

Αοι



Vai al contenuto multimediale

Alessio Tropeano

Grafi di broadcast minimi





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXVII
Giacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0069-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: ottobre 2017

Ai miei figli, che amo più di ogni cosa

Ogni problema che ho risolto è diventato una regola che in seguito è servita a risolvere altri problemi.

CARTESIO

Indice

11	<i>Introduzione</i>
13	Capitolo I <i>Reti di broadcast minimali e minime</i>
17	Capitolo II <i>Algoritmi per la costruzione di reti di broadcast minimali</i>
65	Capitolo III <i>C-Broadcast networks (Metodo di Peleg)</i>
69	Capitolo IV <i>Grafi di broadcast minimi</i>
107	<i>Bibliografia</i>

Introduzione

Per broadcast si intende il processo della diffusione dell'informazione in una rete di comunicazione (network) dove un messaggio, originato da uno dei membri del network, viene trasmesso a tutti gli altri membri. Rappresentiamo un network usando la struttura matematica denominata "grafo". Noi studieremo la classe dei grafi, chiamati grafi di broadcast minimali, i quali hanno la proprietà che da ogni vertice il broadcast può essere completato nel minimo tempo possibile (cioè $\lceil \log_2 n \rceil$ unità di tempo se il grafo presenta n vertici) e la classe dei grafi, detti grafi di broadcast minimi, che oltre ad essere grafi di broadcast minimali hanno pure il minimo numero di archi. Presenteremo alcuni algoritmi per la costruzione di grafi di broadcast minimali, che ci consentiranno anche di stabilire un limite superiore sul numero di archi richiesti da grafi di broadcast minimi.

Per quanto riguarda i grafi di broadcast minimi bisogna osservare che non esiste alcuna tecnica nota per la costruzione di tali grafi con un numero arbitrario di vertici, mentre esiste un algoritmo per la costruzione di tali grafi quando $n = 2^k$, cioè n potenza di 2.

Saranno, inoltre, presentati tutti i grafi di broadcast minimi conosciuti per valori di $n \leq 19$, tenendo presente che fino a qualche tempo fa tali grafi erano noti solo per valori di $n \leq 17$. Il nostro obiettivo è stato, perciò, la ricerca di grafi di broadcast minimi per valori di $n = 18, 19, 20$. Per $n = 20$ è presentato un grafo al meglio delle conoscenze attuali, mentre per $n = 18$ e $n = 19$ si dimostrerà che tali grafi sono effettivamente grafi di broadcast minimi.

Ad eccezione dei valori di $n = 2^k$, non è nota nessuna tecnica per la costruzione di grafi di broadcast minimi con n vertici, e n arbitrario. Considerando il recente sviluppo delle reti di computers e l'esistenza di una grande varietà di altri networks di comunicazione in cui il broadcast è frequente, è preoccupante che non si è capaci di progettare, per n arbitrario, networks con n vertici in cui il broadcast possa essere eseguito da qualsiasi vertice del grafo.

Reti di broadcast minimali e minime

Il broadcast è il processo della diffusione dell'informazione in un network di comunicazione point to point, per cui un messaggio in possesso di un vertice (originatore) è inviato a tutti gli altri vertici del network. Modelliamo il network di comunicazione per mezzo di un grafo, connesso, non direzionato, $G=(V, E)$, consistente di un insieme V di n vertici che rappresentano i posti di comunicazione o membri del network, ed un insieme E di archi, che rappresentano le linee di comunicazione (canali di comunicazione bidirezionali) tra i membri.

Le informazioni, cioè i messaggi, possono essere trasmesse attraverso chiamate fatte sulle linee del network. Sono imposti alcuni vincoli che completano il modello.

Assumiamo che ogni chiamata ha due partecipanti e che richieda una unità di tempo. Inoltre un membro può essere un partecipante in al più una chiamata durante qualsiasi data unità di tempo, e può solo chiamare un altro membro a cui esso è direttamente connesso per mezzo di una linea del network.

Dato un insieme di n membri, molti criteri di bontà si propongono rispetto al processo di broadcast e alla costruzione di networks di comunicazioni ottimali per il broadcast. Questi criteri includono il costo per supportare il network, il costo del processo di broadcast e il tempo per completare il processo.

Tali criteri possono essere rappresentati rispettivamente dai seguenti tre minimi:

- a) il minimo numero di linee di comunicazione richieste per completare il processo di broadcast;
- b) il minimo numero di chiamate richieste per completare il processo di broadcast;
- c) Il minimo numero di unità di tempo richieste per completare il processo di broadcast.

Fortunatamente, tutti questi tre minimi possono essere prontamente determinati.

Affinchè il processo di broadcast possa essere completato, un network deve essere connesso. Questo significa che se il network ha n membri, sono richieste almeno $n-1$ linee di comunicazione. Allo stesso modo il minimo numero di chiamate richieste per trasmettere un messaggio dall'originatore agli $n-1$ riceventi è chiaramente $n-1$. Tutti i networks di broadcast e gli schemi di chiamata che tratteremo richiedono solo il minimo numero di chiamate. Implicita in questi primi due minimi è l'assunzione che ogni linea è di ugual costo, sia per quanto riguarda l'installazione, sia quando viene attraversata con una chiamata durante il processo di broadcast. Tale assunzione è ragionevole per un modello di network di comunicazione locale (local broadcast) o per computers con processori paralleli.

Sia ora $b(u, G)$ il minimo tempo richiesto per il broadcast dal vertice u nel grafo G . Definiamo $b(G)$, il tempo di broadcast del grafo G , essere il massimo tempo di broadcast da qualsiasi vertice in G , cioè:

$$b(G) = \max \{b(u, G) \mid u \in V(G)\}.$$

Ad esempio il tempo di broadcast del vertice u in figura 1.1.a è 3:

Infatti all'istante di tempo 1, u che è l'originatore può chiamare v , cioè v conoscerà l'informazione al tempo 1; al tempo 2, u chiama w mentre v chiama x ; al tempo 3, w chiama y , così $b(u, G) = 3$. L'albero radicato in figura 1.1.b, che indica la sequenza di chiamate, è detto albero di broadcast minimo per u .

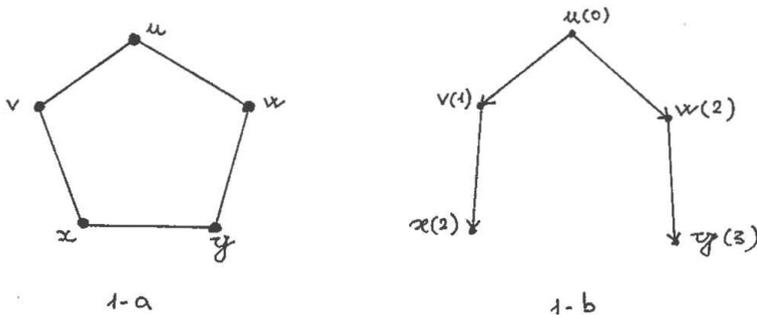


Figura 1.1. Un grafo e il suo minimo albero di broadcast

Un immediato argomento induttivo prova che il massimo numero di membri che possono essere informati con un messaggio dopo t unità di tempo è 2^t , incluso l'originatore del messaggio. Ciò si capisce osservando che il numero di vertici che mantengono una copia del messaggio (cioè che sono informati) può al più raddoppiare in ogni passo.

Teorema: Il massimo numero di membri che possono essere informati dopo t unità di tempo, in un grafo di broadcast, è 2^t .

Dimostrazione: La dimostrazione è per induzione su t .

Per $t = 0$ la relazione è chiaramente vera, infatti $n_{i_0} =$ nodi informati al tempo zero $\leq 1 = 2^0$ (originatore) $n_{i_t} =$ nodi informati al tempo $t \leq 2^t$ per ipotesi induttiva allora il numero di nodi informati al tempo $t + 1$, $n_{i_{t+1}}$, sarà al massimo il doppio dei nodi informati al tempo t , perché ogni nodo informato al tempo t può informare un nuovo nodo al tempo $t + 1$.

$$\text{Perciò: } n_{i_{t+1}} \leq 2 \cdot n_{i_t} \leq 2 \cdot 2^t = 2^{t+1} \quad \text{C.V.D.}$$

È chiaro che il massimo numero di membri sarà informato se durante ogni unità di tempo ogni membro informato chiama un differente membro non informato.

Questo risultato implica che il minimo numero di unità di tempo richieste per trasmettere un messaggio ad un insieme di n membri è $\lceil \log_2 n \rceil$ (dove $\lceil x \rceil$ è la parte intera superiore di x), perciò $b(G) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

Definiamo un network di broadcast minimale come un network di comunicazione con n membri in cui un messaggio può essere trasmesso in tempo minimo (cioè in $\lceil \log_2 n \rceil$ unità di tempo) a prescindere dall'originatore. Tali networks sono interessanti nel progetto di networks di comunicazione distribuiti e di sistemi di computazione paralleli.

È interessante anche rivedere in una versione modificata la bontà del primo criterio, che esprimeremo come: il minimo numero di linee di comunicazione richieste in un network di broadcast minimale con

n membri. Il numero di canali di comunicazione in un network di comunicazione è perciò una significativa (e qualche volta dominante) misura di costo nel progetto del network.

Sia $B(n)$ il minimo numero di archi per un qualsiasi grafo di broadcast minimale con n vertici. Un grafo di broadcast minimo è un grafo di broadcast minimale con $B(n)$ archi. Dal punto di vista pratico, i grafi di broadcast minimi sono i networks di comunicazione più economici (usando il numero di canali come misura di costo) in cui il broadcast può essere eseguito in tempo ottimo.