ALGORITMICA

COLLANA DI MATEMATICA E INFORMATICA

4

ALGORITMICA

COLLANA DI MATEMATICA E INFORMATICA

Sfortunatamente non si comprende come i libri scientifici più validi siano quelli in cui l'autore indica chiaramente cosa non sa; un autore fa infatti maggiormente del male ai suoi lettori quando nasconde le difficoltà.

Evariste Galois

È ben noto che competenze matematiche e informatiche sono ormai indispensabili in tutte le discipline scientifiche. Per soddisfare tale esigenza, la collana intende presentare testi didattici di base rivolti agli studenti universitari di area scientifica. Inoltre la collana ospita monografie centrate su aspetti avanzati delle discipline e raccolte di lezioni per corsi di dottorato, nonché atti di convegni scientifici di rilevanza internazionale.

Alessio Russo
Ferdinando Zullo

Rappresentazioni di gruppi

Un'introduzione

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-0045-5

I edizione: febbraio 2017

Indice

Introduzione

La teoria dei gruppi è uno dei settori più antichi dell'algebra moderna. Come è noto, le sue origini sono principalmente legate al problema della risolubilità per radicali di un'equazione algebrica. L'idea di affrontare lo studio di tali equazioni mediante *gruppi di permutazioni* sull'insieme delle loro radici, compare per la prima volta, sia pure in modo non esplicito, in una fondamentale memoria di J.L. Lagrange del 1770. Ma la teoria dei gruppi (finiti) di permutazioni e le sue applicazioni al problema della risoluzione per radicali di un'equazione algebrica sono legate soprattutto a E. Galois (1811-1832). A lui si deve l'introduzione del termine *gruppo* col significato tecnico attuale. Egli associò ad una data equazione algebrica un certo gruppo di permutazioni sulle sue radici (tale gruppo oggi è noto come *gruppo di Galois* - cfr. Esercizio 12) e caratterizzò la risolubilità per radicali dell'equazione mediante una proprietà di tale gruppo (cfr. Paragrafo 4.8).
Nel periodo 1850-1870 la teoria dei gruppi (finiti) di permutazioni si sviluppò soprattutto ad opera di C. Jordan, P.L. Sylow e A.L. Cauchy. Tuttavia, ci si rese ben presto conto che per la maggior parte dei problemi riguardanti tale teoria, gli enti (permutazioni) utilizzati nella costruzione dei gruppi non erano essenziali e che in realtà ciò che interessava era lo studio di un'operazione interna definita in un insieme costituito da un numero finito di elementi di natura arbitraria. Tale osservazione, che oggi può apparire banale, ma che in realtà non lo fu affatto, diede l'avvio alla creazione (o alla scoperta) della teoria generale dei gruppi finiti.

Il concetto di gruppo astratto è già presente a partire dal 1854 nei lavori di A. Cayley; in particolare, Cayley prova che ogni gruppo può essere immerso in un opportuno gruppo di permutazioni. In realtà, una effettiva diffusione ed accettazione del punto di vista astratto si ebbe soltanto nel 1882 quando W. von Dyck introdusse le *presentazioni di gruppi*.

In una prima fase concetti e risultati, introdotti e provati per i gruppi di permutazioni, furono riformulati in ambito astratto. Ciò però suggerì nuove linee di ricerca e nuovi approcci dimostrativi. Un esempio interessante è costituito dal *Teorema di Sylow*, provato nel 1872 da Sylow per i gruppi di permutazioni, e, successivamente, da F.G. Frobenius per un arbitrario gruppo.

Nel periodo che va fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del secolo successivo furono ottenuti molti dei risultati che sono alla base dell'odierna teoria dei gruppi finiti. Ciò fu dovuto all'opera di diversi matematici tra i quali, oltre al già citato Frobenius, vanno ricordati L.O. Hölder, W. Burnside e I. Schur.

Un contributo importante allo sviluppo della teoria dei gruppi fu fornito dal famoso *Programma di Erlangen* (1872) di F. Klein, secondo cui ogni geometria può essere classificata mediante lo studio delle proprietà che sono invarianti per l'*azione* di un particolare gruppo sullo spazio di quella geometria.

Come è noto, il concetto di azione di un gruppo G su un insieme X è equivalente all'esistenza di un omomorfismo φ di G nel gruppo simmetrico S_X delle permutazioni di X. L'omomorfismo φ è detto *rappresentazione permutazionale* di G su X. In particolare, se φ è anche iniettivo, allora G si può riguardare come gruppo di permutazioni su X. In altre parole, la rappresentazione φ è *fedele*. Il *Teorema di Cayley*, prima ricordato, si può allora riformulare dicendo che ogni gruppo possiede una rappresentazione fedele come gruppo di permutazioni (sul proprio sostegno).

La teoria delle azioni (o rappresentazioni permutazionali) chiude il ciclo dello sviluppo storico dei fondamenti della teoria dei gruppi: studio degli enti concreti (permutazioni), loro astrazione su basi assiomatiche (gruppi astratti), ritorno al concreto mediante il concetto di rappresentazione.

Un caso particolare di azione lo si ottiene quando l'insieme su cui il gruppo agisce è uno spazio vettoriale. In tal caso, si parla di *rappresentazione lineare* e un gruppo astratto (o più in generale un suo quoziente) viene riguardato come un gruppo di automorfismi di uno spazio vettoriale (o, equivalentemente, come un gruppo di matrici invertibili). La teoria delle rappresentazioni lineari ha permesso di affrontare problemi sui gruppi (finiti) astratti mediante tecniche dell'algebra lineare.

Scopo di questo libro è fornire un'introduzione elementare alle rappresentazioni permutazionali e a quelle lineari. I concetti sono stati presentati in modo graduale, accompagnandoli con numerosi esempi ed esercizi (gran parte dei quali completamente risolti). Si è cercato di sviluppare la trattazione intorno ad un'idea guida: la *relazione di coniugio* in un gruppo (o nel reticolo dei suoi sottogruppi). Le relazioni di coniugio vengono introdotte nel primo capitolo, interamente dedicato alle rappresentazioni permutazionali, associandole a particolari azioni le cui orbite sono le *classi di coniugio*. Tale punto di vista conduce in modo naturale alla dimostrazione di Wielandt del *Teorema di Sylow* (cfr. Paragrafo 1.3). Nei complementi del primo capitolo vengono studiate le relazioni di coniugio nei gruppi simmetrici e nei gruppi alterni. Inoltre, si fornisce una dimostrazione del famoso *Teorema di Galois-Jordan* sulla semplicità dei gruppi alterni di grado maggiore di 4 e si accenna al *Teorema di immersione di Baer* di un gruppo arbitrario in un gruppo semplice.

Nel secondo capitolo vengono introdotte le rappresentazioni lineari, con particolare riferimento alle rappresentazioni di permutazioni, alle nozioni di rappresentazioni equivalenti, di rappresentazioni irriducibili e completamente riducibili. Come è noto, la teoria delle rappresentazioni, a partire dai lavori di E. Noether (all'inizio degli anni Trenta del secolo scorso), è stata riformulata attraverso il linguaggio dei *moduli*. Tale punto di vista si è rivelato molto più efficace rispetto a quello dell'algebra lineare sia dal punto di vista terminologico sia da quello concettuale. Alla base di questo approccio vi è la nozione di *algebra gruppale* cui viene dedicato il terzo paragrafo del capitolo 2. Naturalmente, viene poi dato ampio risalto al *Teorema di Maschke* (1898) che garantisce la completa riducibilità delle rappresentazioni dei gruppi finiti su campi di caratteristica 0. Di tale teorema nei complementi del capitolo 3 viene fornita anche una dimostrazione dovuta a G. Scorza nel 1937.

Il terzo capitolo è dedicato alla teoria dei moduli e degli anelli semisemplici, riservando particolare attenzione al *Teorema di Wedderburn* (1905) sulla struttura matriciale degli anelli semisemplici privi di ideali non banali. Ciò ha consentito la descrizione dettagliata dell'algebra gruppo su campi algebricamente chiusi di caratteristica 0. In particolare, ha permesso di provare che il numero delle rappresentazioni irriducibili non equivalenti di un gruppo finito è uguale al numero delle sue classi di coniugio.

Sia $\varphi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ una rappresentazione di matrici di un gruppo finito G. È noto che le informazioni fornite da φ possono essere ottenute limitandosi a studiare la traccia della matrice $\varphi(g)$, al variare di g in G. In altre parole, basta studiare il *carattere* $\mathscr{X} : G \to \mathbb{C}$ associato alla rappresentazione φ. La teoria dei caratteri, affrontata nell'ultimo capitolo del libro, fu sviluppata a partire da alcuni lavori di Frobenius del 1896, ispirati da problemi propostigli da R. Dedekind (cfr. [6], [12] e Esercizio 64). Come sarà evidenziato, la teoria dei caratteri in caratteristica 0 è equivalente a quella delle rappresentazioni. Tuttavia, essa si è rivelata uno strumento estremamente potente sia per quel che riguarda la dimostrazione di risultati profondi interni alla teoria dei gruppi, sia per le applicazioni (ad esempio, alla chimica molecolare, alla cristallografia o alla fisica quantistica). La parte finale del capitolo è incentrata sul celebre *teorema* $p^\alpha q^\beta$ *di Burnside* (1904) secondo cui ogni gruppo finito di ordine $p^\alpha q^\beta$ (con p e q numeri primi) è risolubile. L'asserto segue facilmente dal fatto che in un gruppo semplice finito non abeliano il sottogruppo identico è l'unica classe di coniugio avente ordine una potenza di primo. Di quest'ultimo risultato ad oggi non si conosce alcuna dimostrazione che non faccia uso dei caratteri.

Notazioni e terminologia sono per lo più quelle in uso in teoria dei gruppi. In particolare, si è fatto riferimento al capitolo 8 di [22].

Un'ultima considerazione sui possibili destinatari di questo libro. Esso si rivolge a tutti quegli studenti di corsi di laurea magistrale in Matematica o in Fisica in cui è previsto un insegnamento introduttivo alla teoria delle rappresentazioni. Per la lettura del testo non sono richiesti particolari prerequisiti che vanno al di là di un corso di base di algebra astratta. Ciò lo rende fruibile anche da parte di coloro che a vario titolo sentano l'esigenza di un primo approccio alla teoria delle rappresentazioni.

Gli autori sono naturalmente in debito verso tutte quelle persone che con le loro osservazioni e suggerimenti daranno loro la possibiltà di migliorare questo lavoro.

Capitolo I

Rappresentazioni permutazionali

Fino alla fine del diciannovesimo secolo quando si parlava di gruppi si pensava essenzialmente ai gruppi di permutazioni. Solo successivamente, lo studio dei gruppi è stato sviluppato in modo astratto prescindendo dagli elementi che li costituivano. D'altra parte, come sarà dimostrato in seguito (cfr.1.1.1), ogni gruppo G è, a meno di isomorfismi, un sottogruppo del gruppo simmetrico S_G. Più in generale, vi sono diverse situazioni in cui un gruppo astratto ha un'immagine omomorfa che è un gruppo di permutazioni. Tale punto di vista trova spesso applicazione sia nell'ambito della teoria generale dei gruppi, sia in questioni pratiche di carattere combinatorio. Scopo di questo capitolo è quello di introdurre i primi elementi di questo argomento e di applicarli per ottenere un'interessante dimostrazione dovuta a Wielandt (1959) del *Teorema di Sylow* (1872), uno dei più famosi ed utili risultati della teoria elementare dei gruppi.

1.1. Gruppi di permutazioni

Siano X un insieme non vuoto e $f : X \to X$ un'applicazione di X in sé. Qui e nel seguito per indicare l'immagine di un elemento x di X tramite f, scriveremo xf, cioè useremo per f la cosiddetta *notazione destra*. Invece, la notazione sinistra la utilizzeremo per le applicazioni in cui dominio e codominio sono distinti. Ciò premesso, sia S_X l'insieme delle applicazioni biettive di X in sé (*permutazioni* di X). Nell'insieme S_X definiamo la seguente operazione:

$$\cdot : (f,g) \in S_X \times S_X \mapsto fg = g \circ f \in S_X.$$

Pertanto risulta $x(fg) = (xf)g$, per ogni $x \in X$. Come è noto, la struttura algebrica $(S_X, \cdot)$ è un gruppo, detto *gruppo simmetrico* su X. L'elemento neutro di S_X è l'*applicazione identica* ι_X di X. Si prova facilmente che S_X è non abeliano non appena X ha almeno 3 elementi. Inoltre, se X è un insieme finito di ordine n, allora $|S_X| = n!$.

Vogliamo ora evidenziare come ogni gruppo possa essere sempre riguardato come gruppo di permutazioni. Precisamente: