, accumulandosi, inquinano sempre il risultato finale, in qualche misura.

Non è facile capire fino a che punto questo inquinamento possa risultare grave. Non perché sia difficile stimare, in via puramente ipotetica, quale possa essere il massimo danno che, per un dato algoritmo, gli arrotondamenti possono provocare. Il fatto è che queste stime danno sempre risultati troppo sconfortanti, che non sarebbe ragionevole prendere molto sul serio. Infatti, normalmente, i danni imputabili agli arrotondamenti restano di gran lunga inferiori a quanto quelle stime minacciano, e in molti casi non hanno conseguenze pratiche molto importanti. Però 'normalmente' non significa 'sempre'. Si vorrebbe una stima più realistica della probabilità che gli arrotondamenti effettuati durante il calcolo facciano esplodere l'errore che si riversa sul risultato finale. Ma per arrivare a questo bisognerebbe prima aver capito perché di solito le cose vanno tanto meglio di come si potrebbe temere.

A queste domande non so cosa rispondere. Neppure sono riuscito a trovare risposte in quel poco di letteratura che ho potuto esaminare; almeno, non risposte che mi convincano. Mi riesce quindi difficile abbandonare il vecchio consiglio di preferire, quando possibile, procedure asintotiche a metodi diretti, generalmente meno esposte dei secondi al rischio che gli arrotondamenti provochino guasti rilevanti, anche concedendo che questo rischio sia forse più ipotetico che reale.

L'opposizione tra metodi diretti e procedure asintotiche percorre tutto questo libro. Un *metodo diretto* è un algoritmo che, se tutti i calcoli da esso richiesti fossero eseguiti con assoluta precisione, in un numero finito di passi ci fornirebbe la soluzione esatta del problema considerato. In pratica però, non potendo evitare arrotondamenti, la soluzione che l' algoritmo ci propone non può essere precisa. L'errore che la inquina può variare entro un certo margine, tanto più ampio quanto più l'algoritmo è complesso. Per restringere quel margine possiamo solo aumentare la precisione con cui eseguiamo i calcoli. In teoria, questo lo si potrebbe sempre fare, nella realtà no.

Le procedure asintotiche sono solitamente chiamate metodi iterativi, ma preferisco dirle asintotiche. Anche un metodo diretto per lo più sfrutta l'iterazione di un'operazione o complesso di operazioni, e potremmo quindi dirlo 'iterativo' (come del resto fanno alcuni autori, che annoverano certi metodi diretti tra quelli iterativi). Ciò che caratterizza una procedura asintotica non è tanto il fatto di richiedere l'iterazione di un certo gruppo di operazioni, ma piuttosto la rinuncia alla pretesa di fornire la soluzione definitiva del problema che si affronta, offrendoci invece la possibilità di avvicinarci ad essa indefinitamente (asintoticamente, appunto).

Infatti una *procedura asintotica* è una regola per generare una successione che tende alla soluzione del problema considerato. Per ricavarne un risultato, possiamo solo interrompere la successione, accontentandoci così di una approssimazione della soluzione cercata. In linea di principio, perseverando nella costruzione della successione tanto quanto occorra, possiamo ottenere approssimazioni buone quanto si vuole, ma in pratica non è così. Dobbiamo darci un criterio per stabilire quando interrompere la successione, ma non sempre il criterio che abbiamo scelto garantisce che l'approssimazione della quale ci accontentiamo sia vicina alla soluzione quanto vorremmo. Oltre a ciò, la precisione con cui eseguiamo i calcoli è necessariamente limitata. Gli arrotondamenti che ne conseguono fanno si che, anche in assenza di criteri d'arresto, esista sempre nella successione un punto che non possiamo o non avrebbe senso oltrepassare, anche se questo comportasse di doversi accontentare di un'approssimazione ancora insoddisfacente.

Insomma, gli arrotondamenti fanno sentire i loro effetti anche quando si adottano procedure asintotiche. Però, in una procedura asintotica, quegli effetti sono generalmente poco importanti. In genere, possiamo tenerli sotto controllo. Infatti, normalmente, una procedura asintotica è congegnata in modo da potersi autocorreggere: se, per effetto di qualche arrotondamento troppo disinvolto o per qualche altra ragione, al passo n-esimo ottenessimo un valore troppo distante da quello che avremmo ottenuto se non avessimo fatto alcun errore, difficilmente la procedura convergerà ad un valore sbagliato o smetterà di convergere. Di solito riprenderà a convergere verso il valore giusto, come se la costruissimo ex novo, con una diversa scelta del punto di partenza. Insomma, avremmo solo perso un po' di tempo, vanificando il lavoro fatto fino a quel momento. Questo può essere seccante (in certe situazioni, anche più che seccante), ma non è lo stesso che prendere per buono un risultato sballato.

D'altra parte, le procedure asintotiche soffrono di una grave debolezza: per lo più, si possono applicare solo a certi casi, che soddisfino particolari condizioni tali da garantire che la successione che si vuole costruire converga. Per esempio, il metodo di Jacobi per la risoluzione di un sistema lineare si applica solo a sistemi con matrice a diagonale dominante. Il metodo delle potenze per la determinazione di autovalori o autovettori si applica solo a trasformazioni che ammettano autovalore principale. Raramente un metodo diretto deve sottostare a limitazioni altrettanto severe.

Il confronto tra metodi diretti e procedure asintotiche è dunque il tema di questo libro. In questa prospettiva, non serve che io passi in rassegna tutti i metodi e le procedure escogitate per risolvere determinati problemi (cosa che del resto potrei fare solo in modo molto superficiale). Mi accontenterò di sceglierne alcuni e discuterli a fondo, cercando anche di portare il lettore ad entrare nei panni di una macchina che dovesse eseguire l'algoritmo previsto dal metodo che consideriamo, di fargli fare (in scala ridottissima, naturalmente) le stesse cose che farebbe la macchina. Solo così potrà poi capire nel loro giusto senso le risposte che le macchine gli daranno, quando le interrogherà.

In quasi tutti gli esempi che discuterò mi metterò nell'ipotesi che si disponga solo di tre cifre decimali significative. Ammetto che si tratta di un'ipotesi irrealistica: di solito si usano molte più cifre, e inoltre le macchine lavorano in binario, non in decimale. Essa però dovrebbe permettere al lettore di capire bene cosa succede, senza doversi affaticare a tener dietro a stringhe di cifre troppo lunghe (e magari binarie). Se proprio desiderasse maggiore aderenza alla realtà, non ha che da ripetere tutto su scala diversa, o immaginarsi di farlo.

I.3 Contenuti dei vari capitoli

Il presente capitolo (Capitolo I) è un ibrido: è iniziato come una prefazione e si concluderà come rassegna commentata di simboli e termini tecnici. I capitoli dal II al XIII formano il libro vero e proprio.

I Capitoli II, III e IV contengono informazioni su argomenti di algebra lineare, algebra dei polinomi ed Analisi, ad integrazione di quanto presumo che il lettore sappia già. Non volendo riscrivere troppe parti, che vorrei poter dare per note, per quanto riguarda l' algebra lineare ho scelto di prendere a riferimento il mio libro [14], rimandando direttamente ad esso per tutto quello che non ho voluto ripetere qui. In particolare, il Capitolo II di questo libro integra il Capitolo XXII di [14]. Invece il Capitolo II, dedicato alle equazioni algebriche, completa il Capitolo VI di [13]. Il Capitolo IV contiene un'esposizione della teoria delle norme. In esso si presume che il lettore sappia già qualcosa di spazi metrici, ma non mi è sembrato opportuno appesantire la parte iniziale del libro inserendovi anche un capitolo sugli spazi metrici. D'altra parte, questo argomento raramente figura tra quelli trattati nei corsi di base di Analisi per ingegneria, matematica o fisica. Quindi ho scelto di offrirne una sintetica trattazione in appendice a questo libro (Appendice B).

Il Capitolo V contiene un'introduzione alla teoria degli errori: errori di arrotondamento, loro propagazione ed accumulo. I Capitoli VI–IX sono dedicati alla discussione di metodi diretti, mentre nei Capitoli X-XII si tratta di procedure asintotiche. In particolare, nel Capitolo VI si esaminano gli effetti che gli errori dovuti agli arrotondamenti possono avere sulla soluzione di un sistema lineare, che supponiamo di voler risolvere col metodo di Gauss. Nel Capitolo VII si mettono a confronto alcuni algoritmi per il calcolo di determinanti, l'inversione di matrici, la risoluzione di un sistema lineare ed il calcolo del rango di una matrice, paragonandoli tra loro per complessità computazionale, affidabilità ed ingombro di memoria. Si insiste soprattutto su due tipologie di algoritmi: quelli 'alla Gauss' e quelli 'alla Laplace', riconducendo alla seconda tipologia anche cose come l'inversione di una matrice mediante calcolo della matrice cofattore, la regola di Cramer ed il calcolo di ranghi mediante escursione di minori. Lo stesso tipo di analisi viene riproposto nel Capitolo VIII per il calcolo del polinomio caratteristico di una matrice. Infine, nel Capitolo IX, si esaminano le conseguenze che il disporre solo di soluzioni approssimate per l'equazione caratteristica di una matrice può avere per il calcolo degli autospazi. L'ultima parte del Capitolo IX ̀e dedicata ad una discussione del numero di condizionamento di una matrice.

Il Capitolo X è dedicato al metodo delle potenze per la determinazione di autovettori ed autovalori, preso come caso emblematico di procedura asintotica. Nel Capitolo XIsi mostra come il metodo delle potenze possa essere adattato alla risoluzione di certi sistemi lineari. Il Capitolo XII verte su argomenti di Analisi. Vi si dimostrano alcuni teoremi di punto fisso, utilizzabili in svariati contesti. Uno di essi conduce al metodo delle tangenti, discusso nel Capitolo XIII. Quest'ultimo capitolo è dedicato alle equazioni algebriche. Vi si discutono alcune classiche procedure per la risoluzione di equazioni algebriche: oltre al metodo delle tangenti, il metodo delle secanti, il metodo delle corde e quello di bisezione. Si conclude con un analisi delle formule risolutive per equazioni di secondo e terzo grado.

Alla fine del libro ho inserito tre appendici. Dell'Appendice B si è già detto. L'Appendice A tratta delle matrici così dette positive, alle quali occasionalmente si fa riferimento in capitoli precedenti. Nell'Appendice C si danno poche scarne informazioni sulla differenziazione in ambito complesso, motivate solo dal fatto che in qualche occasione, nei Capitoli XIII e XIII, si nominano anche derivate di funzioni da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$.